maxi. maths

Exercices résolus

Mathématiques

Sc Maths

2ème Année Baccalauréat

Option sciences mathématiques
Section internationale

Tome 2

2ème BAC Sc-M

- Résumés de Cours
- Exercices variés et progressifs
- Problèmes de synthèse
- Extraits de sujets du bac

EDITIONS Plus

Maxi Maths

Exercices résolus

MATHEMATIQUES

Sc Math

2ème année du baccalauréat

Option sciences mathématiques

Section internationale

(Tome 2)

- Résumés de cours
- Exercices variés et progressifs
- Problèmes de synthèse
- Extraits de sujets du bac

Auteurs:

Groupe d'auteurs

EDITIONS Plus
إديسيون بلوس

Avant - propos

Chèr (e) élève,

Ce livre a été conçu pour permettre aux élèves un travail régulier et continu tout au long de l'année de la classe terminale. Il a été préparé pour vous aider à acquérir la rigueur nécessaire à la réussite aux contrôles continus durant toute l'année scolaire et à l'examen national du baccalauréat, en vous proposant des exercices et des problèmes conformes au programme officiel.

Ce livre contient les chapitres suivants :

1- **Fonctions exponentielles**

2- **Calcul intégral**

3- **Équations différentielles**

4- **Structures algébriques**

5- **Arithmétique dans $\mathbb{Z}$**

6- **Calcul de probabilités**

Le contenu de chaque chapitre est conçu de la façon suivants :

- Des résumés de cours organisés suivant chaque paragraphe.
- Des exercices préparatoires pour mieux aborder le programme et en faire un point de départ pour l'élaboration d'une base solide en la matière.
- Des exercices classés, ordonnés et progressifs de chaque partie du cours.
- Des exercices de renforcement et de synthèse pour l'enrichissement personnel; ils combinent méthodes, outils et contenus mathématiques.
- Des extraits des sujets d'examens du baccalauréat.

Nous souhaitons vivement que ce livre réponde à vos attentes et participe à votre réussite au baccalauréat...

Les auteurs

1 Leçon Fonctions exponentielles

Résumé

I Fonction exponentielle népérienne

1) Définitions:

La fonction réciproque de la fonction ln s'appelle la fonction exponentielle népérienne et on la note exp.

2) Conséquences:

- La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$
- $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$
- $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\exp(x) > 0$
- $(\forall x \in \mathbb{R})$; $(\forall y \in]0;+\infty[)$; $(y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln(y))$
- La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$; $\exp(x) > \exp(y) \Leftrightarrow x > y$
  $\exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow x = y$

1) Prpriétés algébriques:

Pour tous x et y de $\mathbb{R}$ et r de $\mathbb{Q}$ on a :

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $(e^x)^r = e^{rx}$

Exercices d'application

Exercice 1

1) Simplifier: $a = \ln\sqrt{e^3}$; $b = e^{1-\ln 2}$; $c = \dfrac{2-\ln\sqrt[3]{e}}{1+\ln(e^2)}$

2) Simplifier expressions suivantes :

a) $x \in]0;+\infty[$; $a = e^{\ln(x)} - \ln(2e^x) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

b) $x \in \mathbb{R}$; $b = \ln\left(\dfrac{e^{1-x}}{e}\right) + \ln\left(\dfrac{1}{e^x}\right)$

c) $x \in]0;+\infty[$; $c = \ln(e^{3x}) - 2e^{\ln(2x)} + 3\ln(\ln e)$

d) $x \in]0;+\infty[$; $d = e^{\ln(x+1)}e^{-\ln(x)}$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1) $e^{3x} = 4e^{x}$ 2) $\frac{e^{-x}}{e^{-x}-3} = 4$ 3) $\frac{5e^{x}}{3-10e^{x}} = 2$

4) $e^{2x+1} - 2e^{x+1} = 3e$ 5) $\ln(e^{2x} - 2e^{x} + 1) = 3$ 6) $\ln(2e^{x} - 3) = x$

Exercice 3

1) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$; $x \in \mathbb{R}$

a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(2x) = 2(f(x))^2 - 1$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$; l'équation suivante : $f(2x) - 6f(x) + 5 = 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $e^{4x^2+4x-9} \leqslant (e^{3})^{-3}$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} e^{x} - \frac{1}{2}e^{y} = 1 \\ 2e^{x} + e^{y} = 4 + e \end{cases}$; 2) $\begin{cases} e^{4x} \cdot e^{y} = e^{-2} \\ xy = -2 \end{cases}$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $e^{1-x} - 2 < 0$ 2) $\frac{2e^{x}+1}{e^{x-3}-1} > 0$ 3) $(2e^{x}-1)(e^{x}-2) \leqslant 0$

4) $e^{x+2} > \frac{3}{e^{x}}$ 5) $\frac{e^{2x-1}}{e^{5x}} < 5$ 6) $\frac{e^{x}-1}{e^{2x}+1} < \frac{e^{x}-2}{e^{x}+2}$

Solutions

Exercice 1

1) On a : $a = \ln(\sqrt{e^{3}}) = \frac{1}{2}\ln e^{3} = \frac{3}{2}\ln e = \frac{3}{2}$

$b = e^{1-\ln 2} = \frac{e^{1}}{e^{\ln 2}} = \frac{e}{2}$

$c = \frac{2 - \ln\sqrt[3]{e}}{1 + \ln e^{2}} = \frac{2 - \frac{1}{3}\ln e}{1+2} = \frac{2-\frac{1}{3}}{3} = \frac{5}{9}$

Info :

$(\forall a \in \mathbb{R}^{+*})$; $\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n}\ln(a)$

$e^{\ln(a)} = a$

2) a) Soit $x \in]0; +\infty[$; $a = e^{\ln(x)} - \ln(2e^{x}) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = x - \ln 2 - \ln e^{x} + \ln 2$

$= x - \ln 2 - x + \ln 2 = 0$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$;

$b = \ln\left(\frac{e^{1-x}}{e}\right) + \ln\left(\frac{1}{e^{x}}\right) = \ln(e^{1-x}) - \ln(e) - \ln e^{x} = 1 - x - 1 - x = -2x$

c) Soit $x \in]0; +\infty[$; $c = \ln(e^{3x}) - 2e^{\ln(2x)} + 3\ln(\ln(e)) = 3x - 2(2x) + 3\ln(1) = -x$

d) Soit $x \in]0;+\infty[$; $d = e^{\ln(x+1)} \cdot e^{-\ln(x)}$

$$= (x+1)\left(\frac{1}{e^{\ln x}}\right) = \frac{x+1}{x}$$

Exercice 2

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{3x} = 4e^{x}$

Soit $x \in \mathbb{R}$;

On a : $e^{3x} = 4e^{x} \iff e^{x}(e^{2x} - 4) = 0$

$$\iff e^{2x} = 4 \text{ (car } (\forall x \in \mathbb{R}) ; e^{x} > 0)$$
$$\iff 2x = \ln 4$$
$$\iff x = \ln 2$$

Donc : $S = \{\ln 2\}$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation $\frac{e^{-x}}{e^{-x} - 3} = 4$

Soit D l'ensemble de définition de cette équation et S son ensemble de solutions

Soit $x \in \mathbb{R}$; On a : $x \in D \iff e^{-x} \neq 3$

$$\iff x \neq -\ln 3$$

Donc : $D = \mathbb{R} - \{-\ln 3\}$

Soit $x \in D$; $\frac{e^{-x}}{e^{-x} - 3} = 4 \iff e^{-x} = 4e^{-x} - 12$

$$\iff 3e^{-x} = 12$$
$$\iff e^{-x} = 4$$
$$\iff x = -\ln 4$$
$$\iff x = -2\ln 2$$

Donc : $S = \{-2\ln 2\}$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\frac{5e^{x}}{3 - 10e^{x}} = 2$

Cette équation est définie si et seulement si : $x \in \mathbb{R}$ et $3 - 10e^{x} \neq 0$

c'est-à-dire $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq \ln\left(\frac{3}{10}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R} - \left\{\ln \frac{3}{10}\right\}$;

On a : $\frac{5e^x}{3-10e^x} = 2 \Leftrightarrow 5e^x = 6 - 20e^x$

$\Leftrightarrow 25e^x = 6$

$\Leftrightarrow e^x = \frac{6}{25}$

$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{6}{25}\right)$

Donc : $S = \left\{\ln\left(\frac{6}{25}\right)\right\}$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation : $e^{2x+1} - 2e^{x+1} = 3e$

Soit $x \in \mathbb{R}$;

On a : $e^{2x+1} - 2e^{x+1} = 3e \Leftrightarrow e.e^{2x} - 2e.e^x - 3e = 0$

$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x + 1 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (e^x - 1)^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (e^x - 1 - 2)(e^x - 1 + 2) = 0$

$\Leftrightarrow e^x = 3$

$\Leftrightarrow x = \ln(3)$

Donc : $S = \{\ln 3\}$

5) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation, $\ln(e^{2x} - 2e^x + 1) = 3$

Soit un élément x de $\mathbb{R}$; on a : $e^{2x} - 2e^x + 1 = (e^x - 1)^2$

Donc, l'équation est définie si et seulement si ($x \in \mathbb{R}$ et $e^x \neq 1$)

si et seulement si ($x \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$)

si et seulement si $x \in \mathbb{R}^*$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$; $\ln(e^{2x} - 2e^x + 1) = 3 \Leftrightarrow \ln(e^x - 1)^2 = 3$

$\Leftrightarrow 2\ln|e^x - 1| = 3$

$\Leftrightarrow \ln|e^x - 1| = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow |e^x - 1| = e^{\frac{3}{2}}$

$\Leftrightarrow e^x - 1 = e^{\frac{3}{2}}$ ou $e^x - 1 = -e^{\frac{3}{2}}$

$\Leftrightarrow e^x = 1 + e^{\frac{3}{2}}$ ou $e^x = 1 - e^{\frac{3}{2}}$

(Puisque $e > 1$; donc : $1 - e^{\frac{3}{2}} < 0$; d'où l'équation $e^x = 1 - e^{\frac{3}{2}}$ n'a pas de solutions)

Donc : $\ln(e^{2x} - 2e^x + 1) = 3 \Leftrightarrow e^x = 1 + e^{\frac{3}{2}}$

$\Leftrightarrow x = \ln(1 + e^{\frac{3}{2}})$; d'où : $S = \left\{\ln(1 + e^{\frac{3}{2}})\right\}$

6) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation, $\ln(2e^x - 3) = x$

Soit D l'ensemble de définition de cette équation :

$x \in D \iff x \in \mathbb{R}$ et $2e^x - 3 > 0$

$\iff x \in \mathbb{R}$ et $x > \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

Donc : $D = \left]\ln\left(\frac{3}{2}\right), +\infty\right[$

Soit $x \in D$; on a : $\ln(2e^x - 3) = x \iff 2e^x - 3 = e^x$

$\iff e^x = 3$

$\iff x = \ln 3$

Puisque $3 > \frac{2}{3}$; donc $\ln(3) > \ln\left(\frac{2}{3}\right)$; ainsi $\ln(3) \in D$

Donc : $S = \{\ln 3\}$

Exercice 3

1) a) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(2x) = 2(f(x))^2 - 1$

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a :

$$2(f(x))^2 - 1 = 2\left(\left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)\right)^2 - 1 = 2 \times \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x.e^{-x}) - 1$$

$$= \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x} + 2) - 1 = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) + 1 - 1 = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) = f(2x)$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(2x) = 2(f(x))^2 - 1$

b) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation : $f(2x) - 6f(x) + 5 = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$; $f(2x) - 6f(x) + 5 = 0 \iff 2(f(x))^2 - 1 - 6f(x) + 5 = 0$

$\iff 2(f(x))^2 - 6f(x) + 4 = 0$

$\iff (f(x))^2 - 3f(x) + 2 = 0$

$\iff f(x) = 1$ *ou* $f(x) = 2$

$\iff \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1$ *ou* $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 2$

$\iff e^x + \frac{1}{e^x} = 2$ *ou* $e^x + \frac{1}{e^x} = 4$

$\iff e^{2x} + 1 = 2e^x$ *ou* $e^{2x} + 1 = 4e^x$

$\iff e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$ *ou* $e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$

$\iff (e^x - 1)^2 = 0$ *ou* $e^x = 2 - \sqrt{3}$ *ou* $e^x = 2 + \sqrt{3}$

$\iff e^x = 1$ *ou* $e^x = 2 - \sqrt{3}$ *ou* $e^x = 2 + \sqrt{3}$

$\iff x = \ln 1$ *ou* $x = \ln(2 - \sqrt{3})$ *ou* $x = \ln(2 + \sqrt{3})$

Donc : $S=\{0;\ln(2-\sqrt{3});\ln(2+\sqrt{3})\}$

2) Résolvons l'inéquation $e^{4x^2+4x-9}\leqslant (e^3)^{-3}$

Soit $x\in\mathbb{R}$; on a : $e^{4x^2+4x-9}\leqslant (e^3)^{-3}\iff e^{4x^2+4x-9}\leqslant e^{-9}$

$$\iff 4x^2+4x-9\leqslant -9$$
$$\iff 4x^2+4x\leqslant 0$$
$$\iff 4x(x+1)\leqslant 0$$
$$\iff -1\leqslant x\leqslant 0$$

Donc : $S_{\mathbb{R}}=[-1;0]$

Exercice 4

1) Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} e^x-\frac{1}{2}e^y=1 \\ 2e^x+e^y=4+e \end{cases}$

Soit $(x;y)$ un élément de $\mathbb{R}^2$; on pose $e^x=X$ et $Y=e^y$ avec $X>0$ et $Y>0$

Le système devient: $\begin{cases} X-\frac{1}{2}Y=1 \\ 2X+Y=4+e \end{cases}$

Donc : $X=\frac{3}{2}+\frac{e}{4}$ et $Y=1+\frac{e}{2}$, d'où : $e^x=\frac{3}{2}+\frac{e}{4}$ et $e^y=1+\frac{e}{2}$

Ainsi : $x=\ln\left(\frac{3}{2}+\frac{e}{4}\right)$ et $y=\ln\left(1+\frac{e}{2}\right)$

Donc : $S=\left\{\left(\ln\left(\frac{3}{2}+\frac{e}{4}\right);\ln\left(1+\frac{e}{2}\right)\right)\right\}$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système: $\begin{cases} e^{4x}\cdot e^y=e^{-2} \\ xy=-2 \end{cases}$

Soit $(x;y)$ un élément de $\mathbb{R}^2$;

On a : $\begin{cases} e^{4x}\cdot e^y=e^{-2} \\ xy=-2 \end{cases}\iff \begin{cases} e^{4x+y}=e^{-2} \\ xy=-2 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} 4x+y=-2 \\ xy=-2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 4x+y=-2 \\ (4x)\cdot y=-8 \end{cases}$$

On pose $4x=X$ et $Y=y$ le système dévient : $\begin{cases} X+Y=-2 \\ XY=-8 \end{cases}$

Donc X et Y sont les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $t^2+2t-8=0$

On a : $t^2+2t-8=0 \Leftrightarrow (t+1)^2=9$

$\Leftrightarrow t=2$ ou $t=-4$

Donc : $\begin{cases} X=-4 \\ Y=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} X=2 \\ Y=-4 \end{cases}$

Ainsi : $\begin{cases} 4x=-4 \\ y=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 4x=2 \\ y=-4 \end{cases}$

D'où : $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-4 \end{cases}$

Conclusion : $S=\left\{(-1;2);\left(\frac{1}{2};-4\right)\right\}$

Exercice 5

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $e^{1-x}-2<0$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$; on a :

$$e^{1-x}-2<0 \Leftrightarrow e^{1-x}<2$$
$$\Leftrightarrow 1-x<\ln(2)$$
$$\Leftrightarrow 1-\ln(2)<x$$
$$\Leftrightarrow x>\ln\left(\frac{e}{2}\right)$$

Donc : $S=\left]\ln\left(\frac{e}{2}\right);+\infty\right[$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\frac{2e^x+1}{e^{x-3}-1}>0$

On a : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $2e^x+1>0$

Donc : $\frac{2e^x+1}{e^{x-3}-1}>0 \Leftrightarrow e^{x-3}-1>0$

$$\Leftrightarrow e^{x-3}>1$$
$$\Leftrightarrow x-3>0$$
$$\Leftrightarrow x>3$$

Donc : $S=]3;+\infty[$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $(2e^x-1)(e^x-2)\leqslant 0$

Méthode 1 :

$e^x - 2 \geqslant 0 \iff e^x \geqslant 2$ et $2e^x - 1 \geqslant 0 \iff e^x \geqslant \frac{1}{2}$

$\iff x \geqslant \ln(2)$ $\iff x \geqslant \ln(2)$

Donc, le tableau de signe de $(2e^x - 1)(e^x - 2)$ est le suivant :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$\ln 2$		$+\infty$
$2e^x - 1$			0	$+$	$\|$	$+$	
$e^x - 2$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$(2e^x - 1)(e^x - 2)$		$+$	0		0	$+$	

Donc : $S = [-\ln(2); \ln(2)]$

Méthode 2 :

On a : $(2e^x - 1)(e^x - 2) \leqslant 0 \iff 2\left(e^x - \frac{1}{2}\right)(e^x - 2) \leqslant 0$

$\iff \frac{1}{2} \leqslant e^x \leqslant 2$

$\iff -\ln 2 \leqslant x \leqslant \ln 2$

Donc : $S = [-\ln 2; \ln 2]$

Info :
Soit : a et b de $\mathbb{R}$, avec $a < b$
$(X - a)(X - b) \leqslant 0 \iff a \leqslant X \leqslant b$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $e^{x+2} > \frac{3}{e^x}$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $e^{x+2} > \frac{3}{e^x} \iff e^{x+2} - e^x > 3$

$\iff e^{2x+2} > 3$

$\iff 2x + 2 > \ln(3)$

$\iff x > \frac{\ln(3) - 2}{2}$

Donc : $S = \left]\frac{\ln(3) - 2}{2}; +\infty\right[$

5) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{e^{2x+1}}{e^{5x}} < 5$

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a : $\frac{e^{2x+1}}{e^{5x}} < 5 \iff e^{2x+1-5x} < 5$

$\iff e^{-3x+1} < 5$

$\iff -3x - 1 < \ln(5)$

$\iff x > -\frac{1 + \ln 5}{3}$

Donc : $S = \left]-\frac{1 + \ln 5}{3}; +\infty\right[$

6) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1} < \frac{e^x - 2}{e^x + 2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a : $e^x > 0$ d'où $e^{2x} + 1 > 0$ et $e^x + 2 > 0$

Donc : $\frac{e^{x}}{e^{x}+1} < \frac{e^{x}}{e^{x}+2} \Leftrightarrow (e^{x}\quad 1)(e^{x}+2) < (e^{2x}+1)(e\quad 2)$

$\Leftrightarrow e^{3x} - 3e^{2x} > 0$

$\Leftrightarrow e^{2x}(e^{x} - 3) > 0$

$\Leftrightarrow e^{x} - 3 > 0$

$\Leftrightarrow e^{x} > 3$

$\Leftrightarrow x > \ln 3$

Donc : $S =]\ln 3; +\infty[$

II Exponentielle de base a ($a > 0$ et $a \neq 1$)

Définitions

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a > 0$ et $a \neq 1$

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $x \mapsto e^{x \ln a}$ s'appelle la fonction exponentielle de base a notée $\exp_a$

Le nombre $e^{\ln a}$ se note aussi a^{1}, et on a: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\exp_a(x) = a^{x} = e^{x \ln a}$

Propriétés:

Pour tous x et y de $\mathbb{R}$; on a:

$a^{x} \times a^{y} = a^{x+y}$ $\qquad$ $\frac{1}{a^{x}} = a^{-x}$

$\frac{a^{x}}{a^{y}} = a^{x-y}$ $\qquad$ $a^{n} = (a^{x})^{n} = (a^{n})^{x}$

- $\ln a^{x} = x \ln a$ $\qquad$ $a^{x} = a^{y} \Leftrightarrow x = y$

Dérivation:

La fonction $x \mapsto a^{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a: $\forall x \in \mathbb{R}$, $(a^{x})' = \ln a \, a^{x}$

Monotonie de la fonction exp:

- $a > 1$ alors: $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; a^{x} < a^{y} \Leftrightarrow x < y)$
- Si $0 < a < 1$ alors : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2; a^{x} < y \Leftrightarrow x > y)$

• Fonction exponentielle de base 10

La fonction $x \mapsto 10^x$ s'appelle fonction exponentielle de base 10 notée $\exp_{10}$ ou encore 10^x

On a:

• $10^x = e^{x \ln 10}$

• $(\forall x \in \mathbb{R}) ; (\forall y \in]0; +\infty[) \ ; 10^x = y \Leftrightarrow x = \log y$

Exercices d'application

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $7^{x} - 5^{3x+} \ - 0$; 2) $100^{\cdot} - 10^{x} - 2$; 3) $2^{x+1} + 3 \times 2^{x} \ - 7 = 0$; 4) $(\sqrt{x})^{x} = x^{x}$

Exercice 7

Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(m+1)2^{x} + (m-1) \cdot 2^{-x} - 0$ où m est un paramètre réel

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{x} > 5$ 2) $4^{x} - 3 \cdot 2^{x} + 2 \geqslant 0$

3) $2^{2x-1} - 3^{x+2} + 4^{x+\frac{1}{2}} + 9^{\frac{x}{2}} < 0$ 4) $5^{\cos x} + 5^{\cos(\pi - x)+1} \leqslant 2 \cdot 5^{\frac{1}{2}}$

Solutions

Exercice 6

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $7^{2x} - 5^{3x+1} = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$; $7^{2x} - 5^{3x+1} = 0 \Leftrightarrow 7^{2x} = 5^{3x+1}$

$\Leftrightarrow 2x \ln 7 = (3x+1) \ln 5$

$\Leftrightarrow (2 \ln 7 - 3 \ln 5)x = \ln 5$

$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 5}{2 \ln 7 \quad 3 \ln 5}$

Donc : $S = \left\{ \frac{\ln 5}{2 \ln 7 - 3 \ln 5} \right\}$

2) Résolvons l'équation : $100^{x} - 10^{x} = 2$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$;

$$\begin{aligned} 100^x - 10^x = 2 &\iff (10^x)^2 - (10)^x - 2 = 0 \\ &\iff (10^x + 1)(10^x - 2) - 0 \\ &\iff 10^x = -1 \text{ ou } 10^x = 2 \\ &\iff 10^x = 2 \\ &\iff x = \log(2) \end{aligned}$$

Donc . $S = \{\log(2)\}$

3) Résolvons l'équation : $2^{x+1} + 3\ 2^x\ \ 7 = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$;

$$\begin{aligned} 2^x\ \ + 3\ \ 2^x - 7 = 0 &\iff 2^x \times 2 + \frac{3}{2^x} - 7 = 0 \\ &\iff 2\ \ (2^x)^2 + 3 - 7 \cdot 2^x\ \ 0 \\ &\iff 2(2^x - 3)\left(2^x - \frac{1}{2}\right) = 0 \\ &\iff 2^x = 3 \text{ ou } 2^x = \frac{1}{2} \\ &\iff x = \log_2(3) \text{ ou } x = -1 \\ &\iff x = \log_2(3) \text{ ou } x = \log_2\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Donc : $S = \{-1; \log_2(3)\}$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$

- On remarque que 1 est une solution car $(\sqrt{1})^1 = 1^{\sqrt{1}}$
- L'équation (E) est définie si et seulement si $x \in \mathbb{R}^{*+} - \{1\}$

Résolution de l'équation :

Soit x un élément de $\mathbb{R}^{*+} - \{1\}$

$$\begin{aligned} \sqrt{x}^x = x^{\sqrt{x}} &\iff e^{x \ln(\sqrt{x})} = e^{\sqrt{x} \ln(x)} \\ &\iff \frac{1}{2} x \ln(x) = \sqrt{x} \ln(x) \\ &\iff \left(\frac{1}{2} x - \sqrt{x}\right) \ln(x)\ \ 0 \\ &\iff \ln(x) = 0 \text{ ou } x = 2\sqrt{x} \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x^2 - 4x \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x(x-4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 0$ ou $x = 4$ $\quad (x \neq 1$ et $x > 0)$

$\Leftrightarrow x = 4$

Donc : $S = \{1;4\}$

Exercice 7

Résolvons l'équation: $(m+1)2^x + (m-1)2^{-x} = 0$ où $m \in \mathbb{R}$

L'équation est définie sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a : $2^x \neq 0$

Donc : $(m+1)2^x + (m-1)2^{-x} = 0 \Leftrightarrow 2^{-x}((m+1) \times 2^{2x} + (m-1)) = 0$

$\Leftrightarrow (m+1)2^{2x} + (m-1) = 0$

$\Leftrightarrow (m+1)2^{2x} = 1 - m$

On a les cas suivants :

• Si $m = -1$ alors : $0 \cdot (2^x)^2 = 2$; d'où $0 = 2$ impossible

ainsi $S = \phi$

• Si $m \neq -1$ alors $2^{2x} = \dfrac{1-m}{m+1}$

Cette équation admet dans $\mathbb{R}$ des solutions si $\dfrac{1-m}{1+m} > 0$

c'est-à-dire si : $-1 < m < 1$

Donc. si $m \in]-\infty; -1[\cup [1; +\infty[$; alors : $S = \phi$

si $m \in]-1; 1[$; on a : $(2^x)^2 = \dfrac{1-m}{1+m} \Leftrightarrow 2^x = \sqrt{\dfrac{1-m}{1+m}}$

$\Leftrightarrow x = \log_2\left(\sqrt{\dfrac{1-m}{1+m}}\right)$

alors : $S = \left\{\log_2\left(\sqrt{\dfrac{1-m}{1+m}}\right)\right\}$

Exercice 8

1) Résolvons l'inéquation : $1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^x > 5$

Soit $x \in \mathbb{R}$; $1+\left(\frac{1}{3}\right)^x > 5 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x > 4$

$\Leftrightarrow e^{-x\ln 3} > 4$

$\Leftrightarrow -x\ln 3 > \ln 4$

$\Leftrightarrow x < -\frac{\ln 4}{\ln 3}$

Donc : $S = \left]-\infty; -\frac{\ln 4}{\ln 3}\right[$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$; l'inéquation: $4^x - 3\cdot 2^x + 2 \geqslant 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$; $4^x - 3\cdot 2^x + 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 3\cdot 2^x + 2 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow (2^x - 1)(2^x - 2) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow 2^x \geqslant 2$ ou $2^x \leqslant 1$

$\Leftrightarrow x \geqslant 1$ ou $x \leqslant 0$

Donc : $S =]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $2^{2x+1} \cdot 3^{x-1} + 4^{x+1} + 9 < 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$; $2^{2x+1} \cdot 3^{x-1} + 4^{x+1} + 9 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}4^x - 9\cdot 3^x + 2\cdot 4^x + 3^x < 0$

$\Leftrightarrow \frac{5}{2}\cdot 4^x - 8\cdot 3^x < 0$

$\Leftrightarrow \frac{5}{2}\cdot 4^x < 8\cdot 3^x$

$\Leftrightarrow 5\cdot 4^x < 16\cdot 3^x$

$\Leftrightarrow \ln 5 + x\ln 4 < \ln 16 + x\ln 3$

$\Leftrightarrow (\ln 4 - \ln 3)x < \ln\left(\frac{16}{5}\right)$

$\Leftrightarrow x < \frac{\ln\left(\frac{16}{5}\right)}{\ln 4 - \ln 3}$ (car : $\ln 4 > \ln 3$)

Donc : $S = \left]-\infty; \frac{\ln\left(\frac{16}{5}\right)}{\ln 4 - \ln 3}\right[$

4) Résolvons l'inéquation : $5^{\cos x} + 5^{\cos(\pi - x)-1} \leqslant 2\ 5^{\frac{1}{2}}$

Soit $x \in \mathbb{R}$; $5^{\cos x} + 5^{\cos(x-\pi)+1} \leqslant 2 \cdot 5^{\frac{1}{2}} \iff 5^{\cos x} + 5 \cdot 5^{-\cos x} \leqslant 2\sqrt{5}$

$$\iff (5^{\cos x})^2 - 2\sqrt{5} \cdot 5^{\cos x} + 5 \leqslant 0$$
$$\iff (5^{\cos x} - \sqrt{5})^2 \leqslant 0$$
$$\iff 5^{\cos x} - \sqrt{5} = 0$$
$$\iff 5^{\cos x} = 5^{\frac{1}{2}}$$
$$\iff \cos x = \frac{1}{2}$$
$$\iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Donc : $S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; -\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

III Limites usuelles

en $+\infty$	• $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$	en $-\infty$	• $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
	• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$		• $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$
	• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ où $n \in \mathbb{N}$		• $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ où $n \in \mathbb{N}$

en 0 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Exercices d'application

Exercice 9

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{2x}}{x}$ 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - e^{2x+1}$ 3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2e^x - 1}{x^2 + x}$ 4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4e^{3x}}{x^2 - 2x + 8}$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2 - x}}{2x + 1}$ 6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{2x-1}}{x^2 + 1}$ 7) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{3x}$ 8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e - x}{2e^x + 3}$

9) $\lim\limits_{x \to -\infty} (4x^2 - 1)e^{3x}$

Exercice 10

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{2x^2}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-1)\left(e^{\frac{1}{x-1}}-1\right)$ 5) $\lim\limits_{x\to(\ln 2)^+}\dfrac{2e^x+1}{e^x-2}$ 6) $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)e^{x^{\frac{1}{x-1}}}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^x-1)-x$ 8) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}x-\ln|2e^x-1|$ 9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}-3e^x+4}{2e^x-3}$

Exercice 11

1) Montrer que : $(\forall x\in]-\infty;0])\ ;\ |e^x-1|\leqslant|x|$

et que : $(\forall x\in[-1;0])\ ;\ |2x^2+3e^x-3|\leqslant 5|x|$

2) En déduire $\lim\limits_{x\to 0^-}\left|\dfrac{2x^2+3e^x-3}{\sqrt{-x}}\right|$

Exercice 12

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{1}{2+2^{\tan x}}$ 2) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{1}{2+2^{\tan x}}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x-m}\right)^x$ avec $m>0$ 5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\tan 4x}}$ 6) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^x-x}{\ln(1+\sqrt{x^2-1})}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}\right)^{x\ln x}$ 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

Solutions

Exercice 10

1) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x}$

Méthode 1 :

Soit $x\in\mathbb{R}^*$; on a : $\dfrac{e^{2x}}{x}=\dfrac{e^x}{x}\cdot e^x$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x}=+\infty$

Méthode 2 :

Soit $x\in\mathbb{R}^*$; $\dfrac{e^{2x}}{x}=2\cdot\dfrac{e^{2x}}{2x}$

Posons $2x=X$; $x\longrightarrow+\infty\iff X\longrightarrow+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x}=\lim\limits_{X\to+\infty}2\dfrac{e^X}{X}=+\infty$

2) Calculons $\lim_{x \to -\infty} x^3 - e^{2x+1}$

Soit $x \in]0; +\infty[$; $x^3 - e^{2x+1} = x^3\left(1 - \frac{e^x}{x^3}.e^{x+1}\right)$

Puisque : $\lim_{x \to -\infty} x^3 = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^{x+1} = +\infty$

alors : $\lim_{x \to -\infty} x^3\left(1 - \frac{e^x}{x^3}.e^{x+1}\right) = -\infty$. Donc : $\lim_{x \to -\infty} x^3 - e^{2x+1} = -\infty$

3) Calculons $\lim_{x \to -\infty} \frac{2e^x - 1}{x^2 + x}$

Soit $x \in]0, +\infty[$, on a . $\frac{2e^x - 1}{x^2 + x} = \frac{2e^x}{x^2 + x} - \frac{1}{x^2 + x}$

$$= \frac{e^x}{x^2} \cdot \frac{2}{1 + \frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2 + x}$$

On a : $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x}} = 2$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2 + x} = 0$

Donc : $\lim_{x \to -\infty} \frac{2e^x - 1}{x^2 + x} = +\infty$

4) Calculons $\lim_{x \to -\infty} \frac{4e^{3x}}{x^2 - 2x + 8}$

Méthode 1 :

Soit $x \in]0; +\infty[$; on a : $\frac{4e^{3x}}{x^2 - 2x + 8} = \frac{4x^2}{x^2 - 2x + 8}\left(\frac{e^x}{x}\right)^2 \cdot e^x$

Puisque : $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2}{x^2 - 2x + 8} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} 4 = 4$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = +\infty$

alors . $\lim_{x \to -\infty} \frac{4e^{3x}}{x^2 - 2x + 8} = +\infty$

Méthode 2 :

Soit $x \in]0; +\infty[$; on a :

$$\frac{4e^{3x}}{x^2 - 2x + 8} = \frac{(e^x)^3}{x^3} \cdot \frac{4}{1 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} = \left(\frac{e^x}{x}\right)^2 \cdot e^x \cdot \frac{4}{1 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}}$$

Puisque : $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{4}{1 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} = 4$

alors : $\lim_{x \to -\infty} \frac{4e^{3x}}{x^2 - 2x + 8} = +\infty$

5) Calculons $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x^2+x}}{2x + 1}$

Méthode 1 :

Soit $x \in]1;+\infty[$; on a : $\frac{e^{x^2-x}}{2x+1} \cdot \frac{e^{x^2-x}}{x^2-x} \cdot \frac{x^2-x}{2x+1}$

Pour $\frac{e^{x^2-x}}{x^2-x}$; posons $x^2-x=t$

On a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2-x}}{x^2-x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$

Donc : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2-x}}{2x+1} = +\infty$

Méthode 2 :

Soit $x \in]0;+\infty[$; on a : $\frac{e^{x^2-x}}{2x+1} = \frac{e^{x^2-x}}{e^{\ln(2x+1)}} = e^{x^2-x-\ln(2x+1)}$

Et on a : $x^2-x-\ln(2x+1) = (2x+1)\cdot\left(\frac{x^2-x}{2x+1} - \frac{\ln(2x+1)}{2x+1}\right)$

Puisque : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$

et : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x+1)}{2x+1} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} (2x+1) = +\infty$

alors : $\lim_{x\to+\infty} x^2-x-\ln(2x+1) = +\infty$

Par suite: $\lim_{x\to+\infty} e^{(x^2-x)-\ln(2x+1)} = \lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$

Ainsi: $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2-x}}{2x+1} = +\infty$

6) Calculons $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{x+1}$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$; on a : $\frac{e^{x^2}}{x+1} = \frac{\left(e^{x^2}\right)^2}{x+1} = \frac{e^{2x^2}}{x+1}$

Puisque : $\lim_{x\to+\infty} \left(e^{x^2}\right)^2 = +\infty$, et $\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x} = 1$, alors: $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x^2}}{x+1} = +\infty$

7) Calculons: $\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{3x}$

Méthode 1 :

Soit $x \in \mathbb{R}^*$; on a : $x^2 e^{3x} = (xe^x)^2 \times e^x$

Puisque : $\lim_{x\to+\infty} xe^x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} e^x = 0$ alors : $\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{3x} = 0$

Méthode 2 :

On pose $3x = t$, donc : $x^2e^{3x} = \left(\frac{t}{3}\right)^2 e^t = \frac{1}{9}t^2e^t$

Puisque $\lim_{t\to-\infty} t^2e^t = 0$, alors $\lim_{x\to-\infty} x^2e^{3x} = 0$

Méthode 3 :

On pourra poser $3x = 2t$

$x^2e^{3x} = \left(\frac{2}{3}t\right)^2 e^{2t} = \frac{4}{9}(te^t)^2$

$\lim_{-\infty} x^2e^{3x} = \lim_{-\infty} \frac{4}{9}(te^t)^2 = 0$

8) Calculons $\lim_{+\infty} \frac{e^x - x}{2e^x + 3}$

Soit $x \in]0; +\infty[$; on a : $\frac{e^x - x}{2e^x + 3} = \frac{e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(2 + \frac{3}{e^x}\right)} = \frac{1 - \frac{x}{e^x}}{2 + \frac{3}{e^x}}$

Puisque $\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; alors $\lim_{+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

Et on a $\lim_{+\infty} \frac{3}{e^x} = 0$ (car $\lim_{+\infty} e^x = +\infty$)

Donc $\lim_{+\infty} \frac{1 - \frac{x}{e^x}}{2 + \frac{3}{e^x}} = \frac{1}{2}$; Ainsi $\lim_{+\infty} \frac{e^x - x}{2e^x + 3} = \frac{1}{2}$

9) Calculons $\lim_{-\infty} (4x + 1)e^{3x}$

Méthode 1 :

Soit $x \in]-\infty; 0[$; on a : $(4x + 1)e^{3x} = 4x^2e^{3x} + e^{3x}$

Puisque $\lim_{-\infty} x^2e^{3x} = 0$ (voir limite 7) et $\lim_{-\infty} e^{3x} = 0$

alors $\lim_{-\infty} (4x^2 + 1)e^{3x} = 0$

Méthode 2 :

Soit $x \in]-\infty, -\frac{1}{4}[$, $(4x + 1)e^{3x} = 4x\left(x + \frac{1}{4}\right)e^{3x} = 4x^2\left(x + \frac{1}{4}\right)(xe^{3x})$

Et on a $\lim_{-\infty} 4x^2\left(x + \frac{1}{4}\right) = \lim_{-\infty} 4x^2 = 0$ et $\lim_{-\infty} (xe^{3x}) = 0$, car $\lim_{-\infty} xe^x = 0$

Donc $\lim_{-\infty} (4x + 1)e^{3x} = 0$

Exercice 10

1) Calculons $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$

Soit $x\in\mathbb{R}^*$; on a : $\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x}=\frac{e^{2x}(e^x-1)}{x}=e^{2x}\cdot\frac{e^x-1}{x}$

On a : $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ et $\lim_{x\to 0}e^{2x}=1$, donc : $\lim_{x\to 0}e^{2x}\cdot\frac{e^x-1}{x}=1$

Donc : $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x}=1$

2) Calculons $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

Soit $x\in\mathbb{R}^*$ et $x\neq k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$;ona: $\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{\sin x}=2e^{-x}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)$

Puisque : $\lim_{x\to 0}2e^{-x}=2$; $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$

et $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$; alors $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=2$

3) Calculons $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{2x^2}$

Soit $x\in\mathbb{R}^*$; on a : $\frac{e^x-\cos x}{2x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$

Puisque : $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}=\lim_{X\to 0}\frac{e^X-1}{X}=1$ (avec $X=x^2$; $x\longrightarrow 0\Leftrightarrow X\longrightarrow 0$)

et $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ alors : $\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$

Donc : $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{2x^2}=\frac{3}{4}$

4) Calculons $\lim_{x\to+\infty}(x^2-1)(e^{\frac{1}{x-1}}-1)$

Soit : $x\in\mathbb{R}-\{1\}$; on a : $(x^2-1)(e^{\frac{1}{x-1}}-1)=(x+1)\left(\frac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{\frac{1}{x-1}}\right)$

On a : $\lim_{x\to+\infty}x+1=+\infty$

On pose : $\frac{1}{x-1}=t$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{\frac{1}{x-1}}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}(x+1)\cdot\frac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{\frac{1}{x-1}}=+\infty$

D'où : $\lim_{x\to+\infty}(x^2-1)(e^{\frac{1}{x-1}}-1)=+\infty$

5) Calculons $\lim_{x\to\ln 2}\frac{2e^x+1}{e^x-2}$:

On a : $\lim\limits_{x\to(\ln 2)^+} 2e^x+1=5$ et $\lim\limits_{x\to(\ln 2)^+} e^x-2=0^+$ (car $x>\ln 2^+ \Rightarrow x>\ln 2 \Rightarrow 2^x-2>0$)

Donc: $\lim\limits_{x\to(\ln 2)^+} \dfrac{2e^x+1}{e^x-2}=+\infty$

6) Calculons $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}$

Soit $x\in\mathbb{R}-\{1\}$; on a : $(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}}{\frac{1}{x-1}}$

Posons: $\dfrac{1}{x-1}=X$; $x\to 1^+ \Leftrightarrow X\to+\infty$, d'où: $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$

7) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^x-1)-x$

Méthode 1: Soit $x>0$; on a : $\ln(e^x-1)-x=\ln(e^x-1)-\ln e^x$

$=\ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x}\right)=\ln(1-\dfrac{1}{e^x})$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$; alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{1}{e^x})=1$; et la fonction ln est continue en 1

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1-\dfrac{1}{e^x})=\ln 1=0$ ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^x-1)-x=0$

Méthode 2:

Soit $x>0$;

on a $\ln(e^x-1)-x=\ln\left(e^x\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)\right)-x$

$=\ln e^x+\ln\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)-x$ (car $\forall x>0 ; e^x>0$

$=x+\ln\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)-x=\ln\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)$ et $1-\dfrac{1}{e^x}>0$)

Et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\dfrac{1}{e^x}=1$ et ln est continue en 1,

alors: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^x-1)-x=0$

8) Calculons: $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x-\ln|2e^x-1|$

• Calculons: $\lim\limits_{x\to-\infty} x-\ln|2e^x-1|$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$; d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}|2e^x-1|=1$

Et ln est continue en 1, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln|2e^x-1|=\ln 1=0$,

et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

Donc $\lim_{x \to -\infty} x - \ln|2e^x - 1| = -\infty$

• Calculons $\lim_{x \to +\infty} x - \ln|2e^x - 1|$

Soit $x > 0$; on a : $2e^x - 1 > 0$

et $x - \ln(2e^x - 1) = x - \ln\left(e^x\left(2 - \frac{1}{e^x}\right)\right)$

$= x - \ln e^x - \ln\left(2 - \frac{1}{e^x}\right)$

$= -\ln\left(2 - \frac{1}{e^x}\right)$

Puisque $\lim_{x \to +\infty} 2 - \frac{1}{e^x} = 2$ et la fonction ln est continue en 2

alors $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(2 - \frac{1}{e^x}\right) = \ln 2$ d'où : $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(2 - \frac{1}{e^x}\right) = -\ln 2$

Ainsi $\lim_{x \to +\infty} x - \ln(2e^x - 1) = -\ln 2$

9) Calculons $\lim_{|x| \to +\infty} \frac{e^{2x} - 3e^x + 4}{2e^x - 3}$

• Calculons $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - 3e^x + 4}{2e^x - 3}$

On pose $e^x = t$; on a alors:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - 3e^x + 4}{2e^x - 3} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^2 - 3t + 4}{2t - 3} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{2} = +\infty$

• Calculons $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - 3e^x + 4}{2e^x - 3}$: $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - 3e^x + 4}{2e^x - 3} = \frac{4}{3}$ (car $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$)

Exercice 11

1) Montrons que : $(\forall x \in]-\infty; 0]) ; |e^x - 1| \leqslant |x|$

Soit $x \in]-\infty; 0]$; on a : $x \leqslant 0 \Leftrightarrow e^x \leqslant 1$

$\Leftrightarrow e^x - 1 \leqslant 0$

Donc : $|e^x - 1| = 1 - e^x$ et on a: $|x| = -x$

Montrons donc que : $(\forall x \in]-\infty; 0]) ; 1 - e^x \leqslant -x$

On considere la fonction u définie sur $]-\infty; 0]$ par $u(x) = e^x + x - 1$

La fonction u est derivable sur $]-\infty; 0]$ et $(\forall x \in]-\infty; 0]) ; u'(x) = e^x + 1$

On a donc : $(\forall x \in]-\infty; 0[) ; u'(x) < 0$

D'où la fonction u est strictement decroissante sur $]-\infty; 0]$

Donc : $(\forall x \in]-\infty;0])\ ; u(x) \geqslant u(0)$

C'est-à-dire : $u(x) \geqslant 0$ (car $u(0) \quad 0$)

Ainsi : $e^{x} \quad x \quad 1 \geqslant 0$

Donc : $1 - e^{x} \leqslant -x$

Conclusion : $(\forall x \in]-\infty;0])\ ;\ |e^{x} \quad 1| \leqslant |x|$

• Montrons que : $(\forall x \in [\ -1;0])\ ;\ |2x^{2} + 3e^{x} - 3| \leqslant 5|x|$

Soit $x \in [\quad 1;0]$, on a : $|2x^{2} + 3e^{x} - 3| = |2x^{2} + 3(e^{x} - 1)| \leqslant 2x^{2} + 3|e^{x} - 1|$

Et on a : $|e^{x} - 1| \leqslant |x|$ et $x^{2} = |x|^{2} \leqslant |x|$ (car $|x| \in [0;1]$)

Donc : $|2x^{2} + 3e^{x} - 3| \leqslant 2x^{2} + 3|e^{x} \quad 1| \leqslant 2|x| + 3|x|$

Ainsi : $2x^{2} + 3e^{x} \quad 3| \leqslant 5|x$, pour tout x de $[\quad 1;0]$

2) Déduisons $\lim\limits_{x \to 0^{-}} \left| \dfrac{2x^{2} + 3e^{x} - 3}{\sqrt{-x}} \right|$

On a : $(\forall x \in [-1;0[)\ ;\ |2x^{2} + 3e^{x} - 3| \leqslant 5|x|$

Donc : $\left| \dfrac{2x^{2} + 3e^{x} - 3}{\sqrt{-x}} \right| \leqslant \dfrac{5|x|}{\sqrt{x}}$; $(|x| = -x \quad (\sqrt{-x})^{2})$

Ainsi : $\left| \dfrac{2x^{2} + 3e^{x} - 3}{\sqrt{-x}} \right| \leqslant 5\sqrt{-x}$

Donc : $\begin{cases} (\forall x \in [-1;0[)\ ;\ \left| \dfrac{2x^{2} + 3e^{x} - 3}{\sqrt{-x}} \right| \leqslant 5\sqrt{-x} \\ \lim\limits_{x \to 0^{-}} 5\sqrt{-x} = 0 \end{cases}$

Par suite : $\lim\limits_{x \to 0^{-}} \left| \dfrac{2x^{2} + 3e^{x} - 3}{\sqrt{x}} \right| = 0$

Exercice 12

1) Calculons $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^{+}} 2 + 2^{\frac{1}{\tan x}}$

On a : $2^{\tan x} = e^{\ln(2)\tan x}$ et puisque : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^{+}} \tan x = -\infty$ et $\ln 2 > 0$

Alors : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^{+}} \ln 2 \cdot \tan x = -\infty$

D'où : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^{+}} e^{\ln 2 \tan x} = 0$ (car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$) ainsi : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^{+}} 2^{\tan x} = 0$

Par suite : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^{+}} \left(\dfrac{1}{2 + 2^{\frac{1}{\tan x}}} \right) = \dfrac{1}{2}$

2) Calculons $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 + 2^{\tan x}}$

On a : $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$ et $2 > 1$, donc : $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} 2^{\tan x} = +\infty$

D'où : $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} 2 + 2^{\tan x} = +\infty$

Ainsi : $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 + 2^{\tan x}} = 0$

3) Calculons $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Soit $x > 0$; on a : $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}$

Posons $\frac{1}{x} = t$; on a : $\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1 + t)}{t} = 1$

Et la fonction: $x \longmapsto e^x$ est continue en 1

Alors : $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^1 = e$

4) Calculons $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x - m}\right)^x$ où $m > 0$

On a : $\left(\frac{x}{x - m}\right)^x = e^{x \ln\left(\frac{x}{x - m}\right)}$

et on a : $x \ln\left(\frac{x}{x - m}\right) = -x \ln\left(\frac{x - m}{x}\right) = -x \ln\left(1 - \frac{m}{x}\right)$

On pose : $t = -\frac{m}{x}$

On a donc : $\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(\frac{x}{x - m}\right) = \lim_{x \to +\infty} -x \ln\left(1 - \frac{m}{x}\right)$

$= \lim_{t \to 0} m \frac{\ln(1 + t)}{t} = m$ (en posant: $t = -\frac{m}{x}$)

Puisque: la fonction $x \longmapsto e^x$ est continue en m

Alors : $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x - m}\right) = \lim_{x \to +\infty} e^{x \ln\left(\frac{x}{x - m}\right)} = e^m$

5) Calculons $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\tan 2x}}$

On a : $(\tan x)^{\frac{1}{\tan 2x}} = e^{\frac{1}{\tan 2x} \ln(\tan x)} = e^{\frac{\ln(\tan x)}{\tan 2x}}$

On pose $t = x - \frac{\pi}{4}$; on a donc :

$$\frac{\ln(\tan x)}{\tan 4x} = \frac{1}{\tan(4t+\pi)}\ln\left(\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{\tan 4t}\ln\left(\frac{1+\tan t}{1-\tan t}\right)$$
$$= \frac{1}{\tan(4t)}\cdot((\ln(1+\tan t) - \ln(1-\tan t))$$
$$= \frac{\tan t}{\tan(4t)}\cdot\left(\frac{\ln(1+\tan t)}{\tan t} + \frac{\ln(1-\tan t)}{-\tan t}\right)$$

On pose $\tan t = h$; on a : $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+\tan t)}{\tan t} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

de même : $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1-\tan t)}{-\tan t} = 1$

et on a : $\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{\tan(4t)} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\tan t}{t}}{\frac{\tan 4t}{t}} = \frac{1}{4}$

D'où : $\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{\tan 4t}\left(\frac{\ln(1+\tan t)}{\tan t} + \frac{\ln(1-\tan t)}{-\tan t}\right) = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2}$

Et la fonction $x \longmapsto e^x$ est continue en $\frac{1}{2}$

Par conséquent : $\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\tan 4x}} = \lim_{x\to -\frac{\pi}{4}} e^{\frac{\ln(\tan x)}{\tan 4x}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

6) Calculons $\lim_{x\to 1}\frac{x^x - x}{\ln(1+\sqrt{x^2-1})}$

On pose : $t = x - 1$

On a donc : $x^x - x = x(x^{x-1} - 1) = x(e^{(x-1)\ln x} - 1)$

$$= (t+1)(e^{\ln(1+t)} - 1) = \frac{e^{t\ln(1+t)} - 1}{t\ln(1+t)}\cdot t(\ln(1+t))\cdot(t+1)$$

Et on a : $\ln(1+\sqrt{x^2-1}) = \ln(1+\sqrt{t^2+2t}) = \frac{\ln(1+\sqrt{t^2+2t})}{\sqrt{t^2+2t}}\cdot\sqrt{t^2+2t}$

Donc : $\frac{x^x - x}{\ln(1+\sqrt{x^2-1})} = \frac{e^{t\ln(1+t)} - 1}{t\ln(1+t)}\cdot\frac{t(t+1)\ln(1+t)}{\sqrt{t^2+2t}}\cdot\frac{\sqrt{t^2+2t}}{\ln(1+\sqrt{t^2+2t})}$

On pose : $h = t\ln(1+t)$

On a : $\lim_{t\to 0}\frac{e^{t\ln(1+t)} - 1}{t\ln(1+t)} = \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1$

On pose : $y = \sqrt{t^2+2t}$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+2t}}{\ln(1+\sqrt{t^2+2t})} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = 1$$

Et on a : $\lim \dfrac{t(t+1)\ln(1+t)}{\sqrt{t^2+2t}} = \lim \dfrac{(t+1)(\ln(1+t))\sqrt{t^2+2t}}{(t+2)} = 0$

Donc : $\lim \dfrac{(t+1)(e^{t+1}-1)}{\ln\left(1+\sqrt{\sqrt{t^2+2t}}\right)} = 0$

Ainsi : $\lim \dfrac{x^3-x}{\ln(1+\sqrt{x^2-1})} = 0$

7) Calculons $\lim\left(\dfrac{\ln(x)}{\ln(x+1)}\right)^{x\ln x}$

On a : $\lim\left(\dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}\right)^{x\ln x} = \lim e^{x\ln x\left(\ln\left(\frac{\ln x}{\ln(x+1)}\right)\right)}$

Calculons tout d'abord $\lim x\ln(x)\cdot\ln\left(\dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}\right)$; on a:

$$x\ln x\ln\left(\frac{\ln x}{\ln(x+1)}\right) = x\ln x\cdot\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right) = x\ln x\ln\left(\frac{\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right)$$

$$= x\ln x\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\left|\begin{matrix}\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right)\\ \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\\ \ln x\end{matrix}\right|$$

On pose : $t = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$; on a donc : $x\longrightarrow+\infty \Longleftrightarrow t\longrightarrow 0^+$

D'où : $\lim \dfrac{\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$

et $\lim x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \lim \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim \dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1$

Donc : $\lim x\ln(x)\cdot\ln\left(\dfrac{\ln x}{\ln(1+x)}\right) = 1$, par suite: $\lim\left(\dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}\right)^{x\ln x} = e^1$

8) Calculons $\lim \dfrac{e^{x+1}-e^x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

On pose $t = x-1$, on a : $e^{x+1}-e^x = e^{t+2}-e^{t+1} = e^{t+1}-e^t$

$$= e^t\cdot\frac{e^t-1}{t+1}\quad t(t+1)$$

et $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) = \cos\left(\dfrac{\pi t}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)$

Donc : $\dfrac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\dfrac{e^{t^2+t}-1}{t^2+t}\cdot\dfrac{-t}{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}\cdot(t+1)e^{2t+2}$

Comme : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{t^2+t}-1}{t^2+t}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$ (en posant $h=t^2+t$)

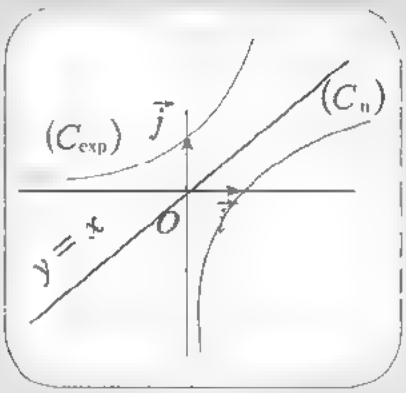
de plus : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-t}{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}=-\dfrac{2}{\pi}$ et $\lim\limits_{t\to 0}(t+1)e^{2t+2}=e^2$

Donc : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{t^2+t}-1}{t^2+t}\cdot\dfrac{-t}{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}(t+1)e^{2t+2}=-\dfrac{2e^2}{\pi}$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=-\dfrac{2e^2}{\pi}$

IV Dérivation - Courbe de la fonction exp

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe de la fonction exponentielle est le symétrique de la courbe de la fonction ln par rapport à la droite d'équation: $y=x$



• La fonction: $x\mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a: $(\forall x\in\mathbb{R})$; $(e^x)'=e^x$

Conséquence:

• Si une fonction u est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction: $x\mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a: $(\forall x\in I)$: $(e^{u(x)})'=u'(x)e^{u(x)}$

S. u est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors les fonctions primitives de la fonction: $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sur I sont les fonctions définies sur I par: $x\mapsto e^{u(x)}+k$; avec k un nombre réel.

Exercices d'application

Exercice 13

Étudier la dérivabilité de f, puis calculer sa dérivée dans chaque cas :

1) $f(x) = (x+1)e^{x}$ 2) $f(x) = x + 2 - \dfrac{4e^{x}}{e^{x}+3}$ 3) $f(x) = e^{x+\frac{1}{2}}$

4) $f(x) = (2x+1)e^{\frac{1}{x}}$ 5) $f(x) = \ln(|e^{x}-1|) + x$ 6) $f(x) = xe^{\frac{2}{x^{2}}}$

7) $f(x) = \ln(e^{x} - e^{\frac{1}{x}})$ 8) $f(x) = \sqrt{e^{2x} - e^{x}}$

Exercice 14

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 1 - x + \dfrac{x^{2}}{2} - e^{-x}$

1) Calculer pour tout x de $\mathbb{R}$; $h'(x)$ et $h''(x)$ et déterminer $h(0)$ et $h'(0)$

2) a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^{+})$; $0 \leqslant h''(x) \leqslant x$

b) Déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}^{+})$; $0 \leqslant h(x) \leqslant \dfrac{x^{3}}{6}$

3) Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x} \ ; \ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0

Exercice 15

On considère la fonction f définie sur $[e; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

1) Montrer que f est une bijection de $[e; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on déterminera

2) Montrer que : $\forall a$; b et c de $[e; +\infty[$; $b < c \Longleftrightarrow a^{c^{b}} < a^{b}$

Exercice 16

Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; on a : $e^{x} > \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{k}}{k!}$ où $x > 0$

Exercice 17

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{*}$, par : $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)e^{x}$ et soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) a) Calculer les limites aux bornes de $\mathbb{R}^*$

b) Déterminer les branches infinies de (C_f)

2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$

b) Dresser le tableau de variations de f

c) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1

3) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $f''(x) = \dfrac{(x-1)(x^2+2)}{x^3}e^x$

b) Étudier la concavité de (C_f)

4) Tracer la tangente (T) et la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Exercice 16

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + \ln(1+e^x)$

et (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations

2) a) Étudier la concavité de (C_f)

b) Vérifier que pour tout réel x, on a : $f(x) - \dfrac{-1}{1+e^x} + x + \ln(1+e^x)$

c) Étudier les branches infinies de (C_f)

3) Soit h la fonction définie par : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $h(x) = f(x) - x$

a) Étudier les variations de h

b) En déduire la position relative de la courbe (C_f) par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$

4) Construire (C_f) en mettant en évidence la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0

Partie B :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} + \ln(1+e^x)$

et soit (Γ) la courbe de g dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g(x) = 1 + f(x)$

2) Déduire:

a) Le tableau de variations de g

b) La concavité de (Γ)

c) Les branches infinies de (Γ)

d) Tracer (Γ)

Solutions

Exercice 13

1) $f(x) = (x+1)e^{-x}$

• Ensemble de définition de f : $D_f = \mathbb{R}$

• La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$; comme produit de deux fonctions dérivables et on a: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x}$

2) $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+3}$

• Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$

• La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ ; \ f'(x) = 1 - \frac{4e^x(e^x+3) - 4e^x(e^x)}{(e^x+3)^2} = 1 - \frac{12e^x}{(e^x+3)^2} = \frac{(e^x-3)^2}{(e^x+3)^2}$$

3) $f(x) = e^{\frac{x-1}{x+2}}$

• Ensemble de définition : $D_f =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$

• La fonction f est dérivable en chaque point de D_f

Et on a : $(\forall x \in D_f)$; $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} e^{\frac{x-1}{x+2}}$

4) $f(x) = (2x+1)e^{\frac{1}{x}}$

• Ensemble de définition : $D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

• La fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$.

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \ ; \ f'(x) = 2e^{\frac{1}{x}} + (2x+1) \times \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = \frac{2x^2 - 2x - 1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

5) $f(x) = \ln(|e^x - 1|) + x$

• Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}^*$

• La fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$

$(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1} + 1 = \dfrac{2e^x - 1}{e^x - 1}$

6) $f(x) = xe^{\frac{2x}{x^2-1}}$

• Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

• La fonction f est dérivable en tout point de D_f

Et on a : $(\forall x \in D_f)$; $f'(x) = e^{\frac{2x}{x^2-1}} + x \cdot \dfrac{-2 - 2x^2}{(x^2-1)^2} e^{\frac{2x}{x^2-1}}$

$$= \frac{(x^2-1)^2 - 2x - 2x^3}{(x^2-1)^2} e^{\frac{2x}{x^2-1}}$$

$$= \frac{x^4 - 2x^2 + 1 - 2x - 2x^3}{(x^2-1)^2} e^{\frac{2x}{x^2-1}}$$

$$= \frac{x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1}{(x^2-1)^2} e^{\frac{2x}{x^2-1}}$$

7) $f(x) = \ln\left(e^x - e^{\frac{1}{x}}\right)$

• Ensemble de définition :

Soit $x \in \mathbb{R}$; $x \in D_f \iff x \neq 0$ et $e^x - e^{\frac{1}{x}} > 0$

$\iff x \neq 0$ et $e^x > e^{\frac{1}{x}}$

$\iff x \neq 0$ et $x > \dfrac{1}{x}$

$\iff x \neq 0$ et $x - \dfrac{1}{x} > 0$

$\iff x \neq 0$ et $\dfrac{x^2 - 1}{x} > 0$

Le tableau de signe de $\dfrac{x^2-1}{x}$ est le suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x^2-1}{x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f =]-1; 0[\cup]1; +\infty[$

La fonction f est dérivable en tout point de D_f et on a :

$$(\forall x \in D_f) \; ; \; f'(x) = \frac{e^x + \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{e^x - e^{\frac{1}{x}}} = \frac{x^3 e^x + e^{\frac{1}{x}}}{x^2 (e^x - e^{\frac{1}{x}})}$$

8) $f(x) = \sqrt{e^{2x} - e^x}$

• **Ensemble de définition :**

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a $x \in D_f \Leftrightarrow e^{2x} - e^x \geqslant 0$

$\Leftrightarrow e^x(e^x - 1) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow e^x - 1 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow e^x \geqslant 1$

$\Leftrightarrow x \geqslant 0$

Donc : $D_f = [0; +\infty[$

• La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$(\forall x \in]0; +\infty[) \; ; \; f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{2\sqrt{e^{2x} - e^x}} = \frac{e^x(2e^x - 1)}{2\sqrt{e^{2x} - e^x}}$$

• Dérivabilité de f à droite en 0

Soit $x \in]0; +\infty[$; $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\sqrt{e^{2x} - e^x}}{x} = \sqrt{\dfrac{e^x(e^x - 1)}{x^2}} = \sqrt{\dfrac{e^x}{x}}\sqrt{\dfrac{e^x - 1}{x}}$

Puisque : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Alors : $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\dfrac{e^x}{x}}\sqrt{\dfrac{e^x - 1}{x}} = +\infty$; ainsi : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$

Donc f n'est pas dérivabilité à droite en 0

Exercice 14

1) Déterminons h' et h''

La fonction h est deux fois derivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$(\forall x \in \mathbb{R})$, $h'(x) = -1 + x + e^x$

$(\forall x \in \mathbb{R})$; $h''(x) = 1 - e^x$

Et on a : $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$

2) a) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$, $0 \leqslant h''(x) \leqslant x$

On a : $(\forall t \in \mathbb{R})$ $e^t \geqslant 1 + t$ (à vérifier)

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on a : $1 + (-x) \leqslant e^{-x} \Rightarrow 1 - x \leqslant e^{-x}$

$\Rightarrow 1 - e^{-x} \leqslant x$

et on a $-x \leqslant 0 \Leftrightarrow e^{-x} \leqslant 1$

$\Leftrightarrow 0 \leqslant 1 - e^{-x}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $0 \leqslant 1 - e^{-x} \leqslant x$

Ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $0 \leqslant h''(x) \leqslant x$

b) Déduction

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\varphi(x) = h'(x) - \frac{x^2}{2}$

La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $\varphi'(x) = h''(x)$ x

D'après la question 2) a) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $\varphi'(x) \leqslant 0$

d'où la fonction φ est décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$

Donc : $(\forall x \in [0; +\infty[)$; $\varphi(x) \leqslant \varphi(0)$, or $\varphi(0) = 0$

D'où : $(\forall x \in [0; +\infty[)$; $h'(x) \leqslant \frac{x^2}{2}$

Et on a d'après 2) a) $(\forall x \in [0; +\infty[)$; $1 \quad x \leqslant e^x$ c'est-à-dire $0 \leqslant h'(x)$

Donc : $(\forall x \in [0; +\infty[)$; $0 \leqslant h'(x) \leqslant \frac{x^2}{2}$

• On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\psi(x) = h(x) - \frac{x^3}{6}$

La fonction ψ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$; et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) \ ; \ \psi'(x) = h'(x) - \frac{x^2}{2}$$

d'après ce qui précède on a: $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $\psi'(x) \leqslant 0$

d'où la fonction ψ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$

Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $\psi(x) \leqslant \psi(0)$

Or : $\psi(0) = 0$ d'où : $(\forall x \in [0; +\infty[)$; $h(x) \leqslant \frac{x^3}{6}$

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $h'(x) \geqslant 0$

d'où la fonction h est croissante sur $\mathbb{R}^+$

par suite : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $h(x) \geqslant h(0)$ et $h(0) = 0$

d'où : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $h(x) \geqslant 0$

ainsi : $(\forall x \in [0; +\infty[)$; $0 \leqslant h(x) \leqslant \frac{x^3}{6}$

3) Montrons que la fonction f est dérivable à droite en 0

• Soit $x \in]0; +\infty[$; on a : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{e^{-x}}{x} - 1\right) = \frac{1 - e^{-x} - x}{x^2}$

et on a : $0 \leqslant h(x) \leqslant \frac{x^3}{6}$; d'où : $0 \leqslant 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} \leqslant \frac{x^3}{6}$

D'où : $\frac{x^2}{2} \leqslant 1 \quad x \quad e^{-x} \leqslant \frac{x^3}{6} \quad \frac{x^2}{2}$

Ainsi : $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{1 - x - e^{-x}}{x^2} \leqslant \frac{x}{6} - \frac{1}{2}$

Donc : $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leqslant \frac{x}{6}-\frac{1}{2}$ pour tout x de $]0;+\infty[$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{6}-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

alors : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\frac{1}{2}$

Donc la fonction f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -\frac{1}{2}$

Exercice 16

1) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[e;+\infty[$ et, on a :

$$(\forall x \in [e;+\infty[)\ ;\ f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

On a : $x > e \iff \ln(x) > 1$

$\iff 1-\ln(x) < 0$

Donc : $(\forall x \in [e;+\infty[)\ ;\ f'(x) \leqslant 0$

D'où la fonction f est strictement décroissante sur $[e;+\infty[$

ainsi la fonction f est continue et strictement décroissante sur $[e;+\infty[$

D'où f est une bijection de $[e;+\infty[$ vers J tel que :

$J = f([e;+\infty[) = \left]\lim\limits_{+\infty} f(x); f(e)\right] = \left]0;\frac{1}{e}\right]$ (car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$)

2) Soit a ; b et c des éléments de l'intervalle $[e;+\infty[$

Puisque f une bijection de $[e;+\infty[$ vers $\left]0;\frac{1}{e}\right]$

et f est strictement décroissante sur $[e;+\infty[$; on a :

$$\begin{aligned} b < c &\iff f(b) > f(c) \\ &\iff \frac{\ln(b)}{b} > \frac{\ln(c)}{c} \\ &\iff c\ln(b) > b\ln(c) \\ &\iff e^{c\ln(b)} > e^{b\ln(c)} \\ &\iff b^c > c^b \end{aligned}$$

Et puisque la fonction $x \longmapsto a^x$ est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$ car $a > 1$ alors $b^c > c^b \iff a^{b^c} > a^{c^b}$

Exercice 16

- Initialisation: Pour $n = 0$

L'inégalité proposée est vérifiée pour $n = 0$ car $\forall x > 0$, $e^x > 1$

- Héridité Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que: $e^x > \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

et montrons que $e^x > \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}$

On considère la fonction f déf nie par $f(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}$; $x \in \mathbb{R}^+$

On a : $f(0) - 0$ et $\forall x > 0$; $f'(x) = e^x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{kx^{k-1}}{k!} = e^x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$

$$= e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$; $f'(x) > 0$

alors f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

d'où $\forall x > 0$; $f(x) > f(0)$ ainsi : $e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} > 0$

donc : $e^x > \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}$

La propriété est vraie pour $n + 1$

D'après le principe de récurrence $(\forall n \in \mathbb{N})$: $e^x > \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ où $x>0$

Exercice 17

1) a) Calculons les limites aux bornes de $\mathbb{R}^*$;

• Calculons $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

On a : $\lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$; donc : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

• Calculons $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

On a : $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; donc : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• Calculons $\lim_{x \to 0^-} f(x)$

On a : $\lim_{x \to 0^-} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim_{x \to 0^-} e^x = 1$; donc : $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

• Calculons $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

On a : $\lim_{x \to 0^+} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim_{x \to 0^+} e^x = 1$; donc : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

b) Les branches infinies de la courbe (C_f)

• On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; donc la courbe (C_f) admet une asymptote d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$

• On a : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$; donc : la courbe (C_f) admet une asymptote d'équation: $x = 0$

• On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; donc la courbe (C_f) admet une branche infinie

• Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

Soit $x \in]0; +\infty[$; on a : $\dfrac{f(x)}{x} = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) \cdot \dfrac{e^x}{x}$

Puisque: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1$; alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

Donc: la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

2) a) La fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$; et on a :

$(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} e^x + \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) e^x = e^x \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} + 1\right) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2} \cdot e^x$

b) Tableau de variations :

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{2}$; d'où $f'(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$

Ainsi, le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
f	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

c) Équation de la tangente (T)

On a : $f(1) = 0$ et $f'(1) = e$; d'où l'equation de la tangente (T) est :

$$y = e(x-1) = ex - e$$

3) a) La fonction f est deux fois dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ (à vérifier)

Et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $\left(\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2}\right)' = \left(1 - \dfrac{1}{x} + x^{-2}\right)' = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{x-2}{x^3}$

Donc :

$$f''(x) = \left(\frac{x-2}{x^3}\right)e^x + \left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)e^x = e^x\left(\frac{x-2+x^3-x^2+x}{x^3}\right) = \left(\frac{x^3-x^2+2x-2}{x^3}\right)e^x$$

$$= \frac{(x^2(x-1)+2(x-1))}{x^3}e^x = \frac{(x-1)(x^2+2)}{x^3}e^x$$

b) Étude de la concavité de (C_f).

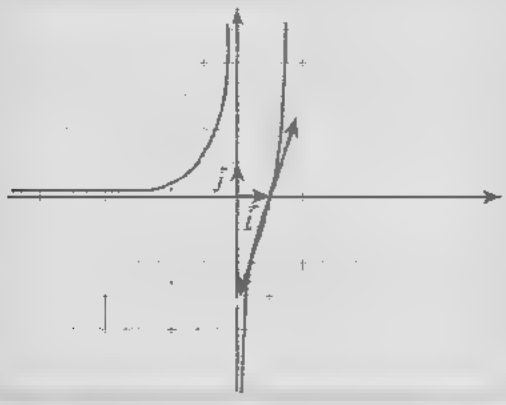
Le signe de $f''(x)$ est celui de $x(x-1)$

D'où le tableau de concavité de C_f est le suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$-$	0	$+$	
Concavité de (C)		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

4) Construction de la courbe de f

Le point $A(1;0)$ est un point d'inflexion



Partie A : $(\forall x \in \mathbb{R}),\ f(x) = \frac{1}{1+e^x} + \ln(1+e^x)$

1) Étude des variations de f

• Ensemble de définition $D = \mathbb{R}$

• Les limites :

On a $\lim\limits_{x \to -\infty}(1+e^x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty}\ln(X) = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{x \to -\infty}\ln(1+e^x) = +\infty$ et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{1}{1+e^x} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

On a : $\lim_{x \to -\infty} 1 + e^x = 1$ et la fonction ln est continue en 1

Donc : $\lim_{x \to -\infty} \ln(1 + e^x) = \ln(1) = 0$, et on a : $\lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{1 + e^x} = -1$

D'où : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$

• Fonction dérivée

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$; et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; \; f'(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} + \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + e^x(e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; \; f'(x) > 0$

D'où: la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Ainsi : le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	-1	↗	$+\infty$

2) a) Étudions la concavité de (C_f)

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; \; f''(x) = \frac{(2e^{2x} + 2e^x)(e^x + 1)^2 - (e^{2x} + 2e^x)(2)(e^x + 1)(e^x)}{(e^x + 1)^4}$$

$$= \frac{2e^x[(e^x + 1)^2 - (e^{2x} + 2e^x)]}{(e^x + 1)^3} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^3}(e^{2x} + 2e^x + 1 - e^{2x} - 2e^x)$$

$$= \frac{2e^x}{(e^x + 1)^3}$$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; \; f''(x) > 0$

D'où : la courbe (C_f) admet une concavité dirigée vers les ordonnées positives

((C_f) est convexe)

b) Vérifions que pour tout x de $\mathbb{R}$; $f(x) = \frac{-1}{e^x + 1} + x + \ln(1 + e^{-x})$

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a . $f(x) = \frac{-1}{e^x + 1} + \ln(e^x(e^{-x} + 1))$

$$= \frac{-1}{e^x + 1} + \ln e^x + \ln(e^{-x} + 1)$$

(car $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; e^x > 0$ et $e^{-x} + 1 > 0$)

$$= \frac{-1}{e^x + 1} + x + \ln(e^{-x} + 1)$$

c) Étudions les branches infinies de (C_f)

• On a : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$; donc la droite d'équation : $y = -1$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $-\infty$

• On a : $\lim_{x \to +\infty} (1 + e^{-x}) - 1$ et la fonction ln est continue en 1 ;

Donc $\lim_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$

Ainsi : $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{1 + e^{x}} + \ln(1 + e^{-x}) \right) = 0$

D'où la courbe (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$

3) a) Étudions les variations de h

• L'ensemble de définition de h est $\mathbb{R}$

• Les limites

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$ (d'après 2)c))

$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - x) = +\infty$

• Fonction dérivée

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ ; \ h'(x) = f'(x) - 1 = \frac{-1}{(1 + e^{x})^2}$$

Donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

• Tableau de variations :

Le tableau de variations de h est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$h(x)$		$-$	
h	$+\infty$	$\searrow$	0

b) Déterminons la position de courbe (C_f) avec la droite (Δ) : $y = x$

La fonction h est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$,

donc : $J = h(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \to +\infty} h(x) ; \lim_{x \to -\infty} h(x) \right[=]0 ; +\infty[$

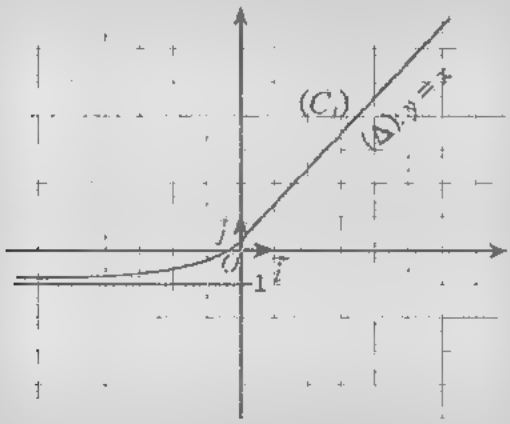
Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$; $h(x) > 0$, d'où : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) > x$

c'est-à-dire la courbe (C) est au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$

4) Constructions

La tangente au point d'abscisse 0 est : T . $y = f'(0)(x-0) + f(0)$;

c'est-à-dire : (T) : $y = \frac{3}{4}x + \ln(2) \quad \frac{1}{2}$



Partie B :

1) Vérifions que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g(x) = 1 + f(x)$

Soit $x \subset \mathbb{R}$; on a .

$$f(x) + 1 = 1 - \frac{1}{1+e^x} + \ln(1+e^x) = \frac{e^x}{1+e^x} + \ln(e^x+1) = g(x)$$

2) Déduction

a) Le tableau de variations de g

On a f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc g et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (car $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = g'(x)$)

Les limites

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (f(x) + 1) = \quad 1 + 1 = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (f(x) + 1) = +\infty$$

Tableau de variations de g

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
g	0	↗	$+\infty$

b) Concavité de (Γ)

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g''(x) = f''(x)$

Donc : (C) et (Γ) ont la même concavité

leurs concavités respectives sont dirigées vers les ordonnées positives

c) Branches infinies

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$, donc l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe (Γ) au voisinage de $-\infty$

Soit $x \in]0; +\infty[$; on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$ donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - x - 1) = 0$

Donc : la droite d'équation : $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe (Γ) au voisinage de $+\infty$

d) Construction de (Γ) (voir figure précédente)

Exercices de synthèse

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

I/ Soit g la fonction définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x - e^{-2x}$

1) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variations.

2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur I et que : $\frac{\ln 2}{2} < \alpha < 1$

b) Déduire le signe de $g(x)$.

II/ Soit f la fonction définie par $I =]0; +\infty[$ par : $f(x) = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$

1) a) Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et que :

$$(\forall x \in I); f'(x) = \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} g\left(\frac{1}{x}\right)$$

b) En déduire les variations de f.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) Montrer que : $(\forall x \in I); \ln(f(x)) = \frac{1}{x}(1 + x\ln x) + \frac{1}{2}\ln(1 - e^{-\frac{2}{x}})$

c) Déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; puis dresser le tableau de variations de f.

3) a) Montrer que : $(\forall t \in [0; 1]); 0 < e^t - 1 < e.t$

b) Montrer que : $(\forall x \in [0; 1]); 1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \frac{e}{2}x^2$

c) Déduire que : $(\forall x \in [2;+\infty[) ; 0 \leq (f(x))^2 - 2x \leq 2e$

4) Soit φ la fonction définie sur I par: $\varphi(x) = \sqrt{2x}$

a) Déterminer le signe de $f - \varphi$ sur l'intervalle $[2;+\infty[$ puis calculer $\lim\limits_{x \to +\infty}(f-\varphi)(x)$

b) Donner une interprétation géométrique à ce résultat.

5) Tracer la courbe de φ et de f dans le même repère.

(On admet que $\frac{1}{\alpha} \simeq 1,3$ et que : $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \simeq 2,5$)

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x^x ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) Étudier la continuité de f à droite en 0.

3) a) Vérifier que : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; \frac{f(x)-1}{x} = \frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}.\ln x$

b) En déduire la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat.

4) a) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; f'(x) = f(x)(1+\ln x)$

b) Déduire les variations de la fonction f.

5) Déterminer la branche infinie de la courbe (C).

6) Tracer la courbe (C).

Exercice 11

Partie A:

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{xe^x}{1+e^x} - \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$

1) Étudier les variations de la fonction g.

2) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} ; x \neq 0 \\ f(0) = \sqrt{e} \end{cases}$

et soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, puis interpréter les deux résultats.

2) a) Montrer que f est continue au point $x_0 = 0$.

b) Montrer que f est dérivable en 0.

3) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$; on a : $f'(x) = \frac{1}{x^2} f(x).g(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.

b) Construire la courbe (C_f).

Exercice 22

Partie 1:

On considère la fonction g définie sur $I = [0;1[\cup]1;+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln|x-1| + \frac{2x}{x-1}$$

et soit (C) la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

b) Déterminer les branches infinies de la courbe (C).

2) a) Dresser le tableau de variations de g, puis déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de I.

b) Étudier la concavité de la courbe (C) et préciser son point d'inflexion.

c) Tracer la courbe (C).

Partie 2:

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie pas :

$$\begin{cases} f(x) = |x^2-1|^{2x} ; x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

et (Γ) la courbe de f dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

b) Montrer que f est continue en 1.

c) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de D.

2) Déterminer les branches infinies de la courbe (Γ).

3) a) Montrer que : $(\forall x \in D-\{1\})\,;\, f'(x) - 2f(x) \times g(x^2)$

b) Déterminer le sens de variations de la fonction f sur D.

4) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{2x\ln|x-1|}}{x-1} = 0$; puis montrer que f est dérivable en 1.

b) Dresser le tableau de variations de f, puis tracer la courbe (Γ).

Exercice 33

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

1) Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$

2) Montrer que : $f\left(\left[\dfrac{1}{2};1\right]\right) \subset \left[\dfrac{1}{2};1\right]$

3) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis déduire que :

$$\left(\forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right]\right);\, 0 \le f'(x) \le k \text{ avec } k = \frac{\sqrt{e}}{(1+\sqrt{e})^2}$$

4) On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, \dfrac{1}{2} \le u_n \le 1$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, |u_n - \alpha| \le \dfrac{1}{2}\, k^n$ puis déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

Exercice 34

Soit n un entier naturel non nul, et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = 1 - \frac{2n}{x+n} - e^{-x}$$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $f_n(0)$.

2) Étudier les variations de f_n.

3) Calculer $f_n(n)$ puis déduire le signe de $f_n(n)$.

4) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\, e^{n+1} > 2n+1$

b) En déduire le signe de $f_n(n+1)$

c) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n

avec $n < \alpha_n < n+1$

d) La suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est-elle convergente?

Exercice 25

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$

On pose : $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

b) Déduire les variations de (u_n).

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente, et déterminer sa limite.

2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = e^{-S_n}$, puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 26

1) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x \geq 1 + x$

b) En déduire que : $(\forall t \in]-\infty ; 1[) ; e^t < \frac{1}{1-t}$

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 < e - u_n < \frac{e}{n}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 27

Partie A:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{4}}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) Étudier les variations de f, puis dresser son tableau de variations.

2) a) Donner l'équation de la tangente (Δ) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

b) Étudier la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ).

c) Construire la courbe (C).

Partie B:

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = e^x - x - \frac{5}{4}$

1) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}^+$.

2) Montrer que : $\left(\forall x \in \left[\frac{3}{4}; +\infty\right[\right); e^x > x + \frac{5}{4}$

Partie C:

On considère les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par .

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \begin{cases} u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \\ v_n = u_n + 2e^{-\frac{n^2}{4}} \end{cases}$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_{n+1} - v_n = 2\left(\frac{n+3}{2} - e^{\frac{2n+1}{4}}\right)e^{-\frac{(n+1)^2}{4}}$

2) Déduire en utilisant **la partie B** que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_{n+1} - v_n < 0$

3) Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes, et soit ℓ leur limite commune.

4) Montrer que : $|u_7 - \ell| < 10^{-4}$ (c'est-à-dire : u_7 est une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près).

Exercice 28

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - 2$ et (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β tels que : $1 < \alpha < 2$ et $-2 < \beta < -1$

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n \in [-2; -1]$

b) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

3) a) Montrer que : $(\forall x \in [-2; -1]); |f'(x)| \leq e^{-1}$

b) En déduire que : $(\forall x \in [-2; -1]); |f(x) - \beta| \leq \frac{1}{e}|x - \beta|$

4) a) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \beta| \leq \beta\left(\frac{1}{e}\right)^n$

b) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 29

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $]0;+\infty[$ par : $f_n(x)=\frac{e^x-1}{x}+n\ln(x)$, et soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

2) Étudier les branches infinies de (C_n).

3) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;1+(x-1)e^x\geq 0$

b) Déterminer les variations de f_n et dresser son tableau de variations.

4) Étudier la position relative de (C_n) et (C_{n+1}).

5) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe B dont on donnera les coordonnées.

6) a) Montrer qu'il existe un unique réel α_1 de l'intervalle $[0,2;0,9]$ tel que : $f_1(\alpha_1)=0$

b) Montrer que : $(\forall n\in(\mathbb{N}^*-\{1\}))\,;f_n(\alpha_1)<0$

c) Montrer que : $(\forall n\in(\mathbb{N}^*-\{1\}));(\exists!\alpha_n\in[\alpha_1;1])\,;f_n(\alpha_n)=0$

7) a) Montrer que : $(\forall x\in]0;1])\,;\frac{e^x-1}{x}\leq e-1$

b) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\,;\ln(\alpha_n)\geq\frac{1-e}{n}$

c) Déduire la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$

8) Tracer dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ les courbes (C) et (C_2).

Exercice 30

Partie 1;

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=1-x^3e^{-x}$

et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Étudier les branches infinies de la courbe (C).

2) Étudier les variations de f.

3) Montrer que l'équation : $f(x)=0$ admet deux solutions α et β, telles que $1<\alpha<3<\beta$

4) Tracer la courbe (C) ; (on prend $\alpha\simeq 1,9$ et $\beta\simeq 4,5$)

Partie 2:

Soit n un entier naturel tel que : $n \geqslant 4$

et soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}$

1) Dresser le tableau de variations de la fonction f_n suivant la parité de n.

2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions u_n et v_n.

telles que $1 < u_n < n < v_n$

3) a) Montrer $(\forall n \geqslant 5)$; $f_n(u_{n-1}) = (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}} (1 - u_{n-1})$

b) En déduire que $(\forall n \geq 5)$; $f_n(u_{n-1}) < 0$

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 4}$ est décroissante et qu'elle est convergente.

4) On pose $u = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

a) Montrer que $(\forall n \geqslant 4)$; $1 - u^n e^{-u} \geqslant 0$

b) On suppose que $u > 1$, calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - u^n e^{-u}$

c) Déduire la valeur de u.

Exercice 11

Partie A: On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x+2)e^{-\frac{2}{x}} ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité $2cm$)

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

c) Montrer que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que $(\forall t \geqslant 0)$; $0 \leqslant e^{-t} + t - 1 \leqslant \frac{t^2}{2}$

c) En déduire que : $(\forall x > 0)$; $-\frac{4}{x} \leqslant f(x) - x \leqslant \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$

d- En déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (Δ) dont on donnera une équation

3) Tracer (C_f) et (Δ)

Partie B: Soit n un entier naturel non nul

On considère la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x + \frac{2}{n})e^{-\frac{2}{x}} ; x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0.

2) Étudier les variations de la fonction f_n sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

3) a) Montrer que : Pour tout n de $\mathbb{N}^*$; l'équation $f_n(x) = \frac{2}{n}$ admet une seule solution a_n sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

b) Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$

c) En déduire que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante puis montrer qu'elle est convergente.

On pose $a = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$

d) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; na_n = 2e^{\frac{2}{a_n}} - 2$.

e) Montrer que $a = 0$

Exercice 15

Soit n un entier naturel non nul et différent de 1.

On considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f_n(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - n}{x}$

et soit (Γ_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- Calculer les limites de la fonction f_n aux bornes de $\mathbb{R}^*$

2- Soit c_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $c_n(x) = n - \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$

a) Dresser le tableau de variations de c_n

b) Montrer que : $(\exists! x_n \in]0, +\infty[) ; c_n(x_n) = 0$

c) Déterminer le signe de $c_n(x)$ sur $\mathbb{R}^*$

3) a) Dresser le tableau de variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}^*$

b) Montrer que : $f_n(x_n) < 0$ et déduire que : $(\exists! \alpha_n \in]0, x_n[) ; f_n(\alpha_n) = 0$

4) a) Montrer que : $x_n = \frac{1}{\ln\left(\frac{nx_n}{1 + x_n}\right)}$.

b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est décroissante qu'elle est convergente

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$

5) Déterminer la position relative des courbes (Γ_2) et (Γ_3).

Exercice 19

I/ 1) Étudions les variations de g sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$.

La fonction g est dérivable sur l'intervalle I comme somme de deux fonctions dérivables sur I $(x \mapsto 1 - x$ et $x \mapsto -e^{-2x})$

Et on a : $(\forall x \in]0; +\infty[); g'(x) = -1 + 2e^{-2x}$

Soit $x \in I$ • $g'(x) = 0 \iff e^{-2x} = \frac{1}{2}$ $\iff x = \frac{\ln 2}{2}$ • $g'(x) > 0 \iff e^{-2x} > \frac{1}{2}$ $\iff x < \frac{\ln 2}{2}$

D'où le tableau de variations de g est le suivant:

x	0		$\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
g	‖	↗	$\frac{1-\ln 2}{2}$	↘	$-\infty$

On a: • $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

2) a) Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur I :

• Sur l'intervalle $\left]0; \frac{\ln 2}{2}\right]$, la fonction g est continue et strictement croissante, donc elle réalise une bijection de $\left]0; \frac{\ln 2}{2}\right]$ vers $\left]0; \frac{1-\ln 2}{2}\right]$

Donc : $\left(\forall x \in \left]0; \frac{\ln 2}{2}\right]\right); g(x) > 0$

Ainsi : l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur $\left]0; \frac{\ln 2}{2}\right]$.

• Sur l'intervalle $\left]\frac{\ln 2}{2}; +\infty\right[$, la fonction g est cont nue et strictement décroissante, donc g réalise une bijection de $\left]\frac{\ln 2}{2}; +\infty\right[$ vers $\left]-\infty; \frac{1-\ln 2}{2}\right[$

et puisque : $0 \in \left]-\infty; \frac{1-\ln 2}{2}\right[$; donc l'équation : $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in \left]\frac{\ln 2}{2}; +\infty\right[$

• Montrons que : $\frac{\ln 2}{2} < \alpha < 1$

On a : $g(1) = -e^{-2}$ et $g\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = \frac{1-\ln 2}{2}$

Donc : $g(1) \times g\left(\frac{\ln 2}{2}\right) < 0$ ainsi : $\frac{\ln 2}{2} < \alpha < 1$

b) Déduisons le signe de $g(x)$ sur l'intervalle I :

On a la fonction g est strictement décroissante sur $\left[\frac{\ln 2}{2}; +\infty\right[$

• Si $\frac{\ln 2}{2} < x < \alpha$ alors : $g(x) > g(\alpha)$

d'où : $g(x) > 0$ (car $g(\alpha) = 0$)

• Si $x > \alpha$ alors : $g(x) < g(\alpha)$

d'où : $g(x) < 0$

D'où le tableau de signe de g est le suivant :

x	0		α	$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$

II/ 1) a) Montrons que f est dérivable sur I :

• La fonction $u : x \mapsto \frac{2}{x}$ est dérivable sur I, donc : $x \mapsto e^{\frac{2}{x}}$ est dérivable sur I.

• La fonction $x \mapsto e^{\frac{2}{x}} \quad 1$ est continue sur I et strictement positive sur l'intervalle I.

donc la fonction : $x \xrightarrow{h} \sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$ est dérivable sur I. Et puisque $w : x \mapsto x$ est dérivable sur l'intervalle I alors : $f = w.h$ est dérivable sur I.

Soit $x \in I$; calculons $f'(x)$

$$f'(x) = \sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1} + x. \frac{-\frac{2}{x^2} e^{\frac{2}{x}}}{2\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} - \frac{e^{\frac{2}{x}} \quad 1 \quad \frac{1}{x} e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} - \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}}\left(1 - e^{\frac{2}{x}} - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} . g\left(\frac{1}{x}\right)$$

b) Déduisons les variations de f :

On a : $(\forall x \in I)$; $\frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est le même signe de $g\left(\frac{1}{x}\right)$ d'après la question 2)b)

• $g\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \iff 0 < \frac{1}{x} < \alpha$

$\iff x > \frac{1}{\alpha}$

• $g\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \iff x = \frac{1}{\alpha}$

Donc f est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{a};+\infty\right[$ et strictement décroissante sur $\left]0;\frac{1}{a}\right]$.

2) a) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

Soit $x\in]0;+\infty[$; on a : $f(x)=x\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}=\sqrt{\dfrac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\frac{2}{x}}}.2x$

• On pose : $\frac{2}{x}=X$; d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{e^{X}-1}{X}=1$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\frac{2}{x}}\times 2x=+\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b) Montrer que : $(\forall x\in I);\ln(f(x))=\frac{1}{x}(1+x\ln x)+\frac{1}{2}\ln(1-e^{-\frac{2}{x}})$

Soit $x\in I$; on a :

$$\begin{aligned}\ln(f(x)) &= \ln\left(x\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}\right)\\ &= \ln x+\frac{1}{2}\ln(e^{\frac{2}{x}}-1) \quad \text{(car } x>0 \text{ et } e^{\frac{2}{x}}-1>0 \text{ pour tout } x \text{ de } I\text{)}\\ &= \ln x+\frac{1}{2}\ln[e^{\frac{2}{x}}(1-e^{-\frac{2}{x}})]\\ &= \ln x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln(1-e^{-\frac{2}{x}}) \quad \text{(car } e^{\frac{2}{x}}-1>0 \text{ et } e^{\frac{2}{x}}>0 \text{ donc } 1-e^{-\frac{2}{x}}>0\text{)}\end{aligned}$$

Donc : $(\forall x\in I);\ln(f(x))=\frac{1}{x}(1+x\ln x)+\frac{1}{2}\ln(1-e^{-\frac{2}{x}})$

d) Déduisons $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$:

Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(f(x))$:

• On a : $\lim\limits_{x\to 0}(1+x\ln x)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}(1+x\ln x)\right)=+\infty$

• On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}-\frac{2}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0$; donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{-\frac{2}{x}}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2}\ln(1-e^{-\frac{2}{x}})=0$

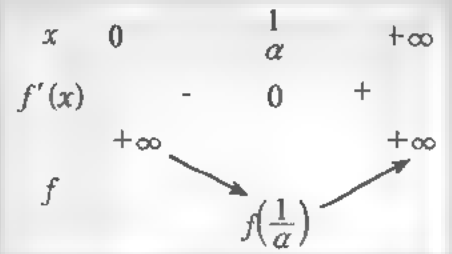
Par suite : $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(f(x))=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ (car $f(x)=e^{\ln(f(x))}$)

Le tableau de variations de f :

D'après les questions II/1)b) et 2)a) et c)

On a : le tableau de variations de f est le suivant :



3) a) Montrons que : $(\forall t \in [0;1]) ; 0 \leq e^t - 1 \leq e.t$

Soit $t \in [0;1]$; on a : $t \geq 0$ donc : $e^t - 1 \geq 0$ (1)

On pose : $(\forall t \in [0;1]) ; h(t) = e^t - 1 - et$

• $(\forall t \in [0;1]) ; h'(t) = e^t - e$

• $0 \leq t \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq e^t \leq e$
$\Leftrightarrow h'(t) \leq 0$

Donc la fonction h est décroissante sur $[0;1]$

Ainsi $(\forall t \in [0;1]) ; h(t) \leq h(0)$; et donc : $h(t) \leq 0$ (2) (car $h(0) = 0$)

d'après (1) et (2) on en déduit que : $(\forall t \in [0;1]) ; 0 \leq e^t - 1 \leq e.t$

b) Deduisons que : $(\forall x \in [0;1]) ; 1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \frac{e}{2}x^2$

• Montrons que : $(\forall x \in [0;1]) , e^x \leq 1 + x + \frac{e}{2}x^2$ (3)

On pose : $(\forall x \in [0;1]) ; k(x) = e^x - 1 - x - \frac{e}{2}x^2$

La fonction k est dérivable sur $[0;1]$ et on a :

$$(\forall x \in [0;1]) ; k'(x) = e^x - 1 - ex$$

Donc : $(\forall x \in [0;1]) ; k'(x) \leq 0$ d'après la question 3)a)

Ainsi k est décroissante sur $[0;1]$; d'où $((\forall x \in [0;1]) ; k(x) \leq k(0))$

Par suite : $(\forall x \in [0;1]) ; k(x) \leq 0$ (car $k(0) = 0$)

Donc : $(\forall x \in [0;1]) ; e^x \leq 1 + x + \frac{e}{2}x^2$

On démontre de même que : $(\forall x \in [0;1]) ; 1 + x \leq e^x$ (4)

d'après (3) et (4) on a : $(\forall x \in [0;1]) ; 1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \frac{e}{2}x^2$

c) Déduisons que : $(\forall x \in [0;1]) ; 0 \leq (f(x))^2 - 2x \leq 2e$

On a d'après la question b)

$(\forall t \in [0;1]) ; 1+t < e^t < 1+t+\frac{e}{2}t^2$

Soit x un élément de $[2;+\infty[$, on a : $x \geq 2$, donc : $0 \leq \frac{2}{x} \leq 1$

On peut remplacer $\frac{2}{x}$ par t dans la relation précédente

on obtient : $1+\frac{2}{x} \leq e^{\frac{2}{x}} \leq 1+\frac{2}{x}+\frac{e}{2}\cdot\frac{4}{x^2}$ d'où : $2x \leq x^2(e^{\frac{2}{x}}-1) \leq 2x+2e$

par suite : $0 < (f(x))^2 - 2x < 2e$ pour tout x de $[2;+\infty[$

4) a) Déduisons le signe de $f-\varphi$ sur l'intervalle $[2;+\infty[$:

Sur l'intervalle $[2,+\infty[$, on a : $0 \leq (f(x))^2 \quad (\varphi(x))^2$, d'après la question précédente donc $(f(x))^2 \geq (\varphi(x))^2$

et puisque f et φ sont positives; alors : $(\forall x \in [2;+\infty[) ; f(x) \geq \varphi(x)$

• Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(f-\varphi)(x)$:

On a d'après II)3)c) $(\forall x \in [2;+\infty[) ; 0 \leq (f(x) - \varphi(x))(f(x)+\varphi(x)) < 2e$

et puisque : $(\forall x \in [2;+\infty[) ; f(x)+\varphi(x) > 0$

alors : $(\forall x \in [2;+\infty[) ; 0 \leq f(x)-\varphi(x) \leq \frac{2e}{f(x)+\varphi(x)}$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+\varphi(x)) = +\infty$

d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2e}{f(x)+\varphi(x)} = 0$

D'après les propriétés des limites et l'ordre : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\varphi(x)) = 0$

b) Interprétation géométrique :

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\varphi(x)) = 0$ donc la courbe de f s'approche de la courbe de φ au voisinage de $+\infty$.

On dit que la courbe de φ est une courbe asymptotique de celle de la courbe de f.

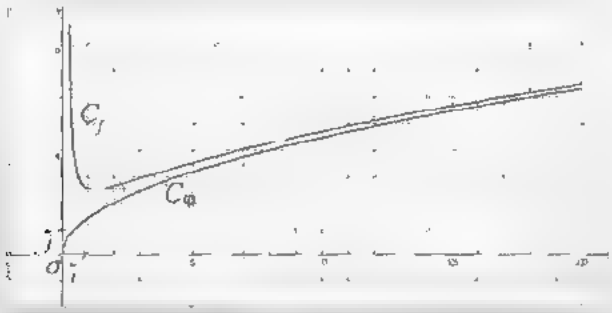
5) Le tracé de la courbe de f et de φ :

• On a l'axe des ordonnées est une asymptote de la courbe de f.

• La courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisse au voisinage de $+\infty$. (car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1} = 0$)

• La fonct on $\varphi: x \mapsto \sqrt{2x}$ est une fonction usuelle.

d'où les courbes de φ et f.



Exercice 20

1) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

On a : $(\forall x > 0); x^x = e^{x\ln x}$; d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln x}$

On pose : $X = x\ln x$; puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$

2) Étudions la continuité de f à droite en 0:

On a : $f(0) = 1$; calculons $\lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln x}$:

On pose : $X = x\ln x$, puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = \lim\limits_{X\to 0} e^X = e^0 = 1$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$; donc f est continue à droite en 0.

3) a) Vérifions l'égalité demandée :

Soit $x \in]0; +\infty[$; on a : $\dfrac{f(x)-1}{x} = \dfrac{e^{x\ln x}-1}{x} = \dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\cdot\dfrac{x\ln x}{x} = \dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\cdot\ln x$

b) Étudions la dérivabilité de f à droite en 0:

Soit $x \in]0; +\infty[$; on a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)-1}{x} = \dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\cdot\ln x$

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$; donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{x\ln x}}{x\ln x}\dfrac{1}{} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{e^X}{X}\dfrac{1}{} = 1$

et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\cdot\ln x = -\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}\dfrac{-f(0)}{0} = -\infty$

Donc : f n'est pas dérivable à droite en 0.

Interprétation géométrique :

La courbe de la fonction f admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées (verticale) au point $A(0;1)$.

4) a) Calculons $f'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$:

Soit $x \in]0;+\infty[$; on a : $f(x) = e^{x\ln x}$

La fonction $u : x \mapsto x\ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

donc la fonction $f = \exp ou$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

et on a : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$

on a : $u'(x) = \ln x + x.\frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

d'où : $f'(x) = (\ln x + 1)e^{x\ln x} = (\ln x + 1)f(x)$

ainsi : $(\forall x > 0)\ ; f'(x) = (\ln x + 1).\ f(x)$

Puisque : $(\forall x > 0)\ ;\ f(x) > 0$, alors le signe de $f'(x)$ est celui de $\ln(x) + 1$

- $f'(x) = 0 \iff 1 + \ln x = 0$
  $\iff \ln x = -1$
  $\iff x = e^{-1} = \frac{1}{e}$
- $f'(x) > 0 \iff 1 + \ln x > 0$
  $\iff \ln x > -1$
  $\iff x > e^{-1}$
  $\iff x > \frac{1}{e}$

Ainsi le tableau de variations de f est le suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
f	1	↘	$e^{-\frac{1}{e}}$	↗	$+\infty$

5) Déterminons la branche infinie de (C)

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$:

Soit $x \in]0;+\infty[$; $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^{x\ln x}}{x} = \frac{e^{x\ln x}}{x\ln x}.\ln x$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x\ln x}}{x\ln x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ (avec $X = x\ln x$

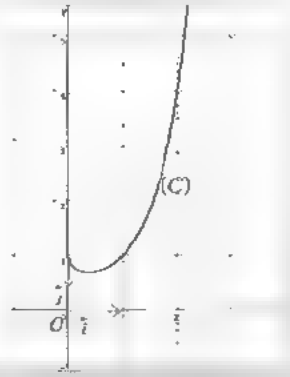
et $x \to +\infty \iff X \to +\infty$)

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Ainsi : la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

6) Le tracé de (C) :

On a: $\frac{1}{e} \simeq 0,4$ et $e^{-\frac{1}{e}} \simeq 0,7$



Exercice 21

Partie A:

1) Étudions les variations de la fonction g ; où $g(x) = \frac{xe^x}{1+e^x} - \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right); x \in \mathbb{R}$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$g'(x) = \frac{(1+e^x)(e^x + xe^x) - xe^{2x}}{(1+e^x)^2} - \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$= \frac{e^x + xe^x + e^{2x} + xe^{2x} - xe^{2x} - e^x - e^{2x}}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}$$

Ainsi : le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$ est celui de x.

Donc la fonction g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

2) Le signe de la fonction g :

- La fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$;

ainsi : $(\forall x \in]-\infty,0]) ; g(x) \geq g(0)$

Or : $g(0) = 0$; donc , $(\forall x \in]-\infty;0]) ; g(x) \geq 0$

- La fonction g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$;

donc : $(\forall x \in [0;+\infty[) ; g(x) \geq g(0)$

D'où : $(\forall x \in [0;+\infty[) ; g(x) \geq 0$

En résumé : pour tout x de $\mathbb{R}$; • $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^*$

Partie B:

1) Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

Soit $x \in [0;+\infty[$; on a : $f(x) = \left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}$

• Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$:

On a :

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x(e^{-x}+1)}{2}\right) = \frac{1}{x}\left(x + \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right)\right) = 1 + \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right)$$

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}$ et la fonction ln est continue en $\frac{1}{2}$; alors :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

De plus : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right) = 0$

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right) = 1$; et la fonction exponentielle néperienne

est continue en 1; Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e^1 = e$

• Calculons de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$:

Soit $x \in]-\infty;0[$, on a : $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}$

Puisque : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1+e^x}{2} = \frac{1}{2}$ et la fonction ln est continue en $\frac{1}{2}$;

alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$;

et on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$; d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) = 0$

Et la fonction exponentielle néperienne est continue en 0;

d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = e^0 = 1$

Interprétation géométrique :

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e$; donc la droite d'équation : $y = e$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, donc la droite d'équation : $y = 1$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

2) a) Montrons que la fonction f est continue en $x_0 = 0$:

Soit x un réel non nul; on a : $\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) - \frac{\ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right)}{\frac{1+e^x}{2}-1} \times \frac{1}{2} \times \frac{e^x-1}{x}$

En posant $t = \frac{1+e^x}{2}$; on a : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}{\frac{1+e^x}{2}-1} = \lim\limits_{t\to 1} \frac{\ln(t)}{t-1} = 1$

et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$; donc; par produit on a : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) = \frac{1}{2}$ *

Et puisque la fonction exponentielle est continue en $\frac{1}{2}$;

on a alors : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} = f(0)$

Par conséquent : f est continue en $x_0 = 0$.

b) Montrons que f est dérivable en 0:

Soit $x \in \mathbb{R}^*$; on a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)} - e^{\frac{1}{2}}}{x} = e^{\frac{1}{2}} \times \frac{e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)-\frac{1}{2}} - 1}{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)-\frac{1}{2}} \times \frac{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)-\frac{1}{2}}{x}$$

On pose : $t = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) - \frac{1}{2}$, on a $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$ (d'après «*» de la question 2)a))

d'où : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)-\frac{1}{2}} - 1}{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)-\frac{1}{2}} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$

Et on a : $\frac{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)-\frac{1}{2}}{x} = \frac{2\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)-x}{2x^2} = \frac{\ln\left(\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2\right)-\ln(e^x)}{2x^2}$

$$= \frac{\ln(e^x - e^{-x} + 2) - \ln 4}{2x^2}$$

$$= \left(\frac{\ln(e^x - e^{-x} + 2) - \ln 4}{(e^x - e^{-x} + 2) - 4}\right) \times \left(\frac{e^x + e^{-x} - 2}{2x^2}\right)$$

On pose : $t = e^x + e^{-x} + 2$; on a alors : $x \to 0 \iff t \to 4$

D'où : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(e^x + e^{-x} + 2) - \ln(4)}{(e^x + e^{-x} + 2) - 4} = \lim\limits_{t \to 4} \dfrac{\ln(t) - \ln(4)}{t - 4} = (\ln)'(4) = \dfrac{1}{4}$

On a : $\dfrac{(e^x + e^{-x} - 2)}{2x^2} = \dfrac{e^{-x}(e^{2x} - 2e^x + 1)}{2x^2} = \dfrac{e^{-x}(e^x - 1)^2}{2x^2} = \dfrac{e^{-x}}{2}\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)^2$

Puisque : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x}}{2} = \dfrac{1}{2}$; d'où : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$

alors : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sqrt{e} \times 1 \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{e}}{8}$

Donc : la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{\sqrt{e}}{8}$

3) a) Déterminons la fonction dérivée :

La fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$, et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} \times \ln\left(\frac{1 + e^x}{2}\right) + \frac{1}{x} \times \frac{e^x}{1 + e^x}\right) \times f(x)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{xe^x}{1 + e^x} - \ln\left(\frac{1 + e^x}{2}\right)\right) \times f(x)$$

$$= \frac{1}{x^2} g(x) \times f(x)$$

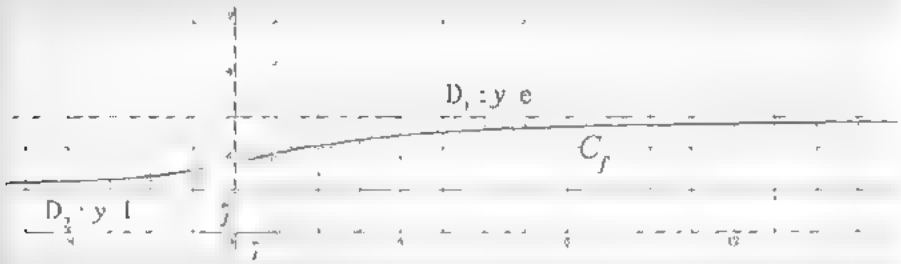
• Tableau de variations de f :

Pour tout x de $\mathbb{R}^*$; on a : $g(x) > 0$ et $f(x) > 0$; d'où : $f'(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

Ainsi le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	1	↗	e

b) La courbe (C_f)



Partie 1:

1) a) • Calculons $\lim_{x\to+\infty} g(x)$:

On a : $\lim_{+\infty}|x-1| = \lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty}\ln(X) = +\infty$;

d'où : $\lim_{x\to+\infty}\ln|x-1| = +\infty$

et on a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2 = 2$;

donc : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\ln|x-1| + \frac{2x}{x-1} = +\infty$

• Calculons $\lim_{x\to1^+} g(x)$:

Soit $x \in]1;+\infty[$; on a : $x-1>0$; d'où : $g(x) = \frac{(x-1)\ln(x-1)+2x}{x-1}$

On pose : $x-1=t$; on a alors : $\lim_{x\to1^+}(x-1)\ln(x-1) = \lim_{t\to0} t\ln(t) = 0$

Donc : $\lim_{x\to1^+}(x-1)\ln(x-1)+2x = 2$, et puisque : $\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1} = +\infty$

on a alors : $\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)\ln(x-1)+2x}{x-1} = +\infty$; ainsi : $\lim_{x\to1} g(x) = +\infty$

• Calculons $\lim_{x\to1} g(x)$:

On a : $\lim|x-1| = 0^+$ et $\lim_{x\to0}\ln(X) = -\infty$; d'où : $\lim_{x\to1}\ln|x-1| = -\infty$

et on a : $\lim_{x\to1}\frac{2x}{x-1} = -\infty$; donc : $\lim_{x\to1}\ln|x-1| + \frac{2x}{x-1} = -\infty$

b) Déterminons les branches infinies de la courbe (C) :

On a : $\lim_{x\to1} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x} g(x) = -\infty$, donc la courbe (C) admet une asymptote d'équation : $x=1$.

et on a : $\lim g(x) = +\infty$, donc (C) admet une branche infinie au voisinage de $+\infty$.

Soit $x \in]1;+\infty[$; on a : $x-1>0$

donc : $\frac{g(x)}{x} = \frac{\ln(x-1)}{x} + \frac{2}{x-1} = \frac{\ln(x-1)}{x-1}\times\frac{x-1}{x} + \frac{2}{x-1}$

On pose : $t = x-1$; on a : $x\to+\infty \iff t\to+\infty$

et $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)}{x-1} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t} = 0$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x-1}=0$; donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=0$

Par suite la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

2) Calcul de $g'(x)$:

La fonction g est dérivable en tout point de I ; et on a :

$$(\forall x\in I)\,;\,g'(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^2}=\frac{x-3}{(x-1)^2}$$

• Tableau de variations de g :

Le signe de $g'(x)$ sur I est celui de $x-3$; d'où le tableau de variations de g est le suivant :

x	0		1		3		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
g	0	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	$3+\ln 2$	↗	$+\infty$

• Le signe de g :

- La fonction g est strictement décroissante sur $[0;1[$

donc : $\forall x\in[0;1[\,;\,g(x)\le g(0)$

ainsi : $\forall x\in[0;1[\,;\,g(x)\le 0$

- La fonction g est strictement décroissante sur $]1;3]$

donc : $\forall x\in]1;3]\,;\,g(x)\ge g(3)$

et puisque $g(3)>0$, alors : $\forall x\in]1;3]\,;\,g(x)>0$

- La fonction g est strictement croissante sur $[3;+\infty[$

donc : $(\forall x\in[3;+\infty[)\,;\,g(x)>g(3)$; d'où : $g(x)>0$ pour tout x de $[3;+\infty[$

ainsi le tableau de signe de g est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
signe de $g(x)$	‖	$-$	‖	$+$	

b) Concavité de la courbe (C) :

La fonction g est deux fois dérivable en tout point de I ; et on a :

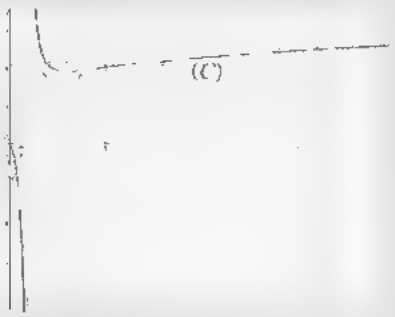
$$(\forall x \in I) ; g''(x) = \frac{-x^2 + 6x - 5}{(x-1)^4} = \frac{-(x-5)(x-1)}{(x-1)^4}$$

Donc on a le tableau suivant :

x	0		1		5	$+\infty$
$g''(x)$		-	‖	+	0	-
Concavité de la courbe de g		∩	‖	∪		∩

La fonction g'' s'annule en changeant de signe en 5; donc le point d'abscisse 5 et d'ordonnée $\frac{5}{2} + \ln(4)$ est le point d'inflexion pour (C).

c) La courbe (C) :



Partie 2:

1) a) Déterminons D :

Soit $x \in \mathbb{R}$; $x \in D \iff |x^2 - 1| > 0$ ou $x = 1$

$\iff |x^2 - 1| \neq 0$ ou $x = 1$

$\iff (x \neq 1$ et $x \neq -1)$ ou $x = 1$

$\iff x \neq -1$

Ainsi : $D =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

b) Continuité de f en 1:

On a : $\lim\limits_{x \to 1} |x^2 - 1| = 0^+$ et $\lim\limits_{X \to 0^+} \ln(X) = -\infty$; donc : $\lim\limits_{x \to 1} \ln|x^2 - 1| = -\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x \to 1} 2x \ln|x^2 - 1| = -\infty$, et puisque : $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$,

Alors : $\lim\limits_{x \to 1} e^{2x \ln|x^2+1|} = 0$

D'où : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} e^{2x \ln|x^2-1|} = 0 = f(1)$

Donc : f est continue en 1.

c) Calculons $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

Puisque : $\lim_{x\to+\infty} |x^2-1| = \lim_{x\to+\infty}(x^2-1) = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$;

Donc : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x\ln|x^2-1|} = +\infty$

• Calculons $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

Puisque : $\lim_{x\to-\infty} |x^2-1| = \lim_{x\to-\infty}(x^2-1) = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$;

Alors : $\lim_{x\to-\infty} \ln|x^2-1| = +\infty$

D'où : $\lim_{x\to-\infty} 2x\ln|x^2-1| = -\infty$, et on a : $\lim_{X\to-\infty} e^X = 0$;

Donc : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{2x\ln|x^2-1|} = 0$

• Calculons $\lim_{x\to-1} f(x)$:

Puisque : $\lim_{x\to-1} |x^2-1| = 0^+$ et $\lim_{X\to0} \ln(X) = -\infty$, alors : $\lim_{x\to-1} \ln|x^2-1| = -\infty$

Ainsi : $\lim_{x\to-1} 2x\ln|x^2-1| = +\infty$; et on a : $\lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$;

Donc : $\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} e^{2x\ln|x^2-1|} = +\infty$

2) Déterminons les branches infinies de la courbe (Γ) :

• On a : $\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$, donc : la courbe (Γ) admet une asymptote d'équation : $x = -1$

• On a : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation : $y = 0$ est une asymptote à la courbe (Γ) au voisinage de $-\infty$

• On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc (Γ) admet une branche infinie au voisinage de $+\infty$.

Calculons $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$:

Soit $x \in]1;+\infty[$; on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^{2x\ln(x^2-1)}}{x} = \frac{e^{2x\ln(x^2-1)}}{2x\ln(x^2-1)} \times 2\ln(x^2-1)$

Posons $2x\ln(x^2-1) = t$; on a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x\ln(x^2-1)}}{2x\ln(x^2-1)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$

et on a : $\lim_{x \to +\infty} \ln(x^2-1) = +\infty$

d'où, par produit : $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$; ainsi la courbe (Γ) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

3) a) Montrons que : $(\forall x \in D - \{1\})\ ; f'(x) = 2f(x) \times g(x^2)$

Soit $x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$; posons $u(x) = 2x \times \ln|x^2-1|$

On a : $u'(x) \quad 2\ln|x^2-1| + 2x\frac{2x}{x^2} \quad 2\ln|x^2-1| + \frac{4x^2}{x^2} = 2g(x^2)$

Ainsi : $f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = u'(x)f(x) = 2g(x^2)f(x)$

Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1;1\})\ ; f'(x) = 2g(x^2)f(x)$

b) Déterminons le signe de f' :

On a : $(\forall x \in D)\ ; f(x) > 0$; ainsi le signe de $f'(x)$ sur $D - \{-1;1\}$ est le signe de $g(x^2)$;

et d'après le signe de g déterminé dans la partie I ; on a :

• si $-1 < x < 1$, alors : $0 \leq x^2 < 1$; d'où : $g(x^2) \leq 0$, donc : $f'(x) \leq 0$, pour tout x de $]-1;1[$

• si $x > 1$ ou $x < -1$, alors : $x^2 > 1$, ainsi : $g(x^2) > 0$

donc : $(\forall x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[)\ ; f'(x) > 0$

Conclusion : f est strictement décroissante sur $]-1;1[$ et strictement croissante sur les deux intervalles $[1;+\infty[$ et $]-\infty;-1[$

4) a) Soit $x \in]1;+\infty[$:

On a : $\frac{e^{2x\ln(x-1)}}{x} \quad 1 = \frac{e^{2x\ln(x-1)}}{e^{\ln(x-1)}} = e^{2x\ln(x-1)-\ln(x-1)} = e^{x\ln(x-1)+(x-1)\ln(x-1)}$

On pose : $t = x-1$; donc : $\lim_{x \to 1^+}(x-1)\ln(x-1) = \lim_{t \to 0^+} t\ln t = 0$

Et on a : $\lim_{x \to 1} x\ln(x-1) = -\infty$

Donc : $\lim_{x \to 1^+} x\ln(x-1) + (x-1)\ln(x-1) = -\infty$

Et puisque : $\lim e^{\quad} \quad 0$, alors : $\lim \frac{2x\ln|x-1|}{x-1} \quad 0$

et $\lim_{x \to 1} x\ln(1-x) = -\infty$; d'où : $\lim_{x \to 1} e^{x\ln(x-1)-(1-x)\ln(1-x)} = 0$

Soit $x \in]0;1[$; on a : $\frac{e^{2x\ln(x-1)}}{x-1} = \frac{e^{2x\ln(1-x)}}{-e^{\ln(1-x)}} = -e^{2x\ln(1-x)+\ln(1-x)}$

$= -e^{x\ln(1-x)-(1-x)\ln(1-x)}$

On a : $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\ln(1-x) = \lim_{t\to 0^+} t\ln t = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} x\ln(1-x) = +\infty$

Donc : $\lim_{x\to 1} e^{x\ln(1-x)-(1-x)\ln(1-x)} = 0$ ainsi : $\lim_{x\to 1}\frac{e^{2x\ln(x-1)}}{x-1} = 0$

Par conséquent : $\lim_{x\to 1}\frac{e^{2x\ln(x-1)}}{x-1} = 0$

• Dérivabilité de f en 1:

Soit $x \in \mathbb{R}-\{-1;1\}$; on a :

$$\ln|x^2-1| = \ln(|x-1||x+1|) = \ln|x-1|+\ln|x+1|$$

d'où : $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{e^{2x\ln|x-1|+\ln|x-1|}}{x-1} = \frac{e^{2x\ln|x-1|}}{x-1}.e^{2x\ln|x+1|}$

et on a : $\lim_{x\to 1}\frac{e^{2x\ln|x-1|}}{x-1} = 0$ et $\lim_{x\to 1} e^{2x\ln|x+1|} = e^{2\ln 2} = 4$

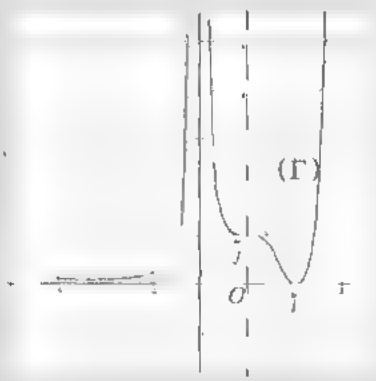
Donc : $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0$

Ainsi la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$

b) Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↘	0	↗	$+\infty$

d) La courbe (Γ) :



Exercice 23

1) Montrons $(\exists!\alpha \in \mathbb{R})\ ; f(\alpha) = 0$ et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - x$

la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$; (quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$) et la fonction $x \mapsto -x$ est continue sur $\mathbb{R}$; donc la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, (somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$).

De la même manière on montre que g est dérivable sur $\mathbb{R}$; et on a .

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ ; g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} - 1 = -\frac{e^{2x} + e^x + 1}{(e^x+1)^2}$$

Donc . $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; g'(x) < 0$; ainsi la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

d'où : g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $g(\mathbb{R})$

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ (car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$) et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

(car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 1$)

Donc : $g(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x \to +\infty} g(x); \lim\limits_{x \to -\infty} g(x)\right[=]-\infty; +\infty[$

Or $0 \in \mathbb{R}$; donc : $(\exists!\alpha \in \mathbb{R})$ tel que : $g(\alpha) = 0$ d'où : $(\exists!\alpha \in \mathbb{R})\ ; f(\alpha) = \alpha$

et on a : $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e} - 1}{2(\sqrt{e}+1)}$ et $g(1) = \frac{-1}{1+e}$; d'où : $g(1) < 0$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$

$g(1) < g(\alpha) < g\left(\frac{1}{2}\right)$

D'où : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ (car g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$)

2) Montrons que : $f\left(\left[\frac{1}{2}; 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}; 1\right]$:

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$; et on a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

d'où : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) > 0$

Ainsi : la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

donc : $f\left(\left[\frac{1}{2}; 1\right]\right) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right); f(1)\right] = \left[\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}+1}; \frac{e}{1+e}\right]$

Or : $e < e+1 \iff \frac{e}{e+1} < 1$ et $1 < \sqrt{e} \iff 1 + \sqrt{e} < 2\sqrt{e}$

$\iff \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}}$

ainsi : $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}+1} < \frac{e}{e+1} < 1$

Donc : $f\left(\left[\frac{1}{2};1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2};1\right]$

3) Calculons $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$:

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

et: $f''(x) = \frac{e^x(e^x+1)^2 - e^x 2e^x(e^x+1)}{(e^x+1)^4} = \frac{e^x(e^x+1)(e^x+1-2e^x)}{(e^x+1)^4}$

$= \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}); f''(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$

• Déduction :

Le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$ est le signe de $1-e^x$

• $1-e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

• $1-e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

Donc : $\left(\forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right]\right); f''(x) < 0$; ainsi f' est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$

Donc : $\left(\forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right]\right); f'(1) \leq f'(x) \leq f'\left(\frac{1}{2}\right)$

Puisque : $f'(1) = \frac{e}{(e+1)^2}$ $(f'(1) > 0)$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{(\sqrt{e}+1)^2}$

alors : $0 \leq f'(x) \leq \frac{\sqrt{e}}{(\sqrt{e}+1)^2}$ pour tout x de $\left[\frac{1}{2};1\right]$

4) a) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

• Initialisation: Pour $n = 0$; on a : $u_0 = \frac{1}{2}$, donc : $\frac{1}{2} \leq u_0 < 1$

• Héridité: Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose que : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ et on montre que $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$

On a : $u_n \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ et $f\left(\left[\frac{1}{2};1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2};1\right]$ d'où : $f(u_n) \subset \left[\frac{1}{2};1\right]$

Or $u_{n+1} = f(u_n)$, donc: $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{2} \leq u_n < 1$

b) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n \quad \alpha| < \frac{1}{2} k^n$

Soit a et b deux éléments de l'intervalle $\left]\frac{1}{2};1\right[$

La fonction f est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $I' \quad]a,b[$

d'après le théorème des accroissement finis :

$(\exists c \in I) / f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$

$(\exists c \in I) / |f(b) - f(a)| = |b-a| |f'(c)$

On a : $c \in \left]\frac{1}{2};1\right[$ car $I \subset \left]\frac{1}{2};1\right[$ d'où : $|f'(c)| \leq k$ (d'après la question 3)

donc : $|b-a| |f'(c)| \leq k|b-a|$

ainsi : $|f(b) \quad f(a)| \leq k|b \quad a|$

Soit $n \in \mathbb{N}$; on pose : $a = \alpha$ et $b = u_n$

(car : α et u_n sont des éléments de $\left]\frac{1}{2};1\right[$)

On a alors : $|f(u_n) \quad f(\alpha)| \leq k|u_n - \alpha|$

c'est-à-dire : $|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|u_1 - \alpha| \leq k|u_0 - \alpha|$

$|u_2 - \alpha| \leq k|u_1 \quad \alpha|$

$\cdot \qquad \cdot$

$\cdot \qquad \cdot$

$\cdot \qquad \cdot$

$|u_n \quad \alpha| \leq k|u_{n-1} - \alpha|$

En multipliant les inégalités (de termes strictement positifs) membre à membre et apres simplification:

on obtient : $(\forall n \in \mathbb{N}), |u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$

On a : $|u_0 \quad \alpha| \quad \left|\frac{1}{2} - \alpha\right|$

$\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \quad \alpha \leq \quad \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \alpha \leq 0$

Donc : $\left|\frac{1}{2}-\alpha\right| \leq \frac{1}{2}$ d'où : $k^n\left|\frac{1}{2}-\alpha\right| \leq \frac{1}{2}k^n$

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n-\alpha| \leq \frac{1}{2}k^n$

• Déduction :

On a : $-1 < k < 1$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = 0$

ainsi : $\begin{cases}(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n-\alpha| \leq \frac{1}{2}k^n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}k^n = 0\end{cases}$

D'après un critère de convergence : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

Exercice 24

1) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $f_n(0)$:

• On a: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2n}{x+n} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$

• $f_n(0) = 1-2-1 = -2$

2) Étudions les variations de f_n sur $\mathbb{R}^+$:

f_n est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$;

qui sont : $\left(x \mapsto 1-\frac{2n}{x+n}\right.$ et $\left.x \mapsto -e^{-x}\right)$., donc f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

Et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); f'_n(x) = \frac{2n}{(x+n)^2} + e^{-x}$

D'où le tableau de variations de f_n est le suivant :

x	0	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	
f_n	-2 ↗	1

3) Calculons $f_n(n)$ et déterminons le signe de $f_n(n)$:

On a : $f_n(n) = 1-1-e^{-n} = -e^{-n}$;

de plus $(\forall n \in \mathbb{N}); e^{-n} > 0$; d'où : $f_n(n) < 0$

4) a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), e^n > 2n+1$

- Initialsation·

Pour $n = 1$; on a : $e^3 > 3$ (c'est une proposition vraie pour $n = 1$ car $e^3 \simeq 7{,}3$)

- Hérédité:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on suppose que $e^{n+1} > 2n + 1$ et montrons que $e^{n+2} > 2n + 3$

On a : $e^{n+1} > 2n + 1$ et $e > 2$, d'où : $ee^{n+1} > 2(2n + 1)$

ainsi : $e^{n+2} > 4n + 2$

et puisque : $(4n + 2) - (2n + 3) = 2n - 1$

et $n > 1 \Rightarrow 2n > 2$

$\Rightarrow 2n - 1 \geq 1$

$\Rightarrow 2n - 1 > 0$

donc : $4n + 2 > 2n + 3$

par suite : $e^{n+2} > 2n + 3$

D'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; e^{n+1} > 2n + 1$

b) Déduisons le signe de $f_n(n+1)$:

On a : $f_n(n+1) = 1 - \frac{2n}{2n+1} - e^{-(n+1)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{e^{n+1}}$

et puisque : $e^{n+1} > 2n + 1$, alors : $\frac{1}{e^{n+1}} < \frac{1}{2n+1}$; d'où : $f_n(n + 1) > 0$

c) Montrons que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n avec $n < \alpha_n < n + 1$

On a : f_n est une fonction continue sur $[n; n + 1]$ et $f_n(n) \times f_n(n + 1) < 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins α_n de l'intervalle $]n; n + 1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$

et puisque f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n avec $n < \alpha_n < n + 1$

d) Déduisons la convergence de (α_n) :

On a : $n < \alpha_n < n + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

et puisque : $\lim_{+\infty} n = +\infty$, alors : $\lim_{+\infty} \alpha_n = +\infty$

Ainsi : la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est divergente.

1) a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

• Initialisation: Pour $n = 0$; on a : $u_0 = 1$ donc : $u_0 > 0$

• Héridité: Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose que $u_n > 0$ et on montre que $u_{n+1} > 0$

on a : $u_n > 0$ et $e^{-u_n} > 0$; donc : $u_n e^{-u_n} > 0$ c'est-à-dire : $u_{n+1} > 0$

• D'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

b) Déduction :

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n}$

et puisque : $-u_n < 0 \Rightarrow e^{-u_n} < 1$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

comme $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ et $u_n > 0$; alors : $u_{n+1} < u_n$

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < u_n$

D'où : la suite (u_n) est strictement décroissante.

c) Convergence de (u_n):

On a la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente

• Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = xe^{-x}$.

On a : - La fonction f est continue sur $[0;1]$, comme produit de deux fonctions continues : $u \mapsto x$ et $x \mapsto e^{-x}$

- $f([0;1]) \subset [0;1]$

(car $\forall x \in [0;1] : 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0$

$$\Rightarrow e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1)$$

- la suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

- $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq 1$ et (u_n) est convergente.

Donc sa limite est une solution dans l'intervalle $[0,1]$ de l'équation : $f(x) = x$

Soit $x \in [0;1]$; $f(x) = x \Longleftrightarrow x(e^{-x} - 1) = 0$

$$\Longleftrightarrow x = 0 \text{ ou } e^{-x} = 1$$

$$\Longleftrightarrow x = 0$$

Ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

2) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = e^{S_n}$:

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $(\forall k \in \{0;1;2;...;n\}) ; \frac{u_{k+1}}{u_k} = e^{-u_k}$

D'où : $\prod_{k=0}^{n} e^{-u_k} = \prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_1}{u_0} \times \frac{u_2}{u_1} \times ... \times \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_{n+1}}{u_0}$

d'où : $\frac{u_{n+1}}{u_0} = \prod_{k=0}^{n} e^{-u_k}$ et $\prod_{k=0}^{n} e^{-u_k} = e^{-\sum_{k=0}^{n} u_k} = e^{-S_n}$

Donc : $\frac{u_{n+1}}{u_0} = e^{-S_n}$; d'où : $u_{n+1} = u_0 . e^{-S_n}$

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = e^{-S_n} (u_0 = 1)$

Déduction :

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $u_{n+1} = e^{-S_n}$; d'où : $-S_n = \ln(u_{n+1})$

Ainsi : $S_n = \ln\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right)$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; S_n = \ln\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right)$

et on a : $\begin{cases} \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{u_{n+1}} = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right) = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

Donc : $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

1) Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x \geq 1 + x$:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - x - 1$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, car elle est somme de deux fonctions dérivables $(x \mapsto e^x$ et $x \mapsto -x - 1)$

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = e^x - 1$

• Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1$
$\Leftrightarrow x = 0$

• Soit $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$
$\Leftrightarrow e^x > 1$
$\Leftrightarrow x > 0$

Donc : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $f(x) \geq f(0)$ et $(\forall x \in \mathbb{R}^-)$; $f(x) \geq f(0)$

Ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $f(x) \geq 0$ et $(\forall x \in \mathbb{R}^-)$; $f(x) \geqslant 0$

Puisque : $f(0) = 0$, alors : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) \geq 0$

Ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $e^x \geq x + 1$

b) Montrons que $(\forall t \in]-\infty; 1[)$; $e^t < \frac{1}{1-t}$:

Soit $t \in]-\infty; 1[$; on a d'après la question précédente.

$1 - t < e^{-t}$; et puisque $1 - t > 0$, alors : $\frac{1}{1-t} > \frac{1}{e^{-t}}$

Donc : $\frac{1}{1-t} > e^t$

Donc : $(\forall t \in]-\infty; 1[)$; $e^t < \frac{1}{1-t}$

2) a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $1 + x < e^x$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $1 + \frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}}$; d'où : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$ (1)

et on a : $(\forall t \in]-\infty; 1[)$; $e^t < \frac{1}{1-t}$

on prend : $t = \frac{1}{1+n}$; on a : $t < 1$

Donc : $e^{\frac{1}{n+1}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}$; ainsi : $e^{\frac{1}{1+n}} < 1 + \frac{1}{n}$

Donc : $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ (2)

D'après (1) et (2); on a alors : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

b) Déduction :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a d'après la question précédente : $u_n < e < u_n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

D'où : $0 < e - u_n < \frac{u_n}{n}$

D'autre part, d'après la question 1)a): $1 < 1 + x < e^x$ pour tout x de $]0; +\infty[$

Donc : $(\forall x \in]0; +\infty[)$; $0 < \ln(1 + x) < x$

Donc : $(\forall x \in]0; +\infty[)$; $0 < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

d'où : $0 < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

Ainsi : $0 < n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1$ d'où : $1 < e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} < e$ ainsi : $1 < e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < e$

c'est-à-dire : $1 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$. Donc : $1 < u_n < e$

par suite : $\frac{u_n}{n} < \frac{e}{n}$ donc : $0 < e - u_n < \frac{e}{n}$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < e - u_n < \frac{e}{n}$

• Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

On a : $\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < e - u_n < \frac{e}{n} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n} = 0 \end{cases}$

d'après un critère de convergence : $\lim\limits_{n\to+\infty}(e - u_n) = 0$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.

Exercice 27:

Partie A:

1) • Étudions les variations de la fonction f :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*); f(x) = xe^{-\frac{x^2}{4}} = \frac{4}{x}\cdot\frac{x^2}{4}e^{-\frac{x^2}{4}}$$

On pose : $X = \frac{x^2}{4}$; $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{x^2}{4}e^{-\frac{x^2}{4}} = \lim\limits_{X\to+\infty} Xe^{-X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0$

et on a : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{4}{x} = 0$; d'où : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$

La fonction : $x \mapsto \frac{x^2}{4}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que la fonction $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{4}}$

est dérivable sur $\mathbb{R}$, et la fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Par produit, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$,

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x^2}{4}} = \left(1-\frac{x^2}{2}\right)e^{-\frac{x^2}{4}}$

$$= (2-x^2)\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}$$

Et puisque : $e^{-\frac{x^2}{4}} > 0$; alors le signe de $f'(x)$ est celui de $2 - x^2$.

Tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
f	0	↘	$-\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$	↗	$\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$	↘	0

2) a) Équation de la tangente (Δ) à la courbe (C) au point d'abscisse 0:

$(\Delta): y = f'(0)(x-0)+f(0)$ et $f(0)=0$; $f'(0)=1$

Donc : $(\Delta): y = x$

b) Étudions la position relation de la courbe (C) avec la droite (Δ):

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a : $f(x)-x = xe^{-\frac{x^2}{4}} - x = x\left(e^{-\frac{x^2}{4}} - 1\right)$

On a : $-\frac{x^2}{4} < 0$, d'où : $e^{-\frac{x^2}{4}} < 1$, ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R}); e^{-\frac{x^2}{4}} - 1 < 0$

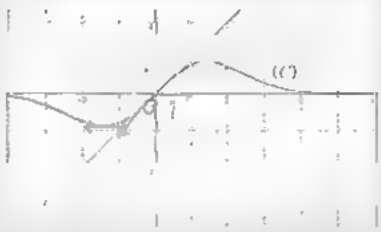
Donc on a le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-x$		+	0	-	

Cela veut dire que (C) est au dessus de la droite (Δ) sur $]-\infty;0[$

et (C) est au dessous de la droite (Δ) sur $]0;+\infty[$

c) La courbe (C):D'après a qui précède le point O est un point d'inflexion pour la courbe (C).



Partie B:

On considère a fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = e^x - x - \frac{5}{4}$

1) Étudions les variations de g sur $\mathbb{R}^*$:

On a : $(\forall x \in]0;+\infty[); g(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{5}{4x}\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1-\frac{5}{4x}\right)=-1$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}-1-\frac{5}{4x}\right)=+\infty$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$; d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

• La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: $x\mapsto e^x$ et $x\mapsto x-\frac{5}{x}$) et $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$: $g'(x)=e^x-1$

Puisque : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$; $e^x\geq 1$, alors : $g'(x)>0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Le tableau de variations de g est le suivant :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
g	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

2) Montrons que $\left(\forall x\in\left[\frac{3}{4};+\infty\right[\right);e^x>x+\frac{5}{4}$:

Soit $x\in\left[\frac{3}{4};+\infty\right[$; on a : $g\left(\frac{3}{4}\right)=e^{\frac{3}{4}}-\frac{3}{4}-\frac{5}{4}=e^{\frac{3}{4}}-2\ (\sim 0,12)$

d'où : $g\left(\frac{3}{4}\right)>0$; et puisque g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

alors : $\left(\forall x\in\left[\frac{3}{4};+\infty\right[\right);g(x)\geq g\left(\frac{3}{4}\right)$ ainsi : $\left(\forall x\in\left]\frac{3}{4},+\infty\right[\right);g(x)>0$

Par suite : $\left(\forall x\in\left[\frac{3}{4};+\infty\right[\right);e^x>x+\frac{5}{4}$

Partie C:

Soit $n\in\mathbb{N}^*$; on a : $u_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)$ et $v_n=2e^{-\frac{n^2}{4}}+u_n$

1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$; montrons que : $v_{n+1}-v_n=2\left(\frac{n+3}{2}-e^{\frac{2n+1}{4}}\right)e^{-\frac{(n+1)^2}{4}}$

On a : $v_{n+1}=u_{n+1}+2e^{-\frac{(n+1)^2}{4}}=\sum_{k=1}^{n+1}f(k)+2e^{-\frac{(n+1)^2}{4}}$

Donc :

$v_{n+1}-v_n=f(n+1)+2e^{-\frac{(n+1)^2}{4}}-2e^{-\frac{n^2}{4}}=(n+1)e^{-\frac{(n+1)^2}{4}}+2e^{-\frac{(n+1)^2}{4}}-2e^{-\frac{n^2}{4}}$

$=\left(n+1+2-2e^{\frac{n^2}{4}+\frac{(n+1)^2}{4}}\right)e^{-\frac{(n+1)^2}{4}}=\left(n+3-2e^{\frac{2n+1}{4}}\right)e^{-\frac{(n+1)^2}{4}}$

Donc : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $v_{n+1}-v_n=2\left(\frac{n+3}{2}-e^{\frac{2n+1}{4}}\right)e^{-\frac{(n+1)^2}{4}}$

2) Déduction :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $n \geq 1 \Leftrightarrow 2n+1 \geq 3$

$$\Leftrightarrow \frac{2n+1}{4} \geq \frac{3}{4}$$

Or : $\left(\forall x \in \left[\frac{3}{4}; +\infty\right[\right); e^x > x + \frac{5}{4}$ et $\frac{2n+1}{4} \geq \frac{3}{4}$

Donc : $e^{\frac{2n+1}{4}} > \frac{2n+1}{4} + \frac{5}{4}$

D'où : $e^{\frac{2n+1}{4}} > \frac{n+3}{2}$; ainsi : $\frac{n+3}{2} - e^{\frac{2n+1}{4}} < 0$

Par suite : $2\left(\frac{n+3}{2} - e^{\frac{2n+1}{4}}\right)e^{-\frac{(n+1)}{4}} < 0$ C'est-à-dire : $v_{n+1} - v_n < 0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $v_{n+1} - v_n < 0$

3) Montrons que les deux suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $u_{n+1} - u_n = f(n+1)$ et on a : $f(n+1) - (n+1)e^{\frac{(n+1)^2}{4}}$

ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_{n+1} - u_n > 0$

d'où: la suite (u_n) est croissante, d'autre part ; $v_n - u_n = 2e^{\frac{n^2}{4}}$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $v_n - u_n > 0$ ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $v_n > u_n$

Et puisque $\lim_{n \to +\infty} e^{\frac{n^2}{4}} - \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ (en posant : $x = -\frac{n^2}{4}$)

alors : $\lim_{n \to +\infty}(v_n - u_n) = 0$

et d'après la question précédente $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Donc : (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4) Montrons que $|u_7 - \ell| < 10^{-4}$:

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n < \ell < v_n$ d'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $|u_n - \ell| \leq 2e^{-\frac{n^2}{4}}$

Il suffit de déterminer n tel que : $2e^{-\frac{n^2}{4}} \leq 10^{-4}$

On a : $2e^{-\frac{n^2}{4}} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow e^{\frac{n^2}{4}} \leq \frac{10^4}{2}$

$$\Leftrightarrow -\frac{n^2}{4} \leq \ln\left(\frac{10^4}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow n^2 \geq -4\ln\left(\frac{10^4}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow n^2 \geq 4\ln(2 \times 10^4)$$

$$\Leftrightarrow n \geq 2\sqrt{\ln(2 \times 10^4)}$$

En utilisant la calculatrice, on trouve $n \geq 7$

Par suite : $|u_7 - \ell| \leq 10^{-4}$; ainsi u_7 est une valeur approchée du nombre ℓ à 10^{-4} près.

Exercice 25

1) Montrons que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β :

Soit $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = x \iff f(x) - x = 0$

Soit g la fonction définie par : $g(x) = f(x) - x$

Les deux fonctions f et $u : x \mapsto -x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$,

donc $g = f + u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g'(x) = e^x - 1$

Soit $x \in \mathbb{R}$; • $g(x) = 0 \iff e^x = 1$ $\iff x = 0$

• $g'(x) > 0 \iff e^x > 1$ $\iff x > 0$

Le tableau de variations de g est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

(vérifier que : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$)

• La fonction g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$

donc : g réalise une bijection de $]-\infty; 0]$ vers $g(]-\infty; 0]) = [-1; +\infty[$

Puisque $0 \in [-1; +\infty[$; donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β sur $]-\infty; 0]$.

Et puisque : $g(-1) < 0$ et $g(-2) > 0$; alors : $-2 < \beta < -1$

• De la même manière on montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[0; +\infty[$ et que : $1 < \alpha < 2$ et puisque : $f(x) = x \iff g(x) = 0$

Alors l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β.

2) a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n \in [-2; -1]$

• Initialisation : pour $n = 1$; on a : $u_1 = f(u_0) = e^0 - 2 = -1$

Donc : $u_1 \in [-2;-1]$

• Hérid té : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $u_n \in [-2;-1]$ et on montre que $u_{n+1} \in [-2;-1]$

On a : $u_n \in [-2;-1] \Rightarrow -2 \leq u_n \leq -1$

$\Rightarrow f(-2) \leq f(u_n) \leq f(-1)$ (car f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, du fait que $f'(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$)

de plus : $f(-1) = e^{-1} - 2 \simeq -1,6$

$f(-2) = e^{-2} - 2 \simeq -1,86$

Donc : $f(-2) > -2$ et $f(-1) < -1$

d'où : $-2 < f(-2) \leq f(u_n) \geq f(-1) < -1$

ainsi : $-2 \leq u_{n+1} \leq -1$ (car : $u_{n+1} = f(u_n)$)

D'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), -2 \leq u_n \leq -1$

b) Montrons par récurrence que (u_n) est strictement décroissante:

Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < u_n$

• Initialisation: Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 0$ et $u_1 = -1$; donc : $u_1 < u_0$

• Hérid té. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que : $u_{n+1} < u_n$ et on montre que $u_{n+2} < u_{n+1}$

D'après l'hypothèse de récurrence : $u_{n+1} < u_n$

et on a f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

donc : $f(u_{n+1}) < f(u_n)$ d'où : $u_{n+2} < u_{n+1}$. Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < u_n$

Donc : (u_n) est strictement décroissante.

3) a) Montrons que $(\forall x \in [-2;-1]) ; |f'(x)| \leq e^{-1}$:

Soit $x \in [-2;-1]$ on a : $f'(x) = e^x$

$-2 \leq x \leq -1 \Leftrightarrow e^{-2} \leq e^x \leq e^{-1}$

Donc : $(\forall x \in [-2;-1]) ; |f'(x)| \leq e^{-1}$

b) Déduisons que : $(\forall x \in [-2;-1]) ; |f(x) - \beta| \leq \frac{1}{e}|x - \beta|$

Soit $x \in [-2;-1]$ et on a : $\beta \in [-2;-1]$. On suppose que $x < \beta$

La fonction f est continue sur $[x;\beta]$ et dérivable sur $]x;\beta[$

D'après le théorème des accroissements finis,

$\exists c \in]x;\beta[\ ;\ f(x)-f(\beta)=(x-\beta)f'(c)$

Or $|f'(c)| \leq \frac{1}{e}$ et $f(\beta)=\beta$

Donc : $|f(x)-\beta| \leq \frac{1}{e}|x-\beta|$

Cette inéquation est vérifiée dans le cas où $x=\beta$ et on obtient le même résultat si $x > \beta$.

Donc : $(\forall x \in [-2;-1])\ ;|f(x)-\beta| \leq \frac{1}{e}|x-\beta|$

4) a) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;|u_n-\beta| \leq \beta\left(\frac{1}{e}\right)^n$:

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $u_n \in [-2;-1]$

Donc, d'après la question 3)b) : $|f(u_n)-\beta| \leq \frac{1}{e}|u_n-\beta|$

D'où : $|u_{n+1}-\beta| \leq \frac{1}{e}|u_n-\beta|$

Donc : $(\forall k \in \mathbb{N})\ ;|u_{k+1}-\beta| \leq \frac{1}{e}|u_k-\beta|$

En remplaçant k par les valeurs respectives : 0; 1; 2; ...; $n-1$

On obtient : $|u_1-\beta| \leq \frac{1}{e}|u_0-\beta|$

$|u_2-\beta| \leq \frac{1}{e}|u_1-\beta|$

. . .

. . .

$|u_n-\beta| \leq \frac{1}{e}|u_{n-1}-\beta|$

En multipliant membre à membre les inégalités de termes strictement positifs précédentes on obtient : $|u_n-\beta| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n|u_0-\beta|$

Or $u_0=0$; donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;|u_n-\beta| \leq \beta\left(\frac{1}{e}\right)^n$

b) Déterminons la limite de la suite (u_n) :

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;|u_n-\beta| \leq \beta\left(\frac{1}{e}\right)^n$

Puisque : $-1 < \frac{1}{e} < 1$; alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n.\beta = 0$

D'après un critère de convergence (u_n) est une suite convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta$.

Exercice 29

1) • Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} n\,ln(x) = +\infty$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x-1}{x}+n\,lnx\right) = +\infty$; d'où: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

• Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} n\ln(x) = -\infty$

et on a : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$; donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = -\infty$

2) Étudions les branches infinies de la courbe de la fonction f_n :

• On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = -\infty$; donc l'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe (C_n).

• On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$; on calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_n(x)}{x}$

Soit $x\in\,]0;+\infty[$; on a : $\dfrac{f_n(x)}{x} = \dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}+n\dfrac{ln(x)}{x}$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = +\infty$

Ainsi la courbe de la fonction f_n admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3) a) Montrons que : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;1+(x-1)e^x\geq 0$

On pose : $g(x) = 1+(x-1)e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

On a : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;g(x) = 1+(x-1)e^x$; et $g'(x) = xe^x$

Ainsi le signe de $g'(x)$ est celui de x.

Le tableau de variations de g est le suivant :

x	∞		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On a : 0 est une valeur minimale absolue de g sur $\mathbb{R}$.

donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; g(x) \geq 0$

ainsi : $1+(x-1)e^x \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b) Étudions les variations de f_n :

On a : f_n est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$;

Et on a : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; f'_n(x) = \dfrac{1+(x-1)e^x}{x^2} + \dfrac{n}{x}$

et on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*);(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; \dfrac{n}{x} > 0$

et d'après la question a): $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; 1+(x-1)e^x \geq 0$

Donc : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; f'_n(x) > 0$

Ainsi : f_n est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variations f_n.

x	0		$+\infty$
$f'_n(x)$		$+$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4) Etudions la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $x \in]0;+\infty[$; on a : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \ln(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f_{n+1}(x)-f_n(x)$		$-$	0	$+$	
Position relative de (C_n) et (C_{n+1})		(C_n) est au dessus de (C_{n+1})		(C_n) est au dessous de (C_{n+1})	

5) Montrons que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe B :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $x \in]0;+\infty[$; on a : $f_{n+1}(x)-f_n(x) = \ln(x)$; donc :

$f_{n+1}(x) = f_n(x) \iff x = 1$.

De plus $f_n(1) = e - 1$; donc le point $B(1;e-1)$ est un point commun aux courbes (C_n) et (C_{n+1}); et comme les coordonnées de B sont indépendantes de n alors toutes les courbes (C_n) passent par le point B.

6) a) Montrons que $\exists!\alpha_1 \in [0,2;0,9]$ tel que : $f_1(\alpha_1) = 0$:

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et en particulier sur l'intervalle $[0,2;0,9]$

et on a : $f_1(0,2) \times f_1(0,9) < 0$ (vérifier ce résultat).

Donc; il existe un seul réel α de $[0,2;0,9]$ tel que : $f_1(\alpha) = 0$

b) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$; $f_n(\alpha_1) < 0$:

Méthode 1:

Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$; on a : $f_n(\alpha_1) = \frac{e^{\alpha_1} - 1}{\alpha} + n\ln(\alpha_1)$

Donc : $f_n(\alpha) = -\ln\alpha_1 + n\ln\alpha = (n-1)\ln\alpha_1$ et que $0,2 < \alpha_1 < 0,9$,

alors : $\ln(\alpha_1) < 0$

Et on a : $n - 1 > 0$ (car $n \geq 2$); donc : $f_n(\alpha_1) < 0$

Méthode 2 :

D'après la question 4), on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*),(\forall x \in]0;1[)$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$

Donc : $(\forall x \in]0;1[)$; $f_n(x) < f_{n-1}(x) < \ldots < f_1(x)$

et puisque : $\alpha \in]0;1[$, alors : $f_n(\alpha_1) < f_1(\alpha_1)$, par suite : $f_n(\alpha_1) < 0$ (car : $f_1(\alpha) = 0$)

c) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\});(\exists!\alpha_n \in [\alpha_1;1])$; $f_n(\alpha_n) = 0$:

Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$; on a . la fonction f_n est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$; donc elle réalise une bijection de $]0;+\infty[$ vers $f_n(]0;+\infty[) = \mathbb{R}$.

Et puisque : $0 \in \mathbb{R}$, alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n sur $]0;+\infty[$.

Montrons que $\alpha_1 < \alpha_n < 1$:

Méthode 1:

La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et on a.

$f_n(\alpha) < 0 < f_n(1)$; donc : $\alpha_1 < \alpha_n < 1$ (on rappelle que : $f_n(\alpha_n) = 0$)

Méthode 2:

(on utilise un raisonnement par l'absurde)

On suppose que $\alpha \geq \alpha_n$ et puisque f_n est croissante sur $\mathbb{R}$,

alors : $f_n(\alpha_1) \geq f_n(\alpha_n)$

Or $f_n(\alpha_1) < 0$; d'où : $f_n(\alpha_n) < 0$ ceci est en contradiction avec $f_n(\alpha_1) < f_n(\alpha_n)$

ainsi notre hypothèse est fausse; par suite : $\alpha_1 < \alpha_n$

• On montre de plus que $\alpha_n < 1$; donc : $\alpha_1 < \alpha_n < 1$

Méthode 3:

On a : $f_n(\alpha_n) = 0$ et $f_n(\alpha_1) < 0$, donc : $f_n(\alpha_1) < f_n(\alpha_n)$

et puisque f_n est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

et f est une bijection; alors sa bijection réciproque f_n^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;

D'où : $f^{-1}{}_n(f_n(\alpha_1)) < f^{-1}{}_n(f_n(\alpha_n))$

Par suite : $\alpha_1 < \alpha_n$; et on montre de même que : $\alpha_n < 1$

7) a) Montrons que : $(\forall x \in]0;1]) ; \dfrac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$

On considère la fonction h définie sur $]0;1]$ par : $h(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} - e + 1$

On a : h est dérivable sur $]0;1]$ et $(\forall x \in]0;1]) ; h'(x) = \dfrac{1 + (x-1)e^x}{x^2}$

Donc : $(\forall x \in]0;1]) ; h'(x) \geq 0$, d'après la question 3)a)

ainsi la fonction h est croissante sur $]0;1]$, et puisque $h(1) = 0$

Alors : $(\forall x \in]0;1]) ; h(x) \leq 0$

D'où : $(\forall x \in]0;1]) ; \dfrac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$

b) Déduisons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; ln(\alpha_n) \geq \dfrac{1-e}{n}$

On a : $(\forall x \in]0;1]) ; \dfrac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$

et puisque : $0 < \alpha_n < 1$; alors : $\dfrac{e^{\alpha_n} - 1}{\alpha_n} \leq e - 1$ de plus $f_n(\alpha_n) = 0$;

d'où : $\dfrac{e^{\alpha_n} - 1}{\alpha_n} \leq -n\,ln(\alpha_n)$

Donc : $-n\ln(\alpha_n) \leq e-1$ c'est-à-dire : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}$

c) Déduisons la limite de la suite (α_n) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $\ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}$; donc : $\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$

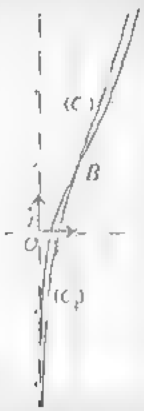
Et d'après la question 6)c) ; $\alpha_n \leq 1$; donc : $e^{\frac{1-e}{n}} \leq \alpha_n \leq 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$

On a : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1-e}{n} = 0$; et la fonction $x \mapsto e^x$ est continue en 0.

Donc : $\lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1-e}{n}} = e^0 = 1$

et d'après un critère de convergence, la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est convergente et de limite 1.

8) Tracé de (C_1) et (C_2) :



Exercice 30

Partie 1

1) a) Calculons $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

• On a : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f(x) = 1 - x^3 e^{-x} = 1 - \frac{x^3}{e^x}$

Et puisque : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$, alors : $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$

Ainsi : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

• On a : $(\forall x \in]-\infty;0[)$; $f(x) = 1 - x^3 e^{-x} = 1 - x^3\left(\frac{1}{e^x}\right)$

Et puisque : $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$; alors $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$

Et on a : $\lim_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty$; par suite : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) Branches infinies de la courbe (C)

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

Donc la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} - x^3\left(\frac{1}{e^x}\right) = -\infty$

Ainsi: la courbe (C) admet une branche parabolique de direction asymptotique celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

2) Étudions les variations de f

On a la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: $x \longmapsto x^3$; $x \longmapsto e^{-x}$; $x \longmapsto 1$) et

$(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = -3x^2e^{-x} + x^3e^{-x} = x^2e^{-x}(-3+x)$

et puisque $(\forall x \in \mathbb{R})$; $x^2e^{-x} \geqslant 0$; alors le signe de $f'(x)$ est celui de $x-3$

• $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 0$ ou $-3+x = 0$

$\Longleftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$

$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x - 3 > 0$

$\Longleftrightarrow x > 3$

Le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$1-\frac{27}{e^3}$	$\nearrow$	1

3) Montrons que l'équation: $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β et que $1 < \alpha < 3 < \beta$

f est continue sur $\mathbb{R}$ (car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$)

et on a : $f(1) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$ et $f(3) = 1 - \frac{27}{e^3} = \frac{e^3-27}{e^3}$

et puisque $3 > e$, alors : $27 > e^3$; ainsi $f(3) < 0$

et puisque : $e > 1$ alors $e - 1 > 0$; d'où $f(1) > 0$

f est continue sur $[1;3]$ et $f(1)\times f(3)<0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists\alpha\in]1;3[$ tel que : $f(\alpha)=0$

et puisque f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;3]$

alors : l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $]-\infty;3]$ et que $1<\alpha<3$

D'autre part : f est continue et strictement croissante sur $[3;+\infty[$ et $f([3;+\infty[)=[f(3);1[$

Donc f réalise une bijection de $[3;+\infty[$ vers $[f(3);1[$

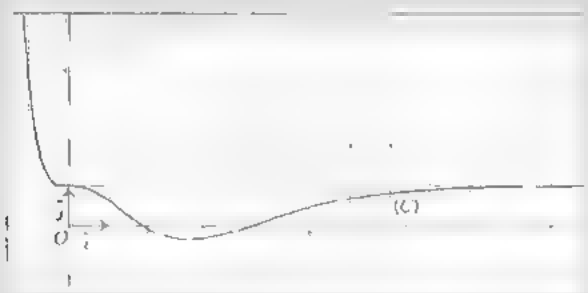
et puisque : $f(3)<0$, alors : $0\in[f(3);1[$

ainsi $\exists!\beta\in[3;+\infty[$ tel que : $f(\beta)=0$

Donc l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β telles que $1<\alpha<3<\beta$

4) Le tracé de la courbe (C)

Remarquer que le point $A(0;1)$ est un point d'inflexion de la courbe (C) car $f''(0)=0$ et f' ne change pas de signe au voisinage de 0.



Partie 2

1) Tableau de variations de f_n suivant la parité de n.

Soit $x\in]0;+\infty[$; on a : $f_n(x)=1-\frac{x^n}{e^x}$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$; alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$; d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)=1$

On a : $(\forall x\in]-\infty;0[)$; $f_n(x)=1-x^n\left(\frac{1}{e^x}\right)$

Puisque $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$; alors : $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$

et $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ si n est pair; $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ si n est impair

d'où $\lim_{x \to -\infty} f_n(x) = +\infty$ si n est impair

$\lim_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty$ si n est pair

la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme et produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: $x \longmapsto x^n$: $x \longmapsto -e^{-x}$ et $x \longmapsto 1$)

et on a: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'_n(x) = -nx^{n-1}e^{-x} + x^n e^{-x} = x^{n-1} e^{-x}(x-n)$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $e^{-x} > 0$ et $x - n > 0 \iff x > n$

et le signe de x^{n-1} dépend de la parité de n

Si n est pair alors $n-1$ est impair donc $x^{n-1} \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$

Tableau de variations de f_n

• Si n est pair

x	$-\infty$		0		n		$+\infty$
$f'_n(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f_n	$-\infty$	↗	1	↘	$f_n(n)$	↗	$+\infty$

• Si n est impair

x	$-\infty$		0		n		$+\infty$
$f'_n(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
f_n	$+\infty$	↘	1	↘	$f_n(n)$	↗	$+\infty$

2) Montrons que l'equation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions u_n et v_n tels que $1 < u_n < n < v_n$

On a : $f_n(1) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$ et on a : $f_n(n) = 1 - \left(\frac{n}{e}\right)^n = \frac{e^n - n^n}{e^n}$

Puisque : $n > 4 > e \Rightarrow n^n > e^n$

$\Rightarrow f_n(n) < 0$

• Cas où n est impair:

On a : f_n est continue sur $[1;n]$ et $f_n(1) \times f_n(n) < 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires $\exists u_n \in]1;n[; f(u_n) = 0$

et puisque f_n est strictement décroissante sur $]-\infty;n]$, alors : l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution u_n sur l'intervalle $]-\infty;n]$ avec $1 < u_n < n$

D'autre part la fonction f_n est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[n;+\infty[$

d'où f_n réalise une bijection de $[n;+\infty[$ $[f_n(n);1[$

et puisque $f_n(n) < 0$; alors : $0 \in]f_n(n);1[$

d'où $\exists! v_n \in]n;+\infty[; f_n(v_n) = 0$

Par suite l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions u_n et v_n telles que : $1 < u_n < n < v_n$:

• **Cas où n est pair** : On a le même résultat sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 5$

a) Montrons que $f_n(u_{n-1}) = u_{n-1}^{n-1} e^{-u_{n-1}}(1 - u_{n-1})$

On a : $f_n(u_{n-1}) = 1 - (u_{n-1})^n e^{-u_{n-1}}$ et $f_{n-1}(u_{n-1}) = 1 - (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}} = 0$

donc $1 = (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}}$; ainsi : $f_n(u_{n-1}) = (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}} - (u_{n-1})^n e^{-u_{n-1}}$

Donc $f_n(u_{n-1}) = (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}}(1 - u_{n-1})$

b) Déduisons que $f_n(u_{n-1}) < 0$:

On a : $1 < u_{n-1} < n-1$; donc $1 - u_{n-1} < 0$ et $(u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}} > 0$

Par suite $f_n(u_{n-1}) < 0$

c) Déduisons que la suite $(u_n)_{n \geqslant 4}$ est décroissante et que (u_n) est convergente

On a: $(\forall n \geqslant 5)$; $f_n(u_{n-1}) < 0$ et $f_n(u_n) = 0$

donc : $\forall n \geqslant 5$; $f_n(u_{n-1}) < f_n(u_n)$

et puisque : f_n est strictement décroissante sur l'intervalle $[1;n]$

On a alors : $(\forall n \geqslant 5)$; $u_{n-1} > u_n$

C'est-à-dire la suite $(u_n)_{n\geqslant 4}$ est décroissante

et puisque elle est minorée par 1 alors elle est convergente.

4) a) Montrons que : $(\forall n \geqslant 4); 1 - u^n e^{-u} \geqslant 0$

On a : $u = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et la suite $(u_n)_{n\geqslant 4}$ est décroissante

donc : $\forall (n \geq 4)$; $u \leq u_n$, et d'autre part : $u_n > 1$; d'où $u \geqslant 1$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}$; $n \geqslant 4)$; $1 \leqslant u \leqslant u_n$

et puisque $1 < u_n < n$ et f_n est strictement décroissante sur $[1;n]$ (dans les deux cas)

alors : $f_n(u) \geqslant f_n(u_n)$, et puisque $f_n(u_n) = 0$

Alors : $f_n(u) \geqslant 0$

C'est-à-dire $(\forall n \geqslant 4)$; $1 - u^n e^{-u} \geqslant 0$

b) On suppose que $u > 1$; calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - u^n e^{-u}$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u^n = +\infty$ (car $u > 1$) et $e^{-u} > 0$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - u^n e^{-u} = -\infty$

c) Déduisons la valeur de u

On a : $(\forall n \geqslant 4)$; $u_n > 1$; d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant 1$

Ainsi : $u \geqslant 1$; donc : $u > 1$ ou $u = 1$

On suppose que $u > 1$; D'après la question 4) b),

on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - u^n e^{-u} = -\infty$;

et ceci est en contradiction avec $(\forall n \geqslant 4)$; $1 - u^n e^{-u} \geqslant 0$

Donc : $u = 1$

Exercice 31

Partie A:

On a : $\begin{cases} f(x) = (x+2)e^{\frac{2}{x}} ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$; on pose: $X = -\frac{2}{x}$ pour toutes les limites.

1) a) Montrons que f est continue à droite en 0

On a : $X = -\frac{2}{x}$, donc : $x = -\frac{2}{X}$

Ainsi : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{X \to -\infty} \left(\frac{-2}{X} + 2\right)e^X = 0 = f(0)$

(car : $\lim\limits_{X \to -\infty} \frac{-2}{X} + 2 = 2$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$)

D'où la fonction f est continue à droite en 0.

b) Montrons que f est dérivable à droite en 0

On a : $(\forall x > 0)$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{(x+2)e^{\frac{2}{x}}}{x} = \left(1 + \frac{2}{x}\right)e^{\frac{2}{x}}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{X \to -\infty} (1 - X)e^X = \lim\limits_{X \to -\infty} (e^X - Xe^X) = 0$

(car : $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} Xe^X = 0$)

Donc: f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

c) Montrons que f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$

On a : $(\forall x \in]0; +\infty[)$; $f'(x) = e^{\frac{2}{x}} + \frac{2}{x}(x+2)e^{\frac{2}{x}} = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2}e^{\frac{2}{x}}$

Donc: $(\forall x > 0)$; $f'(x) = \frac{(x+1)^2 + 3}{x^2}e^{\frac{2}{x}}$

D'où: $(\forall x > 0 ; f'(x) > 0)$; ainsi f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

2) a) Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

On pose $X = \frac{2}{x}$; on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to 0^+} \left(\frac{-2}{X} + 2\right)e^X = +\infty$

car : $\begin{cases} \lim\limits_{X \to 0} e^X = 1 \\ \lim\limits_{X \to 0^+} \frac{-2}{X} = +\infty \end{cases}$; ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Montrons que : $(\forall t \in \mathbb{R}^+); 0 \leqslant e^{-t} + t - 1 \leqslant \frac{t^2}{2}$

Soit $t \in \mathbb{R}^+$; on pose $u(t) = e^{-t} + t - 1$ et $v(t) = e^{-t} + t - 1 - \frac{t^2}{2}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$, et on a : $(\forall t \in \mathbb{R}^+); u'(t) = -e^{-t} + 1$

et $v'(t) = -e^{-t} + 1 - t = -u(t)$

or $-t \leqslant 0 \Rightarrow e^{-t} \leqslant 1$

$\Rightarrow -e^{-t} + 1 \geqslant 0$

$\Rightarrow u'(t) \geqslant 0$

$\Rightarrow u$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$

Donc $(\forall t \in \mathbb{R}^+); u(t) \geqslant u(0)$; donc $u(t) \geqslant 0$ (car : $u(0) = 0$)

et on a : $(\forall t \in \mathbb{R}^+); v'(t) = -u(t)$

Donc : $(\forall t \in \mathbb{R}^+); v'(t) \leqslant 0$

Ainsi : la fonction v est décroissante sur $\mathbb{R}^+$

Donc : $\forall t \in [0; +\infty[; v(t) \leqslant v(0)$

D'où : $(\forall t \in [0; +\infty[); v(t) \leqslant 0$ (car $v(0) = 0$)

Et on a : $u(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$

Par suite : $(\forall t \in \mathbb{R}^+)\begin{cases} e^{-t} + t - 1 \geqslant 0 \\ e^{-t} + t - 1 - \frac{t^2}{2} \leqslant 0 \end{cases}$

Conclusion : $(\forall t \in \mathbb{R}^+); 0 \leqslant e^{-t} + t - 1 \leqslant \frac{t^2}{2}$

c) Montrons que $(\forall x > 0)$; $-\frac{4}{x} \leqslant f(x) - x \leqslant \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$

On pose $t = \frac{2}{x}$; d'où $x = \frac{2}{t}$

donc : $f(x)$ s'écrit sous la forme : $\left(\frac{2}{t} + 2\right)e^{-t} = 2.\frac{1+t}{t}e^{-t}$

et puisque $x > 0$; alors $t > 0$, et d'après la question b) :

$$1 - t \leqslant e^{-t} \leqslant 1 - t + \frac{t^2}{2}$$

et puisque $t + 1 > 0$; alors $1 - t^2 \leqslant (1 + t)e^{-t} \leqslant 1 - t + \frac{1}{2}t^2(1 + t)$

D'où : $\frac{2(1-t^2)}{t} \leqslant \frac{2(1+t)}{t}e^{-t} \leqslant \frac{2(1-t^2)}{t} + t(1+t)$

c'est-à-dire : $\frac{2}{t} - 2t \leqslant \frac{2(1+t)}{t}e^{-t} \leqslant \frac{2}{t} - 2t + t + t^2$

Par suite : $-2t \leqslant \frac{2(1+t)}{t}e^{-t} - \frac{2}{t} \leqslant t^2 - t$

et en remplaçant t par $\frac{2}{x}$; on obtient :

$(\forall x > 0) ; -\frac{4}{x} \leqslant f(x) - x \leqslant \frac{4}{x^2} \quad \frac{2}{x}$

d) Déduisons que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (Δ)

On a : $\lim f(x) = +\infty$ et $(\forall x > 0) : -\frac{2}{x} \leqslant f(x) - x \leqslant \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$

Puisque : $\lim -\frac{2}{x} = 0$ et $\lim\left(\frac{4}{x^2} \quad \frac{2}{x}\right) = 0$.

D'après les limites et l'ordre ; on a : $\lim(f(x) - x) = 0$

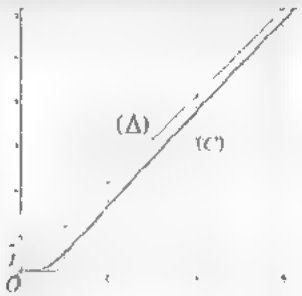
D'où la droite (Δ) d'équation : $y = x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

3) Tableau de variations de f est le suivant (d'après 1) c) et 2) a)

x	0		$+\infty$
$f(x)$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

Le tracé de (C_f) :

On a la droite (Δ). $y = x$ est une asymptote oblique à (C_f)



Partie B

1) Montrons que f est dérivable à droite en 0

Soit $x \in]0;+\infty[$; on a : $\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = \left(1+\frac{2}{nx}\right)e^{-\frac{2}{x}}$

On pose : $X = -\frac{2}{x}$

On a alors : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{X\to-\infty}\left(1-\frac{1}{n}X\right)e^X - \lim\limits_{X\to-\infty}\left(e^X - \frac{1}{n}Xe^X\right) - 0$

(car : $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$)

Donc f_n est dérivable à droite en 0.

2) Étudions les variations de f_n sur $\mathbb{R}^+$

• Limites : On pose $X = -\frac{2}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to 0}\left(-\frac{2}{X}+\frac{2}{n}\right)e^X = +\infty$ (car : $\lim\limits_{X\to 0} -\frac{2}{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to 0} e^X = 1$)

- Variations

Soit $x \in]0;+\infty[$; on a $f'_n(x) = e^{-\frac{2}{x}} + \frac{2}{x^2}\left(x+\frac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{x}}$

donc $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f'_n(x) > 0$; par suite f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

- Tableau de variations de f_n est le suivant :

x	0		$+\infty$
$f'_n(x)$	0	$+$	
f_n	0	↗	$+\infty$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrons que l'équation : $f_n(x) = \frac{2}{n}$ admet une seule solution a_n sur $]0;+\infty[$

La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ (car elle est dérivable sur $\mathbb{R}^+$)

et f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $f_n(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$

donc : f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$

et puisque $\frac{2}{n} \in \mathbb{R}^+$, donc $\exists! a_n \in]0;+\infty[$; tel que $f_n(a_n) = \frac{2}{n}$

c'est-à-dire l'équation : $f_n(x) = \frac{2}{n}$ admet une seule solution a_n sur l'inter-

valle $]0;+\infty[$

b) Montrons que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\,.\,(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,.\,f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$

Soit $x > 0$; et $n \in \mathbb{N}^*$

On a : $f_n(x) = \left(x + \frac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{x}}$ et $f_{n+1}(x) = \left(x + \frac{2}{n+1}\right)e^{-\frac{2}{x}}$

D'où : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = e^{-\frac{2}{x}}\left(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n}\right)$

On a : $-\frac{2}{x} < 0 \Rightarrow e^{-\frac{2}{x}} < 1$

Et : $\frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}$ (car : $n+1 > n$)

D'où : $\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} < 0$

Ainsi : $e^{-\frac{2}{x}}\left(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n}\right) > \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n}$

Donc : $f_{n+1}(x) - f_n(x) > \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n}$

D'où : $f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$

Conclusion $(\forall x > 0)\,;(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\, f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$

c) Déduisons que $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante puis qu'elle est convergente

On a : $(\forall x \in]0;+\infty[)\,;(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\, f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$

Et puisque $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\, a_n > 0$

On peut remplacer x par le nombre a_n, et on obtient :

$f_{n+1}(a_n) - \frac{2}{n+1} > f_n(a_n) - \frac{2}{n}$

or $f_n(a_n) = 0$, donc $f_{n+1}(a_n) > -\frac{2}{n+1}$

et on a $f_{n+1}(a_{n+1}) = -\frac{2}{n+1}$

On conclut que : $f_{n+1}(a_n) > f_{n+1}(a_{n+1})$

et puisque la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

alors $a_n > a_{n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, d'où la suite (a_n) est décroissante.

On a : (a_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente

d) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; na_n = 2e^{\frac{2}{a_n}} - 2$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $f_n(a_n) = \frac{2}{n} \Leftrightarrow (a_n + \frac{2}{n}) e^{\frac{2}{a_n}} = \frac{2}{n}$

$$\Leftrightarrow a_n + \frac{2}{n} = \frac{2}{n} e^{\frac{2}{a_n}}$$

$$\Leftrightarrow a_n = \frac{2}{n}(e^{\frac{2}{n}} - 1)$$

$$\Leftrightarrow na_n = 2e^{\frac{2}{n}} - 2$$

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; na_n = 2e^{\frac{2}{a_n}} - 2$

a) Montrons que $a = 0$

On a $a > 0$ car $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $a_n > 0$ supposons que: $a > 0$

On a : $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$, d'où : $\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{a_n} = \frac{2}{a}$, et puisque la fonction $x \longmapsto e^x$

est continue en $\frac{2}{a}$;

alors : $\lim_{n \to +\infty} e^{\frac{2}{a_n}} = e^{\frac{2}{a}}$

or $a_n = \frac{2}{n} e^{\frac{2}{a_n}} - \frac{2}{n}$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n} = 0$ donc ; $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ contradiction avec $a > 0$

Donc: $a = 0$

Exercice 32

1) * Calcu ons $\lim_{x \to -\infty} f_n(x)$

On a : $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$, et la fonction exponentielle népérienne est continue en 0 ;

donc : $\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$; d'où $\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} - n = 1 - n$ et $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$

par suite : $\lim_{x \to -\infty} f_n(x) = 0$

* Calculons : $\lim_{x \to 0} f_n(x)$

On a : $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$; donc : $\lim_{x \to 0} f_n(x) = +\infty$

* Calculons $\lim_{x \to 0} f_n(x)$

On a : $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; donc : $\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = +\infty$

* Calculons $\lim_{x \to +\infty} f_n(x)$

On a . $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, et la fonction exponentielle néperienne est continue en 0 ;

donc : $\lim_{-\infty} e^x - e^x - 1$

Et puisque $\begin{cases} \lim_{-\infty} e^x - n - 1 = n \\ \lim_{-\infty} x = +\infty \end{cases}$; alors : $\lim_{-\infty} f(x) = 0$

2) a) Variations de c_n

La fonction c_n est dérivable sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$, $c_n'(x) = e^x \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$

$= e\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x}\right)$

$= \left(\frac{2x+1}{x}\right)e$

Donc le signe de $c_n'(x)$ dépend de celui de $x(2x+1)$

Et on a $\lim_{-\infty} c_n(x) = \lim_{-\infty} n - e^x - \frac{1}{x}e^x = n - 1$

$\lim_{-\infty} c_n(x) = \lim_{-\infty} n - \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^x = n - 1$

$\lim_{-\infty} c_n(x) = \lim_{-\infty} n - \left(1 + \frac{1}{x}\right)e = +\infty$

$\lim_{+\infty} c_n(x) = \lim_{+\infty} n - (1 + 1)\frac{1}{x}e^x = n$ (car $\lim_{+\infty} \frac{1}{x}e^x = \lim_{+\infty} Xe^{-X} = 0$)

D'ou le tableau de variations

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$c_n'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	
$c_n(x)$	$n-1$	↗	$n + e^{-\frac{1}{2}}$	↘	n	↗	$+\infty$

b) Montrons que $(\forall x \in]0; +\infty[, c_n(x) > 0$

On a la fonction c_n est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$, donc sa restriction sur l'intervalle $]0; +\infty[$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, n-1[$

On a $n - 1 > 0$ car $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ d'où $0 \in]-\infty, n-1[$, par suite 0 admet ...

seul antécédent x_n d'où : $(\exists! x_n \in]0,+\infty[)\ ;\ c_n(x_n)=0$

c) Déduisons le signe de $c_n(x)$; $x \in \mathbb{R}^*$

D'après le tab eau de variations de c_n ; on en déduit que :

$(\forall x \in]-\infty,0[)\ c_n(x)>0$, (car ; $n-1>0$ et $n>0$)

et la fonction c_n est strictement croissante sur $]0,+\infty[$; donc elle est strictement croissante sur chaque des intervalles $]0,x_n[$ et $]x_n;+\infty[$

Donc : $(\forall x \in]0,x_n[)\ c_n(x)<c_n(x_n)$ et $(\forall x \in]x_n;+\infty[)c_n(x)>c_n(x_n)$

c'est-à-dire : $(\forall x \in]0,x_n[)c_n(x)<0$ et $(\forall x \in]x_n,+\infty[)\ c_n(x)>0$

Résumé :

- $c_n(x)>0$ pour tout x de $]-\infty;0[\cup]x_n;+\infty[$
- $c_n(x)<0$ pour tout x de $]0,x_n[$

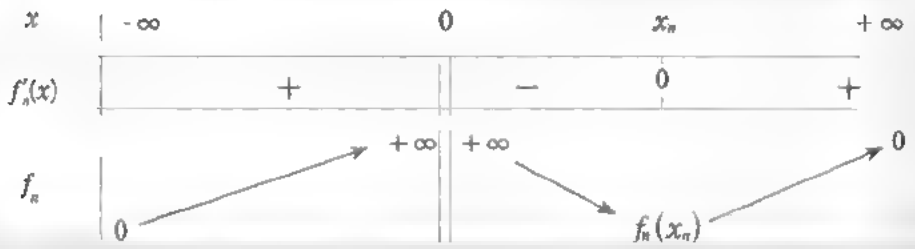
3)a) Tableau de variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}^*$

Et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^*);\ f_n'(x)=\dfrac{x\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)-e^{\frac{1}{x}}+n}{x^2}=\dfrac{-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x}}+n}{x^2}$

$$=\frac{n-\left(\frac{1}{x}+1\right)e^{\frac{1}{x}}}{x^2}=\frac{c_n(x)}{x^2}$$

D'après a question 2) c) , on en déduit que le signe de $f_n'(x)$ dépend du signe de $c_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$

Tableau de variations de la fonction f_n est le suivant :



b) Montrons que $f_n(x_n)<0$

La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $[x_n;+\infty[$

Donc la restriction sur l'intervalle $[x_n ; +\infty[$ réalise une bijection de $[x_n ; +\infty[$ vers J tel que : $J = f_n([x_n ; +\infty[) = [f_n(x_n); \lim_{x\to+\infty} f_n(x)[= [f_n(x_n); 0[$

Et puisque : $[x_n ; +\infty[\neq \phi$ alors $[f_n(x_n); 0[\neq \phi$; d'où : $f_n(x_n) < 0$

* Déduction : La fonction f_n est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0;x_n[$ donc la restriction sur l'intervalle $]0,x_n[$ est une bijection de $]0;x_n[$ vers un intervalle J tel que :

$$J = f_n(]0;x_n[) =]f_n(x_n); \lim_{x\to 0} f_n(x)[=]f_n(x_n); +\infty[$$

Et puisque $f_n(x_n) < 0$; alors $0 \in]f_n(x_n), +\infty[$; donc 0 admet un seul antécédent α_n sur l'intervalle $]0;x_n[$, d'où : $(\exists!\alpha_n \in]0;x_n[) ; f_n(\alpha_n) = 0$

4) a) Montrons que $x_n = \dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{nx_n}{1+x_n}\right)}$

On a : $c_n(x_n) = 0 \Leftrightarrow n - \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)e^{x_n} = 0$

$$\Leftrightarrow n - \left(1+\frac{1}{x_n}\right)e^{\frac{1}{x_n}}$$

$$\Leftrightarrow \ln(n) = \ln\left(1+\frac{1}{x_n}\right) + \frac{1}{x_n}$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{x_n} - \ln(n) - \ln\left(1+\frac{1}{x_n}\right) - \ln n \quad \ln\left(\frac{x_n+1}{x_n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_n} - \ln\left(\frac{nx_n}{1+x_n}\right)$$

$$\Leftrightarrow x_n = \frac{1}{\ln\left(\dfrac{nx_n}{1+x_n}\right)}$$

b) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \{1\})$; $x_{n+1} < x_n$ en utilisant le raisonnement par l'absurde.

On suppose que : $(\exists n \in \mathbb{N}^* - \{1\}); x_{n+1} > x_n$

La fonction c_n est strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$

donc : $x_{n+1} > x_n \Rightarrow c_n(x_{n+1}) > c_n(x_n)$

$$\Rightarrow n - \left(1+\frac{1}{x_{n+1}}\right)e^{\frac{1}{x_{n+1}}} > 0$$

$$\Rightarrow n > \left(1+\frac{1}{x_{n+1}}\right)e^{\frac{1}{x_{n+1}}} \qquad (1)$$

D'autre part ; on a : $c_{n+1}(x_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow n+1-\left(1+\frac{1}{x_{n+1}}\right)e^{\frac{1}{x_{n+1}}} = 0$

$$\Leftrightarrow n+1 = \left(1+\frac{1}{x_{n+1}}\right)e^{\frac{1}{x_{n+1}}} \quad (2)$$

d'après (1) et (2) on déduit que : $n > n+1$ ce qui est absurde donc :

$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})\ x_{n+1} \leq x_n$, par conséquent la suite (x_n) est décroissante.

on sait que : $(\forall n \in IN^* - \{1\})x_n > 0$; Donc la suite (x_n) est minorée par 0 ; d'où elle est convergente.

c) Determinons $\lim_{n} x_n$

On a (x_n) est une suite convergente , on pose $\lim x_n = \ell$ avec $\ell > 0$

On suppose que : $\ell > 0$

on a $\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{1+x_n} = \frac{\ell}{1+\ell}$ et la fonction ln est continue au point $\frac{\ell}{1+\ell}$

Donc : $\lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{x_n}{1+x_n}\right) = \ln\left(\frac{\ell}{1+\ell}\right)$;

d'où : $\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln\left(\frac{nx_n}{1+x_n}\right)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln(n)+\ln\left(\frac{x_n}{1+x_n}\right)} = 0$

Donc $\ell = 0$ ce qui est en contradiction avec $\ell > 0$

Et puisque $\ell \geq 0$ alors $\ell = 0$ donc : $\lim_{n} x_n = 0$

5- Position relative de (Γ_2) et (Γ_3):

Soit $x \in \mathbb{R}^*$; on a : $f_3(x) - f_2(x) = \frac{e^x - 3}{x} - \frac{e^x - 1}{x}$

Le tableau suivant résume la position relative de [illegible]

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_3(x) - f_2(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	
Position relative de (Γ_3) et (Γ_2)	(Γ_3) est au dessus de (Γ_2)			(Γ_3) est au dessous de (Γ_2)	

2 Calcul intégral

Ma i.

Résumé

1 Intégrale d'une fonction sur intervalle

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, et F une de ses fonctions primitives sur $[a;b]$.

Le nombre $F(b) - F(a)$ est appelé intégrale de f de a à b.

Ce nombre est noté $\int_a^b f(x)\,dx$ et ce lit «intégrale de a à b $f(x)dx$».

Notation:

$\int_a^b f(x)\,dx$ se note aussi $[F(x)]$ et on a : $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Remarque

Dans l'écriture $\int_a^b f(x)\,dx$, on peut remplacer la variable x par n'importe qu'elle autre variable c'est-à-dire : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(s)\,ds =$.

Conséquence

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a,b]$ telle que f' soit continue sur $[a;b]$

  On a : $\int_a^b f'(x)\,dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$

- Pour tout réel k on a: $\int_a^b k\,dx = [kx]_a^b = k(b-a)$

  Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ on a : $\int_a^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

et $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2 Relation de Chasles - Linéarité de l'intégrale

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et a, b et c sont

trois éléments de I et k un nombre réel.

- Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
- Linéarité: $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

et $\int_a^b (k\,f)(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

Exercices d'application

Exercice 1

Déterminer les fonctions primitives de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants

1) $f(x) = x^3(x^4-1)^7$; $I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x-3)^2}$; $I =]1; +\infty[$

3) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}} + \sqrt{x+2}$; $I = [0; +\infty[$

4) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$; $I = \mathbb{R}$

5) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$; $I = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$

Exercice 2

Déterminer une fonction primitive de la fonction f sur un intervalle I, puis déduire l'ensemble des fonctions primitives de f sur I, dans chacun des cas suivants.

1) $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$; $I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \dfrac{2}{x^2} - x$; $I =]0; +\infty[$

3) $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 + x + 1}{x^5}$; $I =]-\infty; 0[$

4) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$; $I =]0; +\infty[$

5) $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$; $I = [0, +\infty[$

6) $f(x) = \sin x \cos x$; $I = \mathbb{R}$

7) $f(x) = \tan^2 x$; $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes

$I_1 = \int_0^1 (x-2)(x^2-4x+1)^3 dx$; $I_2 = \int_1^2 \frac{t^3}{(t^2+2)^2} dt$

$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$; $I_4 = \int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}\, dx$

$I_5 = \int_2^3 \frac{2x}{(x-1)(x+2)} dx$; $I_6 = \int_{-3}^0 \frac{x^2}{(x-1)^2} dx$

$I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x).\sin x dx$; $I_8 = \int_1^e \frac{2}{x(1+\ln x)^3} dx$

$I_9 = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx$; $I_{10} = \int_0^1 (2^x - 3^x) dx$

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes:

$I = \int_0^{\pi} \sin(x).|\cos x| dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$ et $K = \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$

Exercice 5

Calculer les intégrales I et J telles que:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{1+2\sin x} dx \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx$$

(On pourra calculer la somme $I+J$)

Exercice 6

Soit f la fonction numérique définie par: $f(x) = \frac{x}{1+x+x^2+x^3}$

1) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que:

$$(\forall x \in D)\ ;\ f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x+1}$$

3)Pour tout réel α de l'intervalle $[1; +\infty[$ on pose: $I(\alpha) = \int_1^{\alpha} f(x) dx$

a) Calculer en fonction de α l'intégrale $I(\alpha)$;

b) Déterminer: $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} I(\alpha)$

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on pose: $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2} dx$ et $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2} dx$

Calculer I_0 , $I_0 + I + I_2$ et $I_0 + 2I_1$ en déduire la valeur de chacune des intégrales I_1 et I_2.

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=e^{-x}.\ln(1+e^{x})$

Soit α un nombre réel, on pose $I(\alpha)=\int_{0}^{\alpha}f(x)dx$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

2) a) Calculer l'intégrale $\int_{0}^{\alpha}\frac{1}{1+e^{x}}dx$ en fonction α.

b) Calculer $f(x)+f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$, en déduire $I(\alpha)$ en fonction de α.

c) En déduire $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}I(\alpha)$

Solutions

Dans tout ce qui suit, l'ensemble $\{F_\alpha/\alpha\in\mathbb{R}\}$ désigne l'ensemble des fonctions primitives de f sur l'intervalle I.

info: les fonctions primitives de la fonction: $x\mapsto(ax+b)^r$ sur I sont les fonctions: $x\mapsto\frac{1}{a(r+1)}(ax+b)^{r+1}+k$ tels que $r\in\mathbb{Q}^*-\{-1\}$; $ax+b>0$ pour tout x de I et $k\in\mathbb{R}$.

info Les fonctions primitives de la fonction: $x\mapsto u'(x)(u(x))^r$ sur un intervalle I $x\mapsto\frac{1}{r+1}(u(x))^{r+1}+k$ où I est un intervalle sur le quel u est derivable et positive et $r\in\mathbb{Q}^*-\{-1\}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

Déterminons les fonctions primitives de la fonction $f:x\mapsto x^3(x^4-1)^2$; $I=\mathbb{R}$

pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $u(x)=x^4-1$

on a. $(\forall x\in\mathbb{R})$; $u'(x)=4x^3$ donc $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(x)=\frac{1}{4}u'(x).(u(x))^2$

d'où: $(\forall x\in\mathbb{R})$; $F_\alpha(x)=\frac{1}{12}(u(x))^3+\alpha$

c'est-à-dire: $(\forall x\in\mathbb{R})$; $F_\alpha(x)=\frac{1}{12}(x^4-1)^3+\alpha$

Determinons les fonctions primitives de la fonction $f:x\mapsto\frac{x+1}{(x^2+2x-3)^2}$; $I=]1;+\infty[$

On pose $u(x)=x^2+2x-3$ pour tout x de I. On a: $(\forall x\in I)$; $u'(x)=2(x+1)$

donc $(\forall x \in I)$; $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{u'(x)}{(u(x))^2}\right)$

d'où: $(\forall x \in I)$; $F_\alpha(x) = \frac{-1}{2(x^2+2x-3)} + \alpha$

Déterminons les fonctions primitives

de la fonction f définie par:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + \sqrt{x+2}$; $I = [0; +\infty[$

On a: $(\forall x \in I)$; $f(x) = (2x+1)^{-\frac{1}{2}} + (x+2)^{\frac{1}{2}}$

donc $(\forall x \in I)$; $F_\alpha(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2} + \alpha$

Déterminons les fonctions primitives de la fonction $f: x \mapsto \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$

On a: $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$ et $I = \mathbb{R}$. On pose $u(x) = x^2 + 1$

On a: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $u'(x) = 2x$ donc $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) = \frac{1}{2}u'(x).(u(x))^{\frac{1}{3}}$

d'où $(\forall x \in \mathbb{R})$; $F_\alpha(x) = \frac{1}{2}.\frac{1}{1-\frac{1}{3}}(u(x))^{1-\frac{1}{3}} + \alpha$

c'est-à-dire $(\forall x \in \mathbb{R})$; $F_\alpha(x) = \frac{3}{4}(x^2+1)^{\frac{2}{3}} + \alpha = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+1)^2} + \alpha$

Déterminons les fonctions primitives de la fonction f définie sur I par:

$f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ et $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

on pose $u(x) = \cos x$ donc $(\forall x \in I)$; $u'(x) = -\sin x$

d'où $(\forall x \in I)$; $f(x) = -\frac{u'(x)}{(u(x))^3} = -u'(x) \times \left(u(x)\right)^{-3}$

par conséquent: $(\forall x \in I)$; $F_\alpha(x) = \frac{1}{2\cos^2 x} + \alpha$

Exercice 3

Dans tout ce qui suit; F est une fonction primitives de f sur I et F_α designe toute les fonctions primitives de f sur I (où $\alpha \in \mathbb{R}$)

$f(x) = 2x^3 - 4x + 1$; $I = \mathbb{R}$

on a: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $F(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + x$ et $(\forall x \in \mathbb{R})$; $F_\alpha(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + x + \alpha$

$f(x) = \frac{2}{x^2} - x$; $I =]0; +\infty[$

On a: $(\forall x \in I)$; $F(x) = -\frac{2}{x} - \frac{x^2}{2}$ donc: $(\forall x \in I)$; $F_\alpha(x) = -\frac{2}{x} - \frac{x^2}{2} + \alpha$

$f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 + x + 1}{x^5}$; $I =]-\infty; 0[$

On a: $(\forall x \in I)$; $f(x) = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{x^5}$

donc $(\forall x \in I)$; $F(x) = -\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{3x^3} - \dfrac{1}{4x^4}$

doù $(\forall x \in I)$; $F_\alpha(x) = -\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{3x^3} - \dfrac{1}{4x^4} + \alpha$

$f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $I =]0; +\infty[$

On a: $(\forall x \in I)$; $F(x) = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x}$

$= \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}$

donc: $(\forall x \in I)$; $F_\alpha(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + \alpha$

; $f(x) = x^2 - \sqrt[3]{x}$; $I = [0; +\infty[$

On a: $(\forall x \in I)$; $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$

donc: $(\forall x \in I)$; $F_\alpha(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + \alpha$

$f(x) = \sin x \cos x$; $I = \mathbb{R}$

On a: $(\forall x \in IR)$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x)$ donc $(\forall x \in IR)$; $F(x) = -\dfrac{1}{4}\cos(2x)$

d'où $(\forall x \in IR)$; $F_\alpha(x) = -\dfrac{1}{4}\cos(2x) + \alpha$

$f(x) = \tan^2 x$; $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$

On a: $(\forall x \in I)$; $f(x) = (1 + \tan^2 x) - 1$

donc $(\forall x \in I)$; $F(x) = \tan(x) - x$ d'où $(\forall x \in I)$; $F_\alpha(x) = \tan(x) - x + \alpha$

• Calculons I_1

$I_1 = \int_0^1 (x-2)(x^2 - 4x + 1)^3 dx$

On pose ; $u(x) = x^2 - 4x + 1$, on a: $u'(x) = 2x - 4 = 2(x-2)$

donc $I_1 = \int_0^1 \dfrac{1}{2}u'(x)(u(x))^3 dx = \left[\dfrac{1}{2}\dfrac{(u(x))^4}{4}\right]_0^1$

$= \left[\dfrac{1}{8}(x^2 - 4x + 1)^4\right]_0^1 = 2 - \dfrac{1}{8} = \dfrac{15}{8}$

• Calculons I_2 : $I_2 = \int_1^2 \dfrac{t^3}{(t^4 + 2)^2} dt$

On pose $u(t) = t^4 + 2$ donc $u'(t) = 4t^3$

d'où: $I_2 = \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{u'(t)}{(u(t))^2}dt = \frac{1}{4}\left[\frac{-1}{u(t)}\right]_1^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{t^4+2}\right]_1^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{18}\right) = \frac{5}{72}$

• Calculons I_3: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(1 - \sin^2 x)\,dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \cos x \sin^2 x)\,dx$$

$$= \left[\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

• Calculons I_4: $I_4 = \int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$

posons $u(x) = x^2 + 1$ donc $u'(x) = 2x$

d'où: $I_4 = \int_0^1 \frac{1}{2}u'(x)(u(x))^{\frac{1}{3}}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(u(x))^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_0^1$

$$= \frac{3}{8}\left[(x^2+1)^3\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \frac{3}{8}(2^3\sqrt{2} - 1)$$

• Calculons I_5: $I_5 = \int_2^3 \frac{2x}{(x-1)(x+2)}dx$

On a: $2(x-1)+(x+2) = 3x$

donc $I_5 = \frac{2}{3}\int_2^3 \frac{2(x-1)+(x+2)}{(x-1)(x+2)}dx = \frac{2}{3}\int_2^3 \left(\frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-1}\right)dx$

$$= \frac{2}{3}\left[2\ln|x+2| + \ln|x-1|\right]_2^3 = \frac{2}{3}\left[\ln(x+2)^2|x-1|\right]_2^3$$

$$= \frac{2}{3}(\ln 50 - \ln 16)$$

$$I_5 = \frac{2}{3}\ln\left(\frac{25}{8}\right)$$

• Calculons I_6

On a: $I_6 = \int_{-3}^0 \frac{x^2}{(x-1)^2}dx = \int_{-3}^0 \frac{(x-1)(x+1)+1}{(x-1)^2}dx$

$$= \int_{-3}^0 \left(\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)dx = \int_{-3}^0 \left(1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$$

donc $I_6 = \left[x + 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1}\right]_{-3}^0$

$$I_6 = 1 - \left(-3 + 2\ln 4 + \frac{1}{4}\right)$$

$$I_6 = \frac{15}{4} - 4\ln 2$$

• Calculons I_7: $I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(x)\,dx$

On a: $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

donc $\sin x \cos(2x) = \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x)$

d'où $I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\sin 3x - \sin x)\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\cos(3x) + \cos(x)\right]_0^{\pi}$

$= -\frac{1}{2}\left(0 - \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3}$

par conséquent $I_7 = -\frac{1}{3}$

• Calculons I_8 : $I_8 = \int_1^e \frac{2}{x(1+\ln x)^3}dx$

On pose $u(x) = 1 + \ln x$ donc $u'(x) = \frac{1}{x}$; d'où $I_8 = 2\int u'(x)(u(x))^{-3}dx$

$$I_8 = 2\left[\frac{-1}{2(u(x))^2}\right]_1^e = \left[\frac{-1}{(u(x))^2}\right]_1^e = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

• Calcuons I_9 : $I_9 = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx = \int_0^1 \frac{1+e^x-e^x}{e^x+1}dx$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right)dx = \left[x - \ln(e^x+1)\right]_0^1$$

$$= 1 - \ln(e+1) + \ln 2 = \ln\left(\frac{e}{e+1}\right) + \ln 2$$

par conséquent $I_9 = \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$

• Calculons I_{10} : $I_{10} = \int_0^1 (2^x - 3^x)dx = \int_0^1 (e^{x\ln 2} - e^{x\ln 3})dx$

$$= \left[\frac{1}{\ln 2}e^{x\ln 2} - \frac{1}{\ln 3}e^{x\ln 3}\right]_0^1 = \left(\frac{2}{\ln 2} - \frac{3}{\ln 3}\right) - \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3}\right)$$

donc: $I_{10} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 3}$

Calculons I

on a:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		$+$	0	$-$	

et on a $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x|\cos x|dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x|\cos x|dx$ (d'après la relation de Chasles)

donc: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(2x)dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2}\sin(2x)dx$

$$= \left[-\frac{1}{4}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\frac{1}{4}\cos(2x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 1$$

• Calculons: $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$

Utilisons une intégration par parties,

on a: $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \\ v(x) = x \end{cases}$ donc $\begin{cases} u(x) = \tan x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$; les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

donc : $J = [x \tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx - [x \tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos'(x)}{\cos(x)} dx$

$= [x \tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [\ln(\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

• Calculons $K = \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2} dx$

On pose $x = 2\sin t$ donc: $dx = (2\cos t)dt$

(Remarquer que la fonction sin est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1; 1]$)

on a: $x = 2 \iff \sin t = 1 \iff t = \frac{\pi}{2}$

et $x = -2 \iff \sin t = -1 \iff t = -\frac{\pi}{2}$

donc: $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4\sin^2 t}\, 2\cos t dt = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\, dt$ (car $4 - 4\sin^2 t = 4\cos^2 t$)

$= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = 2\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= 2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$

Exercice 5

D'après la linéarité de l'intégrale on a: $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x) + \sin(2x)}{1 + 2\sin x} dx$

et puisque: $\cos x + \sin(2x) = \cos x + 2\cos x \sin x = \cos x(1 + 2\sin x)$

alors: $\frac{\cos x + \sin(2x)}{1 + 2\sin x} = \cos x$ donc: $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

d'autre part ona: $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \frac{u'(x)}{u(x)} dx$ où $u(x) = 1 + 2\sin x$

donc $J = \left[\frac{1}{2}\ln|u(x)|\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{1}{2}\ln(1 + 2\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\ln 3$

et puisque: $I + J = 1$ alors ; $I = 1 - J = 1 - \frac{1}{2}\ln 3$

d'où: $I = \ln e - \ln\sqrt{3} = \ln\left(\frac{e}{\sqrt{3}}\right)$ et $J = \ln\sqrt{3}$

Exercice 6

1) Déterminons D

Soit x un nombre réel, on a: $x \in D \iff 1 + x + x^2 + x^3 \neq 0$

$\iff (1 + x) + x^2(1 + x) \neq 0$

$\iff (1 + x)(1 + x^2) \neq 0$

$\iff x \neq -1$

donc: $D = \mathbb{R} - \{-1\}$

2)Déterminons les réels a, b et c

Soit $x \in D$ on a: $\frac{ax + b}{x^2 + 1} + \frac{c}{x + 1} = \frac{(ax + b)(x + 1) + c(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x + 1)}$

$= \frac{(a + c)x^2 + (a + b)x + b + c}{1 + x + x^2 + x^3}$

donc: $(\forall x \in D)\ ;\ \frac{x}{1 + x + x^2 + x^3} = \frac{(a + c)x^2 + (a + b)x + b + c}{1 + x + x^2 + x^3}$

se qui entraine: $\begin{cases} a + c = 0 \\ a + b = 1 \\ b + c = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire: $\begin{cases} a + c = 0 \\ a - b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$

donc: $a = \frac{1}{2}$ $b = \frac{1}{2}$ $c = -\frac{1}{2}$

d'où $(\forall x \in D)\ ;\ f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x + 1}{x^2 + 1} - \frac{1}{1 + x}\right)$

3) a) Calculons $I(\alpha)$ où $I(\alpha) = \int_1^{\alpha} f(x)dx$

Soit $x \in D$ on a:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x + 1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{2x}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{x + 1}\right)$$

donc: $I(\alpha) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + Arc\tan(x) - \ln|1 + x|\right]_1^{\alpha}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln(1 + \alpha^2) + Arc\tan(\alpha) - \ln(1 + \alpha) - \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{4} + \ln(2)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{1 + \alpha}\right) + Arc\tan(\alpha) - \frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}\right)$

d'où: $I(\alpha) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1 + \alpha^2}{(1 + \alpha)^2}\right) + \frac{1}{2}Arc\tan(\alpha) - \frac{\pi}{8} + \frac{\ln\sqrt{2}}{2}$

b) Calculons $\lim_{\alpha \to +\infty} I(\alpha)$:

on a $\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{1 + \alpha^2}{(1 + \alpha)^2} = \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\alpha^2}{\alpha^2} = \lim_{\alpha \to +\infty} 1 = 1$ et la fonction ln est continue en 1,

donc: $\lim_{\alpha \to +\infty} \ln\left(\frac{1+\alpha^2}{(1+\alpha)^2}\right) = \ln(1) = 0$

et $\lim_{\alpha \to +\infty} Arc\tan\alpha = \frac{\pi}{2}$ d'où: $\lim_{\alpha \to +\infty} I(\alpha) = -\frac{\ln(\sqrt{2})}{2} + \frac{\pi}{8}$

Exercice 7

• Calculons I_0 :

Soit $x \in [0;1]$ on a: $\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right)}$

$$= \frac{4}{3}\frac{1}{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}$$

Utilisons une intégration par changement de variable.

On pose $t = \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$ donc $dt = \frac{2\sqrt{3}}{3}dx$ c'est-à-dire $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt$

et on a: $t = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = 0$ et $t = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1$

donc: $I_0 = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}dx = \frac{4}{3}\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}dt = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[Arc\tan(t)\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}.\pi}{9}$$

d'où: $I_0 = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$

• Calculons $I_0 + I_1 + I_2$ (utilisons la linéarité de l'intégrale)

on a: $I_0 + I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx + \int_0^1 \frac{x}{x^2+x+1}dx + \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+x+1}dx$

$$= \int_0^1 \frac{x^2+x+1}{x^2+x+1}dx - \int_0^1 1.dx = [x]_0^1 = 1$$

donc $I_0 + I_1 + I_2 = 1$

• Calculons $I_0 + 2I_1$

on a: $I_0 + 2I_1 = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \int_0^1 \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}dx$

$$= \left[\ln(x^2+x+1)\right]_0^1 = \ln(3)$$

donc: $I_0 + 2I_1 = \ln(3)$

• Déduisons la valeur de I_1 :

On a: $I_0 + 2I_1 = \ln 3$ et $I_0 = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi$; donc: $I_1 = \frac{1}{2}\ln(3) - \frac{1}{2}I_0$

d'où: $I_1 = \ln(\sqrt{3}) - \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$

•Determinons la valeur de I_2 :

on a: $I_0 + I_1 + I_2 = 1$ donc $I_2 = 1 - I_0 - I_1 = 1 - \ln(\sqrt{3}) + \frac{\pi\sqrt{3}}{18} - \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$

d'où: $I_2 = 1 - \ln(\sqrt{3}) - \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$

1) • Calculons $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a: $f(x) = \frac{\ln(1+e^x)}{1+e^x} \cdot \frac{1+e^x}{e^x}$

On pose: $t = 1 + e^x$, on a: $x \to +\infty \Longleftrightarrow t \to +\infty$

donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{1+e^x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$

on a: $\lim_{x \to +\infty} \frac{1+e^x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} (1+e^{-x}) = 1$ donc: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

• Calculons: $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

on pose: $t = e^x$ on a: $x \to -\infty \Longleftrightarrow t \to 0$ donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

2) a) Calculons l'intégrale: $\int_0^\alpha \frac{1}{1+e^x}dx$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$ on a: $\frac{1}{1+e^x} = \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$

donc

$$I = \int_0^\alpha \frac{1}{1+e^x}dx = \int_0^\alpha \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = \left[x - \ln(1+e^x)\right]_0^\alpha = \alpha - \ln(1+e^\alpha) + \ln(2)$$

d'où: $\int_0^\alpha \frac{1}{1+e^x}dx = \alpha + \ln\left(\frac{2}{1+e^\alpha}\right)$

b) Calculons: $f(x) + f'(x)$

• La fonctions f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a:

$$(\forall x \in \mathbb{R});\ f'(x) = -e^{-x}.\ln(1+e^x) + e^{-x}.\frac{e^x}{1+e^x} = -f(x) + \frac{1}{1+e^x}$$

donc $(\forall x \in \mathbb{R});\ f(x) + f'(x) = \frac{1}{1+e^x}$

•Déduisons $I(\alpha)$ en fonction de α

ona: $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f(x) = f'(x) + \frac{1}{1+e^x}$ donc: $\int_0^\alpha f(x)dx = \int_0^\alpha \left(f'(x) + \frac{1}{1+e^x} \right) dx$

c'est-à-dire:

$$I(\alpha) = -\int_0^\alpha f'(x)dx + \int_0^\alpha \frac{1}{1+e^x}dx = -\left[f(x)\right]_0^\alpha + \alpha + \ln\left(\frac{2}{1+e^\alpha}\right)$$

$$= -f(\alpha) + \ln(2) + \alpha + \ln\left(\frac{2}{1+e^\alpha}\right) = \alpha + \ln\left(\frac{2}{1+e^\alpha}\right) + \ln(2) - \frac{\ln(1+e^\alpha)}{e^\alpha}$$

d'où: : $I(\alpha) = \ln(2) + \alpha + \ln\left(\frac{2}{1+e^\alpha}\right) - \frac{\ln(1+e^\alpha)}{e^\alpha}$

c) Calculons $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} I(\alpha)$

on a: $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} (-f(\alpha)) = 0$ et $\alpha + \ln\left(\frac{2}{1+e^\alpha}\right) = \ln(e^\alpha) + \ln\left(\frac{2}{1+e^\alpha}\right) = \ln\left(\frac{2e^\alpha}{1+e^\alpha}\right)$

et puisque: $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \frac{2e^\alpha}{1+e^\alpha} = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{2t}{1+t} = 2$ (on pose: $t = e^\alpha ; \alpha \to +\infty \iff t \to +\infty$)

alors: $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \ln\left(\frac{2e^\alpha}{1+e^\alpha}\right) = \ln(2)$ donc $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} I(\alpha) = 2\ln 2$

3 Intégrale et ordre

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b sont deux éléments de I.

- Si $a \leq b$ et f est positif sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Si $a \leq b$ et $(\forall x \in [a;b])\ ; f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
- Si $a \leq b$ alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

4 Valeur moyenne

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b sont deux éléments de I tels que $a < b$.

Il existe au moins un élément de l'intervalle $[a;b]$ tel que:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est appelé la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$.

Exercices d'application

Exercice 9

On pose $I = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+x} dx$

1) a) Montrer que: $(\forall t \in \mathbb{R}^+)$; $1 - t \leq e^{-t} \leq 1$

b) En déduire que: $(\forall x \in [0;1])$; $1 - x < e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2}$

2) a) Vérifier que: $(\forall x \in [0;1])$; $\frac{x^4}{1+x} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x}$

b) En déduire que: $\frac{1}{2} \leq I \leq \frac{5}{24} + \frac{\ln 2}{5}$

Exercice 10

Soit f et g les fonctions définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par:

$f(x) = \sqrt{x - \ln(1+x)}$ et $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \ ; \ x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

1) a) En utilisant le théorème de la moyenne, montrer que:

$$(\forall x \in]0; +\infty[) \ ; \ f(x) - g(x) > 0$$

b) Montrer que g est continue à droite en $x_0 = 0$ et que $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

2) Vérifier que: $g'(x) = \frac{f(x) - g(x)}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$;

En déduire la monotonie de g.

Exercice 11

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose: $I_n = \int_0^1 x^n \tan x\,dx$ et $J_n = \int_0^1 x^{n+1}.(1 + \tan^2 x)\,dx$

1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $I_n = \frac{1}{n+1}.\tan(1) - \frac{1}{n+1} J_n$

2) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $0 < J_n < \frac{\tan^2(1)+1}{n+2}$ et en déduire $\lim_{n \to +\infty} J_n$.

3) Calculer $\lim_{n \to +\infty} n.I_n$

Exercice 12

1) a) Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $0 \leq \ln(1+x) \leq x$

b) En déduire: $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \ln(1 + x^n)\,dx$

2) On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ ; \ u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$$

a) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$

b) En déduire: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n.u_n$

Exercice 7

1) a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}x - \tan x$$

b) Montrer que: $\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right)$; $0 \le \tan x \le \frac{4}{\pi}x$

2) On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)dx$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

a) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \le I_n \le \frac{\pi}{4(n+1)}$

b) En déduire: $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

Exercice 8

Soit f la fonction numérique définie par: $f(x) = 1 - \frac{e^x}{x}$

1) Étudier les variations de f.

2) Construire $(\mathcal{C})$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3) On pose: $I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$

a) Vérifier que: $(\forall x \in \mathbb{R}-\{1\})$; $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}$

b) En déduire que: $I = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^k e^x dx\right) + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^n e^x}{1-x}dx$

c) Montrer que: $\left(\forall x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]\right)$; $1 \le f(x) \le 2\sqrt{e}$

d) En déduire que:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{0}^{\frac{1}{2}} x^k e^x dx\right) + \frac{1}{(n+1)2^{n-1}} \le I \le \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{0}^{\frac{1}{2}} x^k e^x dx\right) + \frac{2\sqrt{e}}{(n+1)2^{n+1}}$$

Solutions

Exercice 9

1) a) Montrons que: $(\forall t \in \mathbb{R}^+)$; $1 - t \le e^{-t} \le 1$

- Soit t un nombre réel on a: $t \ge 0 \Leftrightarrow -t \le 0 \Leftrightarrow e^{-t} \le 1$
- Soit φ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par: $\varphi(t) = e^{-t} + t - 1$

On a: φ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $(\forall t \in \mathbb{R}^+)$; $\varphi'(t) = -e^{-t} + 1$

On a: $\varphi'(t) > 0$ pour tout t de $\mathbb{R}^+$;donc la fonction φ est croissante sur $\mathbb{R}$,

d'où $(\forall t \in \mathbb{R}^+)$; $\varphi(t) \geq \varphi(0)$

par suite $(\forall t \in \mathbb{R}^+)$; $e^t \geq 1 - t$ (car $\varphi(0) = 0$).

finalement $(\forall t \in \mathbb{R}^+)$; $1 - t \leq e^{-t} \leq 1$

b) Déduction

Soit x un élément de $[0;1]$ on a: $(\forall t \in [0;x])$; $1 - t < e^{-t} \leq 1$

donc: $\int_0^x (1-t)\,dt \leq \int_0^x e^{-t}dt \leq \int_0^x 1.dt$

et puisque $\int_0^x (1-t)\,dt = \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^x = x - \frac{x^2}{2}$ et $\int_0^x e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = -e^{-x} + 1$

et $\int_0^x 1.dt = x$

alors: $x - \frac{x^2}{2} \leq -e^{-x} + 1 \leq x$ c'est-à-dire: $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$

donc $(\forall x \in [0;1])$; $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$

2. a) Vérifions que: $(\forall x \in [0;1])$; $\frac{x^4}{x+1} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{x+1}$

Soit x un élément de $[0;1]$; on a:

$$x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x} = \frac{x^3(1+x) - x^2(1+x) + (x-1)(x+1) + 1}{1+x}$$

$$= \frac{x^3 + x^4 - x^2 - x^3 + x^2 - 1 + 1}{1+x} = \frac{x^4}{1+x}$$

b) Déduction

Soit x un élément $[0;1]$; on a: $x^2 \in [0;1]$, et d'après la question 1) b)

on a: $1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}$ et puisque $x + 1 > 0$

alors: $\frac{1-x^2}{1+x} \leq \frac{e^{-x^2}}{x+1} < \frac{1-x^2}{1+x} + \frac{x^4}{2(x+1)}$

c'est-à-dire. $1 - x \leq \frac{e^{-x^2}}{x+1} \leq 1 - x + \frac{1}{2}.\frac{x^4}{x+1}$

donc $\int_0^1 (1-x)\,dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{x+1}dx \leq \int_0^1 \left(1 - x + \frac{1}{2}.\frac{x^4}{x+1}\right)dx$

d'où $\int_0^1 (1-x)\,dx < I \leq \int_0^1 (1-x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^4}{x+1}dx$

et puisque: $\int_0^1 (1-x)\,dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

et $\int_0^1 \frac{x^4}{x+1}dx = \int_0^1 \left(x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x}\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|\right]_0^1 = -\frac{7}{12} + \ln 2$

alors: $\frac{1}{2} < I < \frac{1}{2} - \frac{7}{24} + \frac{\ln 2}{2}$ c'est-à-dire $\frac{1}{2} \leq I \leq \frac{5}{24} + \frac{\ln 2}{2}$

Exercice 4

1) a)Soit x un élément de $]0;+\infty[$

On a: f est continue sur l'intervalle $]0;x[$, donc

$(\exists c \in]0;x[)\ ;\ \int_0^x f(t)\,dt = (x-0)f(c)$ (d'après le théorème de la moyenne

c'est à dire: $(\exists c \in]0;x[)\ ;\ \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = f(c)$

donc: $(\exists c \in]0;x[)\ ;\ g(x) = f(c)$

d'autre part, f est dérivable sur $]0;+\infty[$

et $(\forall x \in]0;+\alpha[)\ ;\ f'(x) = \frac{1-\frac{1}{1+x}}{2\sqrt{x-\ln(1+x)}} = \frac{x}{2(1+x)\sqrt{x-\ln(1+x)}}$

donc $(\forall x \in]0;+\alpha[)\ ;\ f'(x) \geq 0$ et $\left(f'(x)=0 \Longleftrightarrow x=0\right)$

d'où f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

et puisque: $0 < c < x$ alors $f(c) < f(x)$ c'est à dire $g(x) < f(x)$ (car $g(x) = f(c)$) donc $f(x) - g(x) > 0$

d'où: $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ;\ f(x) - g(x) > 0$

b)Montrons que g est continue à droite en zéro

Soit x un élément de l'intervalle $]0;+\infty[$ on a: $(\forall t \in [0;x])\ ;\ f(t) > 0$

donc $\int_0^x f(t)\,dt \geq 0$ d'où $g(x) \geq 0$

et d'après a) on a: $g(x) < f(x)$

donc: $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ;\ 0 \leq g(x) < f(x)$ et puisque $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ alors $\lim_{x \to 0^+} g(x) = 0$

d'où $\lim_{x \to 0^+} g(x) = g(0)$ c'est-à-dire g est continue à droite en $x_0 \quad 0$

• Montrons que: $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

on a: $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ;\ 0 \leq g(x) < f(x)$

donc $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ;\ 0 \leq \frac{g(x)}{x} < \frac{f(x)}{x}$

• Calculons: $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Soit x un élément de $]0; +\infty[$ on a:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x - \ln(1+x)}}{x} = \sqrt{\frac{x - \ln(1+x)}{x^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x^2}}$$

et puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x+1} = 0$ (en posant $X = x+1$)

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$

alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x^2}} = 0$

on a: $\begin{cases} (\forall x \in]0; +\infty[) \ ; \ 0 \leq \frac{g(x)}{x} < \frac{f(x)}{x} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

2)Vérifions que: $(\forall x \in]0; +\infty[) \ ; \ g'(x) = \frac{f(x) - g(x)}{x}$

Soit F la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

On a F est la fonction primitive de f sur $]0; +\infty[$ qui s'annule pour $x = 0$

donc F est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a: $(\forall x \in]0; +\infty[) \ ; \ F'(x) = f(x)$

• Soit x un élément et de $]0; +\infty[$ on a: $g(x) = \frac{F(x)}{x}$

donc $g'(x) = \frac{x.F'(x) - F(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x} \cdot \frac{F(x)}{x}$

$$= \frac{f(x)}{x} - \frac{g(x)}{x} = \frac{f(x) - g(x)}{x}$$

d'où: $(\forall x \in]0; +\infty[) \ ; \ g'(x) = \frac{f(x) - g(x)}{x}$

• Montonie de la fonction g

on a: $(\forall x \in]0; +\infty[) \ ; \ f(x) - g(x) > 0$

donc $(\forall x \in]0, +\infty[) \ ; \ g'(x) > 0$

et puisque g est continue à droite en 0, alors la fonction g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

1) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $I_n = \frac{1}{n+1}.\tan(1) - \frac{1}{n+1} J_n$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$,

Utilisons une integration par parties

on pose: $\begin{cases} u'(x) = x^n \\ v(x) = \tan x \end{cases}$ on a: $\begin{cases} u(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \\ v'(x) = 1 + \tan^2 x \end{cases}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0;1]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[0;1]$, donc:

$$I_n = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}.\tan x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n+1} x^{n+1}.(1+\tan^2 x)\,dx$$

$$= \frac{1}{n+1}.\tan(1) - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}.(1+\tan^2 x)\,dx$$

$$= \frac{1}{n+1}.\tan(1) - \frac{1}{n+1} J_n$$

d'où $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $I_n = \frac{1}{n+1}.\tan(1) - \frac{1}{n+1} J_n$

2) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $0 \le J_n \le \frac{\tan(1)+1}{n+2}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a: $(\forall n \in [0;1])$; $x^{n+1}.(1+\tan^2 x) \ge 0$

donc $\int_0^1 x^{n+1}.(1+\tan^2 x)\,dx \ge 0$ c'est-à-dire $J_n \ge 0$

et puisque la fonction tan est croissante alors,

$$0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le \tan(x) \le \tan(1)$$
$$\Rightarrow 1 + \tan^2 x \le 1 + \tan^2(.)$$

donc: $(\forall x \in [0;1])$; $x^{n+1}.(1+\tan^2 x) \le x^{n+1}.(1+\tan^2(1))$

d'où $\int_0^1 x^{n+1}.(1+\tan^2 x)\,dx \le \int_0^1 x^{n+1}.(1+\tan^2(1))\,dx$,

c'est-à-dire $J_n \le (1+\tan^2(1))\int_0^1 x^{n+1}dx$

et on a: $\int_0^1 x^{n+1}dx = \left[\frac{1}{n+2} x^{n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+2}$ donc: $J_n \le \frac{1}{n+2}.(1+\tan^2(1))$

d'où: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $0 \le J_n \le \frac{1}{n+2}.(1+\tan^2(1))$

• Déduction:

On a. $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $0 < J_n < \frac{1}{n+2}(1+\tan^2(1))$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+2}(1+\tan^2(1)) = 0$

donc $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$

2) Calculons $\lim_{n\to+\infty} nI_n$

d'après la question 1, on déduit que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $n.I_n \quad \frac{n}{n+1}\tan(1) - \frac{n}{n+1}J_n$

et on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$

donc: $\lim_{n\to+\infty} n.I_n = \tan(1)$

Exercice 12

On a: la fonction ln est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

donc: $x \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 1$

$\Rightarrow \ln(x+1) \geq \ln(1)$

c'est à dire: $\ln(1+x) \geq 0$ donc $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $0 \leq \ln(1+x)$ (1)

• Soit φ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par: $\varphi(x) = x - \ln(1+x)$

la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et on a:

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) \; ; \; \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

donc $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $\varphi'(x) \geq 0$ d'où φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

c'est à dire: $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $\varphi(x) \geq \varphi(0)$

par conséquent: $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $\ln(1+x) \leq x$ (2)

de (1) et (2) on déduit que: $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $0 \leq \ln(1+x) \leq x$

b) Deduction:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et x un réel de l'intervalle $[0;1]$

on a: $x^n > 0$ donc (d'après la question précédente): $0 < \ln(1+x^n) < x^n$

d'où: $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leq \int_0^1 x^n dx$

et puisque: $\int_0^1 x^n dx = \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{n+1}$ alors, $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n)dx < \frac{1}{n+1}$

donc $\begin{cases}(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ 0 \le \int_0^1 \ln(1+x^n)dx \le \frac{1}{n+1} \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)=0\end{cases}$

d'où (d'après les critères de convergence); $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0 \ln(1+x^n)dx - 0$

2) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ u_n - \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0 \ln(1+x^n)dx$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$; on a: $u_n = \int_0 \frac{x^n}{1+x^n}dx$ (utilisons une intégration

par parties)on pose $u'(x) = \frac{n.x^{n-1}}{1+x^n}$ et $v(x) = \frac{1}{n}x$

donc $u(x) = \ln(1+x^n)$ et $v'(x) = \frac{1}{n}$

On a: les fonctions u et v sont dérivables sur $[0;1]$ et u' et v' sont

continues sur $[0;1]$ donc $u_n = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 v'(x)u(x)dx$

c'est à dire, $u_n = \left[x.\ln(1+x^n)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n}.\ln(1+x^n)dx$

d'où: $u_n = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}.\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$

par conséquent: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ u_n = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}.\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$

b) Déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ u_n = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}.\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \ln(1+x^n)dx = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

• Déduisons: $\lim\limits_{n\to+\infty} n.u_n$

on a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ n.u_n = \ln(2) - \int_0^1 \ln(1+x^n)dx$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \ln(1+x^n)dx = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n.u_n = \ln(2)$

Exercice 11

1) Étudions les variations de f

On a: f est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$ (somme de deux fonctions dérivables sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$

et on a: $\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right[\right)\ ;\ f'(x) = \frac{4}{\pi} - (1+\tan^2 x)$

d'autre par la fonction f' est derivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ et on a:

$\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right)$; $f''(x) = -2\tan x(1+\tan^2 x)$

et puisque: $\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right)$; $\tan x \geq 0$ alors $\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right)$; $f''(x) \leq 0$

d'où le tableau de variations de f'

x	0		α		$\frac{\pi}{4}$
$f''(x)$	0	$-$			
f'	$\frac{4-\pi}{\pi}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\frac{4-2\pi}{\pi}$

On a: f' est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ et $f'(0)\times f'\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe α de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$ tel que: $f'(\alpha)=0$.

et puisque f' est strictement décroissante $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ alors α est unique,

donc $f'(x)\geq 0 \iff x\in[0;\alpha]$ et $f'(x)\leq 0 \iff x\in\left[\alpha;\frac{\pi}{4}\right]$

x	0		α		$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$	$+$		0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

b) Montrons que: $\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right)$; $0\leq \tan x < \frac{4}{\pi}x$

D'après le tableau de variatons de f on a: $\left(\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]\right)$; $f(x)\geq 0$

donc. $\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right)$; $\tan x \leq \frac{4}{\pi}x$ et $\left(\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]\right)$; $\tan x \geq 0$

d'où $\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right)$, $0\leq \tan x \leq \frac{4}{\pi}x$

2) a) Montrons: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $0\leq I_n \leq \frac{\pi}{4(n+1)}$

On a : $\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right)$; $0\leq \tan x \leq \frac{4}{\pi}x \Rightarrow \left(\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]\right)$; $0<\tan^n x \leq \left(\frac{4}{\pi}x\right)^n$

$$\Rightarrow 0\leq I_n \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n dx$$

$$\Rightarrow 0\leq I_n \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow 0\leq I_n \leq \frac{\pi}{4(n+1)}$$

(d'après les propriétés de l'ordre et l'intégral)

d'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{4(n+1)}$

b) Déduisons $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

On a $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $0 < I_n \leq \frac{\pi}{4(n+1)}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\pi}{4(n+1)} = 0$

et d'après les critéres de convergence on a: $\lim\limits_{n} I_n = 0$

Exercice 14

1) Étudions les variations de f :

- f est définie sur: $D =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$
- Les limites:

On a: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{1-x} = 0$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} = -\infty$

- Dérivation:

f est derivab.e sur D et on a: $(\forall x \in D)$; $f'(x) = \frac{e^x(1-x) + e^x}{(1-x)^2} = \frac{e^x(2-x)}{(1-x)^2}$

- Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	|	$+$		$+$	0	$-$	
f	| 0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	$-e^2$	↘	$-\infty$

2) Construction de la courbe $(\mathscr{C})$:

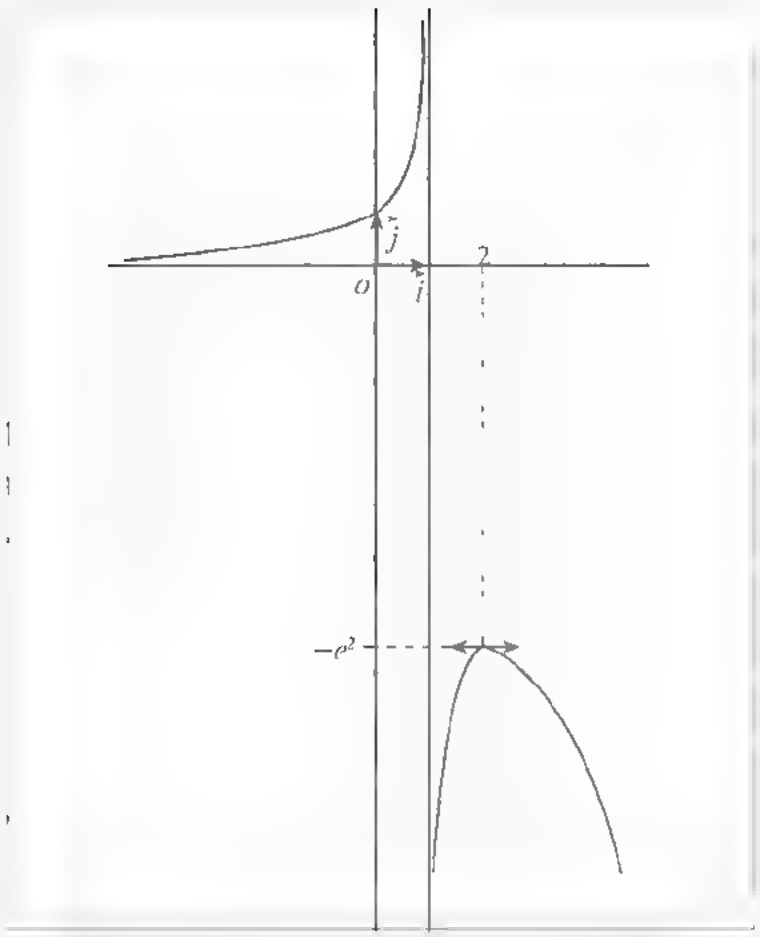
- On a: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptotea la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage des $-\infty$.

- On a: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ es une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

- On a: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} = -\infty$

Donc la courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction l'axe des

ordonnées au voisinage de $+\infty$.



3) a) Vérifions que: $(\forall x \in \mathbb{R}-\{1\})$; $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+...+x^{n-1}+\frac{x^n}{1-x}$

Soit $x \in D$; on a: $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$

donc: $(\forall x \in \mathbb{R}-\{1\})$;

b) Déduction:

on a: $e^x \times \frac{1}{1-x} = e^x(1+x+....+x^{n-1}) + \frac{e^x x^n}{1-x}$ donc $\frac{e^x}{1-x} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^x x^k\right) + \frac{e^x x^n}{1-x}$

donc $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^x}{1-x}dx = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\frac{1}{2}} e^x x^k dx\right) + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^x x^n}{1-x}dx$

c) Montrons que: $\left(\forall x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]\right)$; $1 \le f(x) \le 2\sqrt{e}$:

on a: f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$; donc

$\left(\forall x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]\right)$; $f(0) \le f(x) \le f\left(\frac{1}{2}\right)$ d'où $\left(\forall x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]\right)$; $1 \le f(x) \le 2\sqrt{e}$

c) Déduction:

Soit x un élément de $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, on a:

$$1 \le f(x) \le 2\sqrt{e} \Rightarrow x^n \le \frac{x^n e^x}{1-x} \le 2\sqrt{e}\,x^n$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n e^x}{1-x} dx \le 2\sqrt{e}\int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx$$

$$\rightarrow \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n e^x}{1-x} dx \le 2\sqrt{e}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n e^x}{1-x} dx \le \frac{2\sqrt{e}}{(n+1)2^{n+1}}$$

donc $\left(\sum_{k=0}^{n}\int_0^{\frac{1}{2}} x^k e^x dx\right) + \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \le I \le \left(\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\frac{1}{2}} x^k e^x dx\right) + \frac{2\sqrt{e}}{(n+1)2^n}$

5 [illegible] ntégrale

1) Utilisation des fonctions primitives

Cette technique consiste à l'utilisation du tableau des primitives (primitives des fonctions usuelles)

2) Intégration [illegible]

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$ telles que u et v' soient continues sur $[a;b]$.

On a : $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$

Cette égalité est dite formule de l'intégration par parties.

3) [illegible]

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et u une fonction dérivable sur un intervalle J telle que $u(J) \subset I$

- on a : $\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt \quad \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx$ pour tout α et β de J.
- Si u est une bijection de J vers I, alors pour tout a et b de I on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))u'(t)dt$$

Exercices d'application

Exercice 15

En utilisant une integration par parties, calculer les integrales suivantes:

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x.\cos(2x)\,dx$; $I_2 = \int_1^e (2x-1).\ln x dx$

$I_3 = \int_0^1 (x-2).e^x dx$; $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x.\sin x dx$

$I_5 = \int_0^1 x.Arc\tan x dx$; $I_6 = \int_1^{e^{\frac{\pi}{4}}} \cos(\ln t)\,dt$

$I_7 = \int_1^4 e^{\sqrt{x}} dt$; $I_8 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$; $I_9 = \int_1^e \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2} dt$

Exercice 16

Pour tout réel α de l'intervalle $]0;1]$, on pose $I(\alpha) = \int_\alpha^1 x.Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)dx$

1) Calculer en fonction de α l'intégrale $I(\alpha)$.

2) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} I(\alpha)$

Exercice 17

En utilisant une intégration par changement de variable, calculer les intégrales suivantes:

$I_1 = \int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{1+t} dt$ on pose $x = \sqrt{t}$

$I_2 = \int_3^{10} \frac{1+\sqrt{x-1}}{x-2} dx$ on pose $t = \sqrt{x-1}$

$I = \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{2t}{\cos^2(t^2)} dt$ on pose $x=t^2$

$I_3 = \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-4\sqrt{x}+5)}$ on pose $t = \sqrt{x}-2$

Exercice 18

1) Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale: $I = \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$

2) En déduire que: $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$

Exercice 19

On considère les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x.\ln(1+\cos x) dx$

En utilisant une intégration par parties, exprimer J en fonction de I ; puis calculer I et J.

Exercice

1) Montrer que: $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{1+t^2}dt = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x}{1+x^2}dx$ (on pourra poser $t = \frac{1}{x}$)

2) Calculer l'intégrale $J = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{t^2+t+1}dt$, en déduire la valeur de l'intégrale

$I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{1+t^2}dt$

Exercice 21

On considère les intégrales suivantes: $I = \int_{0}^{\pi} \cos^4 x dx$ et $J = \int_{0}^{\pi} \sin^4 x dx$

1) Montrer que: $I = \int_{0}^{\pi} \cos(x)(\cos x - \cos x \sin^2 x)dx$

2) a) Montrer que: $I = \int_{0}^{\pi} \sin^2 x dx - \frac{1}{3}J$ et $J = \int_{0}^{\pi} \cos^2 x dx - \frac{1}{3}I$

b) Montrer que: $I + J = \frac{3\pi}{4}$ et $I - J = 0$

c) En déduire la valeurs de chacune des intégrales I et J.

Exercice 22

On considère les intégrales suivantes

$I = \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx$; $J = \int_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$ et $K = \int_{0}^{1} \sqrt{x^2+2}\,dx$

Soit u la fonction numérique définie sur $[0;1]$ par $u(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$

1) Calculer $u'(x)$ pour tout x de l'intervalle $[0;1]$, en déduire la valeur de I

2) a) Vérifier que $J + 2I = K$

b) En utilisant une intégration par parties, montrer que: $K = \sqrt{3} - J$ et en déduire les valeurs de chacune des intégrales I et J.

Exercice 23

Soit F et f les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \text{ et } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

1) Montrer que la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2) En utilisant une intégration par changement de variable, calculer l'intégrale

$I = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

3) Calculer: $J = \int_{-1}^{0} \ln(x + \sqrt{x^2+1})dx$

Exercice 24

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par: $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}dt$

1) Montrer que F est une fonction paire.

2) a) Montrer que: $(\forall t \in IR_+^*)$, $\frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}} < \frac{1}{t^2}$, et en déduire que:

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \; ; \; 0 \le F(x) \le \frac{1}{2x}$$

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ puis $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$.

3) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $F'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Exercice 25

On considère la suite $(u_n)_{n\ge 2}$ définie par: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n = n\int_1^{\pi} \frac{\sin x}{x^n}dx$

1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$; $u_n = \frac{n}{n-1}\left(\sin(1) + \int_1^{\pi} \frac{\cos x}{x^{n-1}}dx\right)$

2) a) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\left|\int_1^{\pi} \frac{\cos x}{x^{n+1}}dx\right| \le \int_1^{\pi} \frac{1}{x^{n+1}}dx$

b) Montrer que: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sin(1)$

Solutions

Exercice 24

• Calculons I_1 :

On pose $u'(x) = \cos(2x)$ et $v(x) = x$ donc: $u(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ et $v'(x) = 1$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et u' et v' sont continues sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

donc: $I_1 = \left[\frac{x}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\left[\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$

• Calculons I_2

Posons $u'(x) = 2x - 1$ et $v(x) = \ln(x)$, donc $u(x) = x^2 - x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$

les fonctions u et v sont dérivables sur $[1;e]$ et u' et v' sont continues sur $[1;e]$ donc: $I_2 = \left[(x^2 - x)\ln x\right]_1^e - \int_1^e (x-1)dx$

$$= (e^2 - e) - \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^e = (e^2 - e) - \left(\frac{1}{2}e^2 - e - \frac{1}{2} + 1\right)$$

d'où: $I_2 = \frac{1}{2}e^2$

• Calculons I_3 :

On pose $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x - 2$ donc $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0;1]$ et u' et v' sont continues sur $[0;1]$

donc $I_3 = [(x-2)e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = -e + 2 - e + 1$ d'où: $I_3 = 3 - 2e$

• Calculons I_4

On pose $u'(x) = e^x$ et $v(x) = \sin(x)$ donc $u(x) = e^x$ et $v'(x) = \cos(x)$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

$$\text{donc } I_4 = [e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x . \cos x dx$$

c'est-à-dire: $I_4 = e^{\frac{\pi}{2}} - I'_4$ (1)

• Calculons I'_4 en utilisant une intégration par parties.

On pose $u'(x) = e^x$ et $v(x) = \cos x$ donc $u(x) = e^x$ et $v'(x) = -\sin x$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Les fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

donc $I'_4 = [e^x . \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x . \sin x dx$

c'est-à-dire: $I'_4 = -1 + I_4$ (2)

de (1) et (2) on déduit que: $I_4 = e^{\frac{\pi}{2}} + 1 - I_4$ donc $I_4 = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$

• Calculons I_5 :

On pose $u'(x) = x$ et $v(x) = Arc\tan(x)$ donc: $u(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$

et $v'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0;1]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[0;1]$

donc: $I_5 = \left[\frac{1}{2}(x^2 + 1)Arc\tan(x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 1 dx$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

d'où: $I_5 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

• Calculons I_6

On pose $u'(t) = 1$ et $v(t) = \cos(\ln t)$ donc $v'(t) = -\frac{1}{t}\sin(\ln t)$ et $u(t) = t$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $\left[1; e^{\frac{\pi}{2}}\right]$; les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[1; e^{\frac{\pi}{2}}\right]$

donc: $I_6 = \left[t\cos(\ln t)\right]_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} + \int_0^{e^{\frac{\pi}{2}}} \sin(\ln t)\,dt$ c'est-à-dire: $I_6 = -1 + I'_6$

• Calculons I'_6

On pose $u'(t) = 1$ et $v(t) = \sin(\ln t)$ donc $v'(t) = \frac{1}{t}\cos(\ln t)$ et $u(t) = t$

les fonctions u et v sont derivables sur $\left[1; e^{\frac{\pi}{2}}\right]$; les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[1; e^{\frac{\pi}{2}}\right]$

donc: $I'_6 = \left[t\sin(\ln t)\right]_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} - \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos(\ln t)\,dt$ c'est-à-dire: $I'_6 = e^{\frac{\pi}{2}} - I_6$ (2)

de (1) et (2) on déduit que: $I_6 = -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - I_6$ donc $I_6 = \frac{-1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$

• Calculons I_7 :

On a: $I_7 = \int_1^4 2\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{\sqrt{t}}dt$

On pose $u'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}e^{\sqrt{t}}$ et $v(t) = 2\sqrt{t}$ donc $u(t) = e^{\sqrt{t}}$ et $v'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $[1;4]$

Les fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle $[1;4]$

$I_7 = \left[2\sqrt{t}e^{\sqrt{t}}\right]_1^4 - 2\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{t}}e^{\sqrt{t}}dt = (4e^2 - 2e) - 2\left[e^{\sqrt{t}}\right]_1^4 = 4e^2 - 2e - 2(e^2 - e)$

d'où: $I_7 = 2e^2$

• Calculons I_8

On pose: $u'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et $v(x) = x^2$ donc $u(x) = \sqrt{1+x^2}$ et $v'(x) = 2x$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $\left[0;\sqrt{3}\right]$

;les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[0;\sqrt{3}\right]$ donc :

$I_8 = \left[x^2\sqrt{1+x^2}\right]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} 2x.\sqrt{1+x^2}\,dx$

$= 6 - \int_0^{\sqrt{3}} (1+x^2)'(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx = 6 - \left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}}.(1+x^2)^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^{\sqrt{3}}$

$= 6 - \frac{2}{3}\left[(\sqrt{x^2+1})^3\right]_0^{\sqrt{3}} = 6 - \frac{2}{3}(8-1)$

d'où: $I_8 = \frac{4}{3}$

• Calculons I_9

On pose $u'(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}(1+t^2)'(1+t^2)^{-2}$ et $v(t) = \ln t$

donc $u(t) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}$ et $v'(t) = \frac{1}{t}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $[1;e]$; les fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle $[1;e]$, donc

$$I_9 = \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln t}{1+t^2}\right]_1^e + \frac{1}{2}\int_1^e \frac{1}{t.(1+t^2)}dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2}\int_1^e \frac{1+t^2-t^2}{t(1+t^2)}dt$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2}\cdot\left(\int_1^e\left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right)dt\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2}\left[\ln(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\ln(1+e^2)\right) + \frac{1}{2}\ln 2\right]$$

d'où: $I_9 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{4}\ln(1+e^2) - \frac{1}{2(1+e^2)}$

Exercice

1) Calculons $I(\alpha)$ en fonction de α.

On utilise une integration par parties:

on pose: $u(x) = Arc\tan\frac{1}{x}$ et $v'(x) = x$

donc $u'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$ et $v(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x^2+1)$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $[\alpha;1]$; les fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle $[\alpha;1]$

donc: $I(\alpha) = \left[\frac{1}{2}(x^2+1)Arc\tan\frac{1}{x}\right]_\alpha^1 + \int_\alpha^1 \frac{1}{2}dx$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\alpha^2+1)Arc\tan\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha$$

d'où: $I(\alpha) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\alpha^2+1)Arc\tan\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha$

2) Calculons $\lim_{\alpha \to 0^+} I(\alpha)$

On a: $\lim_{\alpha \to 0^+}\frac{1}{\alpha} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} Arc\tan X = \frac{\pi}{2}$ donc $\lim_{\alpha \to 0^+} Arc\tan\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\pi}{2}$

donc $\lim_{\alpha} I(\alpha) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ d'où: $\lim_{\alpha} I(\alpha) = \frac{1}{2}$

• Calculons $I_1 = \int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{1+t} dt$

On pose $x = \sqrt{t}$ donc $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$ c'est-à-dire $dt = 2xdx$ et $t = x^2$

et on a: $\begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$

donc: $I_1 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x^2}{1+x^2} dx = 2\int_1^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$

$= 2[x - Arc\tan x]_1^{\sqrt{3}} = 2(\sqrt{3} - 1) - \frac{\pi}{6}$

• Calculons $I_2 = \int_5^{10} \frac{1+\sqrt{x-1}}{x-2} dx$

On pose $t = \sqrt{x-1}$ donc $dt = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} dx$ c'est-à-dire: $dx = 2tdt$ et $x - 2 = t^2 - 1$

on a: $\begin{cases} x = 5 \\ x = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 3 \end{cases}$

donc $I_2 = \int_2^3 \left(\frac{1+t}{t^2-1}\right)(2t) dt = 2\int_2^3 \frac{t}{t-1} dt = 2\int_2^3 \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) dt$

$= 2[t + \ln|t-1|]_2^3 = 2(1 + \ln 2)$

• Calculons $I_3 = \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{2t}{\cos^2(t^2)} dt$

On pose $x = t^2$ donc $dx = 2tdt$

on a: $\begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

donc $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$

• Calculons $I_4 = \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(x - 4\sqrt{x} + 5)}$

On pose $t = \sqrt{x} - 2$ donc $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ c'est-à-dire: $2dt = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

on a: $\begin{cases} x = 4 \\ x = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$

et puisque $x - 4\sqrt{x} + 5 = (\sqrt{x} - 2)^2 + 1 = t^2 + 1$

alors $I_3 = \int_4^9 \frac{1}{(\sqrt{x} - 2)^2 + 1} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{2}{t^2 + 1} dt = 2[Arc\tan t]_0^1 = \frac{\pi}{2}$

Exercice 11

1) Calculons I :

on a: $I = \int_0^1 \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} x dx$

$= \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{(1 + x^2)^2} x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{(1 + x^2)^2} x dx$

on pose: $\begin{cases} u'(x) = \frac{2x}{(1 + x^2)^2} \\ v(x) = x \end{cases}$ donc: $\begin{cases} u(x) = \frac{-1}{x^2 + 1} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $[0;1]$, es fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle $[0;1]$, donc on a:

$I = \frac{1}{2}[u(x)v(x)]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 u(x)v'(x)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{-x}{1+x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}[Arc\tan x]_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(Arc\tan(1) - Arc\tan(0)) = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$

d'où: $I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$

2) Déduction:

Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a: $\frac{1}{(1 + x^2)^2} = \frac{x^2 + 1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{x^2}{(1 + x^2)^2}$

donc: $\int_0^1 \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1 + x^2} - \frac{x^2}{(1 + x^2)^2}\right) dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx - \int_0^1 \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} dx$

$= [Arc\tan x]_0^1 - I = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$

Exercice 12

• Exprimons J en fonction de I : $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \ln(1 + \cos x) dx$

on pose $\begin{cases} u'(x) = \cos x \\ v(x) = \ln(1 + \cos x) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u(x) = \sin x \\ v'(x) = \frac{-\sin x}{1 + \cos x} \end{cases}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right[$; les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ donc:

$J = \left[\sin x \ln(1+\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} dx$ d'où: $J = \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) + I$

• Calculons J :

On a: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = (1-\cos x)(1+\cos x)$

donc $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos x) dx = \left[x - \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

on a $I = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ et puisque $J = \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) + I$ alors $J = \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

donc $J = \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(\frac{3}{2e}\right) + \frac{\pi}{3}$

Exercice 20

1) Montrons que: $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{1+t^3} dt = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x}{1+x^3} dx$

On pose: $t = \frac{1}{x}$ donc $dt = -\frac{1}{x^2} dx$ et $\begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

donc $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{1+t^3} dt = \int_{2}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^3} \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx$

$$= \int_2^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{x^3+1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \int_2^{\frac{1}{2}} -\frac{x}{x^3+1} dx$$

$$= -\int_2^{\frac{1}{2}} \frac{x}{x^3+1} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x}{x^3+1} dx$$

d'où: $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{1+t^3} dt = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x}{1+x^3} dx$

2) Calculons J et déduisons I

Soit t un élément de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$; on a:

$t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]$

c'est-à-dire: $t^2 - t + 1 = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t - \frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1\right]$

on pose: $x = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(t - \frac{1}{2}\right)$ donc: $dx = \frac{2}{\sqrt{3}} dt$ c'est-à-dire $dt = \frac{\sqrt{3}}{2} dx$

et $\begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$

donc $J = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{t^2 - t + 1} dt = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dt}{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t - \frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1\right]}$

$= \frac{4}{3} \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + x^2} dx = \frac{2\sqrt{3}}{3} [Arc\tan x]_0^{\sqrt{3}}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3} (Arc\tan(\sqrt{3}) - Arc\tan(0)) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$

d'où: $J = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$

• Déduction

d'après la question 1) on a: $I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{1 + t^3} dt = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x}{1 + x^3} dx$

soit x un élément de $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ on a:

$$\frac{x}{1 + x^3} = \frac{x + 1 - 1}{x^3 + 1} = \frac{x + 1}{x^3 + 1} - \frac{1}{x^3 + 1}$$

$$= \frac{x + 1}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} - \frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x^3 + 1}$$

donc $I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{1}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x^3 + 1}\right) dx$

$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x^2 - x + 1} dx - \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x^3 + 1} dx = J - I$

c'est-à-dire $2I = J$ d'où: $I = \frac{1}{2}J - \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$

1) Montrons que: $I = \int_0^{\pi} \cos(x)(\cos x - \cos x \sin^2 x) dx$

on a: $(\forall x \in [0; \pi]) : \cos^4 x - \cos^2 x(1 - \sin^2 x) = \cos x.(\cos x - \cos x.\sin^2 x)$

donc: $I = \int_0^{\pi} \cos x.(\cos x - \cos x.\sin^2 x) dx$

2) a) Montrons que: $I = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx - \frac{1}{3}J$

Utilisons une intégration par parties:

On pose: $u'(x) = \cos(x) - \cos x.\sin^2(x)$ et $v(x) = \cos x$,

donc: $u(x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$ et $v'(x) = -\sin x$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $[0; \pi]$; les fonctions u' et

v' sont continues sur $[0;\pi]$

donc: $I = \left[\left(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right).\cos x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\left(\sin^2 x - \frac{1}{3}\sin^4 x\right)dx$

$= \int_0^{\pi}\sin^2 x dx - \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\sin^4 x dx$

d'où: $I = \int_0^{\pi}\sin^2 x dx - \frac{1}{3}J$

• Montrons que: $J = \int_0^{\pi}\cos^2 x dx - \frac{1}{3}I$

on a: $(\forall x \in [0;\pi])$, $\sin^4 x - \sin^2 x(1 \quad \cos^2 x) - \sin x.(\sin x \quad \sin x\cos^2 x)$

donc: $J = \int_0^{\pi}\sin x\,(\sin x - \sin x.\cos^2 x)\,dx$

utilisons une intégration par parties pour calculer J

on pose: $u'(x) = \sin x - \sin x.\cos^2 x$ et $v(x) = \sin x$

donc $u(x) = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x$ et $v'(x) = \cos x$

les fonctions u et v sont dérivables sur $[0;\pi]$; les fonctions u' et v' sont continues sur $[0;\pi]$

donc $J = \left[\left(\quad \cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right)\sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(\quad \cos^3 x + \frac{1}{3}\cos^4 x\right)dx$

$= \int_0^{\pi}\cos^2 x dx - \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\cos^4 x dx$

d'où: $J = \int_0^{\pi}\cos^2 x dx - \frac{1}{3}I$

b) • Montrons que: $I + J = \frac{3\pi}{4}$

on a: $I + \frac{1}{3}J = \int_0^{\pi}\sin^2 x dx$ et $J + \frac{1}{3}I = \int_0^{\pi}\cos^2 x dx$

donc: $\frac{4}{3}(I + J) = \int_0^{\pi}(\cos^2 x + \sin^2 x)\,dx$

c'est-à-dire: $I + J = \frac{3}{4}\int_0^{\pi} 1\,dx - \frac{3}{4}[x]_0^{\pi} = \frac{3\pi}{4}$ d'où: $I + J = \frac{3\pi}{4}$

• Montrons que $I - J = 0$

on a: $I + \frac{1}{3}J = \int_0^{\pi}\sin^2 x dx$ et $J + \frac{1}{3}I = \int_0^{\pi}\cos^2 x dx$

donc $\left(I + \frac{1}{3}J\right) - \left(J + \frac{1}{3}I\right) = -\int_0^{\pi}(\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx$

c'est-à-dire: $\frac{2}{3}(I - J) = -\int_0^{\pi}\cos 2x dx = -\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\pi} = 0$

d'où $I-J=0$

c) Déduisons la valeur de I et la valeur de J

on a: $\begin{cases} I+J=\frac{3\pi}{4} \\ I-J=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 2I=\frac{3\pi}{4} \\ I=J \end{cases}$ d'où $I=J=\frac{3\pi}{8}$

1)Calculons $u'(x)$ pour tout x de $[0;1]$

La fonction u est dérivable sur $[0;1]$ et on a:

$$(\forall x\in[0;1]) \; ; \; u'(x)=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}}=\frac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}(x+\sqrt{x^2+2})}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$$

donc $(\forall x\in[0;1]) \; ; \; u'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

• Déduisons la valeur de I :

on a: $I=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx=\int_0^1 u'(x)dx=\left[u(x)\right]_0^1=u(1)-u(0)$

$$-\ln(1+\sqrt{3})-\ln(\sqrt{2})-\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)-\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)$$

donc: $I=\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)$

2) a) • Vérifions que: $J+2I=K$

on a: $J+2I=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx+\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x^2+2}}dx$

$$=\int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}dx=\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx=K$$

donc $J+2I=K$

b) • Montrons que: $K=\sqrt{3}-J$

on pose $u'(x)=1$ et $v(x)=\sqrt{x^2+2}$ donc $u(x)=x$ et $v'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0;1]$,et les fonctions u' et v' sont continues sur $[0;1]$ donc $K=\left[x\sqrt{x^2+2}\right]_0^1-\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx=\sqrt{3}-J$

d'où: $K=\sqrt{3}-J$

• Déduisons la valeur de chacune des ntégrales J et K.

on a: $\begin{cases} K - J = 2I \\ K + J = \sqrt{3} \end{cases}$ donc $\begin{cases} K = I + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ J = \frac{\sqrt{3}}{2} - I \end{cases}$

d'où: $K = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)$ et $J = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)$

1) Montrons que F est une fonction primitive de f sur $\mathbb{R}$

• La fonction: $u: x \mapsto x + \sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u(IR) \subset]0, +\infty[$

et la fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$, donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $F'(x) = \dfrac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = f(x)$

donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a: $(\forall x \in IR)$; $F'(x) = f(x)$

c'est-à-dire que la fonction F est une primitive de f

2) Calculons l'intégrale I

Soit x un réel, on a: $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$

on pose $t = x + 1$ donc $dx = dt$

et $\begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$ d'où. $I = \int_{-1}^{0} \dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}\,dx = \int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$

$= \int_0^1 f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_0^1 = F(1) - F(0) = \ln(1+\sqrt{2})$

par conséquent: $I = \ln(1+\sqrt{2})$

3) Calculons l'intégrale J

on a: $J = \int_{-1}^{0} \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$ et $u'(x) = 1$

En utilisant une intégration par parties ; on pose: $F(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

donc $F'(x) = f(x)$ et $u(x) = x$

les fonctions F et u sont dérivables sur l'intervalle $[0;1]$ et les fonctions

F et u' sont continues sur l'intervalle $[0;1]$

donc: $J = [u(x)F(x)]_1^0 - \int_1^0 u(x)f(x)\,dx \quad F(-1) \cdot \int_1^0 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$= \ln(-1+\sqrt{2}) - \int_{-1}^0 \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}dx$

$= \ln(-1+\sqrt{2}) - [\sqrt{1+x^2}]_1^0 = \ln(-1+\sqrt{2}) - (1-\sqrt{2})$

d'où: $J = \ln(-1+\sqrt{2}) - 1 + \sqrt{2}$

1) Montrons que F est une fonction impaire.

Soit $x \in \mathbb{R}$ on a: $(-x) \in \mathbb{R}$ et $F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}dt$

On pose $t = -u$ donc: $\begin{cases} t = -x \\ t = -2x \end{cases} \to \begin{cases} u = x \\ u = 2x \end{cases}$ et $dt = -du$

d'où: $F(-x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+u+u^2}}(-du) = -\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+u^2+u^4}}du = -F(x)$

Par suite: $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ -x \in \mathbb{R}$ et $F(-x) = -F(x)$

Par conséquent, F est une fonction impaire.

2) a)• Soit t un élément de $]0;+\infty[$, montrons que: $\frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}} < \frac{1}{t^2}$

on a: $1+t^2+t^4 \geq t^4$ donc $\sqrt{1+t^2+t^4} \geq \sqrt{t^4}$

c'est-à-dire: $\sqrt{1+t^2+t^4} \geq t^2 > 0$ donc: $\frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}} \leq \frac{1}{t^2}$

• Déduction:

Soit x un élément de $]0;+\infty[$, on a: $(\forall t \in [x;2x])\ ;\ 0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}} \leq \frac{1}{t^2}$

et la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue sur $[x;2x]$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$ est continue sur $[x;2x]$

donc , d'après l'ordre et l'intégrale , on a: $0 < \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}dt < \int_x^{2x} \frac{1}{t^2}dt$

et puisque: $\int_x^{2x} \frac{1}{t^2}dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$ alors: $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{2x}$

donc $(\forall x \in IR_+^*)\ ;\ 0 \leq F(x) \leq \frac{1}{2x}$

b) on a: $\begin{cases} (\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ ;\ 0 \leq F(x) \leq \frac{1}{2x} \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x} = 0 \end{cases}$

donc $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

• Calculons $\lim_{x \to +\infty} F(x)$

on pose $y = -x$ on a: $x \to -\infty \iff y \to +\infty$

donc $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{y \to +\infty} F(-y)$

$$= \lim_{y \to +\infty} -F(y) = -\lim_{y \to +\infty} F(y) = 0$$

3) La fonction $\varphi: t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Soit G une primitive de φ sur $\mathbb{R}$, donc G est dérivable sur $\mathbb{R}$.

et on a: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $F(x) = \left[G(t)\right]_x^{2x} = G(2x) - G(x)$

est puisque la fonction $u\ x \mapsto 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et la fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction Gou est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme difference de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$,

et on a: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $F'(x) = 2G'(2x) - G'(x)$

$$= 2\varphi(2x) - \varphi(x)$$

c'est-à-dire: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $F'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2+16x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$

Exercice 25

1) Montrons que: $\left(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\right)$; $u_n = \frac{n}{n-1}\cdot\left(\sin(1) + \int_1^\pi \frac{\cos x}{x^{n-1}}dx\right)$

Soit n un élément de $IN^* - \{1\}$, on pose $v(x) = \sin x$ et $u'(x) = \frac{1}{x^n}$

donc $u(x) = \frac{1}{-n+1}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}$ et $v'(x) = \cos x$

les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $[0;\pi]$, les fonctions u' et v' sont continues sur les intervalles $[0;\pi]$

donc $\int_1^\pi \frac{\sin x}{x^n}dx = \left[u(x)v(x)\right]_1^\pi - \int_1^\pi u(x)v'(x)dx$

$$= \left[\frac{-\sin x}{n-1}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}\right]_1^\pi - \int_1^\pi -\frac{\cos x}{n-1}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}dx$$

d'où $\int_1^\pi \frac{\sin x}{x^n}dx = \frac{\sin(1)}{n-1} + \frac{1}{n-1}\int_1^\pi \frac{\cos x}{x^{n-1}}dx$

donc pour tout n de $\mathbb{N}^*-\{1\}$ on a:

$$u_n = n\int_1^{\pi} \frac{\sin x}{x^n}\,dx = n\left(\frac{\sin(1)}{n-1} + \frac{1}{n-1}\int_1^{\pi} \frac{\cos x}{x^{n-1}}\,dx\right)$$

$$= \frac{n}{n-1}.\left(\sin(1) + \int_1^{\pi} \frac{\cos x}{x^{n-1}}\,dx\right)$$

2) a)Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\left|\int_1^{\pi} \frac{\cos x}{x^{n+1}}\,dx\right| \leq \int_1^{\pi} \frac{1}{x^{n+1}}\,dx$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a: $(\forall x \in [1;\pi]);\left|\frac{\cos x}{x^{n+1}}\right| \leq \frac{1}{x^{n+1}}$ (car: $|\cos x| \leq 1$ et $x^{n+1} > 0$)

donc: $\int_1^{\pi} \left|\frac{\cos x}{x^{n+1}}\right| dx \leq \int_1^{\pi} \frac{1}{x^{n+1}}\,dx$

et puisque: $\int_1^{\pi} \frac{\cos x}{x^{n+1}}\,dx \leq \int_1^{\pi} \left|\frac{\cos x}{x^{n+1}}\right| dx$ alors $\int_1^{\pi} \frac{\cos x}{x^{n+1}}\,dx \leq \int_1^{\pi} \frac{1}{x^{n+1}}\,dx$

d'où: $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\int_1^{\pi} \frac{\cos x}{x^{n+1}}\,dx \leq \int_1^{\pi} \frac{1}{x^{n+1}}\,dx$

b) Montrons que: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sin(1)$

on a:

$$\int_1^{\pi} \frac{1}{x^{n+1}}\,dx = \left[\frac{1}{2-n}x^{2-n}\right]_1^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n-2}(\pi^{2-n} - 1) = \frac{1}{n-2}\left(1 - \left(\frac{1}{\pi}\right)^{n-2}\right) = \frac{1}{n-2}\left(1 - \pi^{2-n}\right)$$

donc: $(\forall n \in \mathbb{N}^*-\{1;2\});\left|\int_1^{\pi} \frac{\cos x}{x^{n+1}}\,dx\right| \leq \frac{1}{n-2}\left(1 - \pi^{2-n}\right)$

et puisque: $-1 < \frac{1}{\pi} < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{n-2} = 0$

d'où: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-2}\left(1 - \pi^{2-n}\right) = 0 \times (1-0) = 0$ (car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-2} = 0$)

et d'après les critères de convergence: $\lim \int_1^{\pi} \frac{\cos x}{x^{n+1}}\,dx = 0$

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*-\{1\});u_n = \frac{n}{n-1}.\left(\sin(1) + \int_1^{\pi} \frac{\cos x}{x^{n+1}}\,dx\right)$

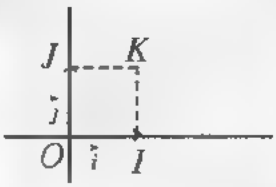
et $\lim \frac{n}{n-1} = \lim \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = 1$ donc $\lim u_n = 1 \times (\sin(1) + 0) = \sin(1)$

Propriété

Dans tout ce qui suit, le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

L'unité de mesure d'aire notée $u.a$ est l'aire du carré $OIKJ$ c'est-à-dire :

$u.a = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$



Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par (C_f) la courbe de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.

Si f est positive sur l'interva le $[a;b]$ alors : $\mathcal{A} = \left(\int_a^b f(x)dx\right)u.a$ (figure 1).

Si f est négative sur l'intervalle $[a;b]$ alors : $\mathcal{A} = -\left(\int_a^b f(x)dx\right)u.a$ (figure 2).

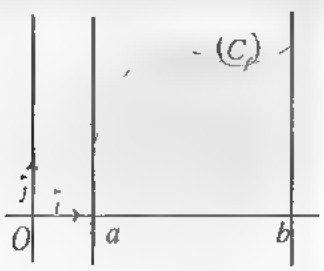


figure (1)

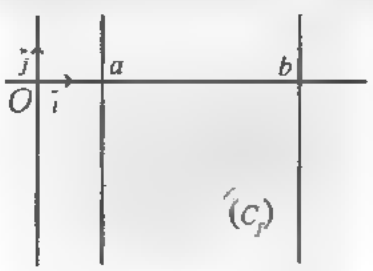


figure (2)

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.

L'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le nombre positif:

$\mathcal{A} = \left(\int_a^b |f(x)|dx u.a\right)$.

7 Méthodes et techniques

Propriété

Pour déterminer le signe de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ sans le calculer il faut :

Comparer les nombres a et b.

Déterminer le signe de f sur l'intervalle [a;b]

Appliquer la propriété de l'intégrale et relation d'ordre

Pour étudier la monotonie de la suite (I_n) définie par $I_n = \int_a^b f_n(x)\,dx$ (où f_n est une fonction continue sur $[a;b]$)

Calculer la différence $I_{n+1} - I_n$ à l'aide d'une seule intégale (utiliser la linéarité) $I_{n+1} - I_n = \int_a^b f_{n+1}(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b (f_{n+1}(x) - f_n(x))\,dx$

Déterminer le signe de l'intégrale obtenue.

Pour calculer $\int_a^b f(x)\,dx$ en utilisant sune intégration par parties:

Choisir deux fonctions u et v' telles que : $f = u \times v'$ (le choix doit être convenable et non au hasard),

Calculer u' la fonction dérivée de u et déterminer une fonction primitive v

Utiliser la propriété de l'intégration par parties (on peut utiliser l'intégration par parties plusieurs fois).

8 Limite d'une suite

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$

On pose : $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k.\frac{b-a}{n}\right)$ et $s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k.\frac{b-a}{n}\right)$

Les suites $(S_n)_n$ et (s_n) sont convergentes et admettent la même limite ℓ telle que $\ell = \int_a^b f(x)\,dx$.

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$. (C_f) et (C_g) sont leurs courbes representatives des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

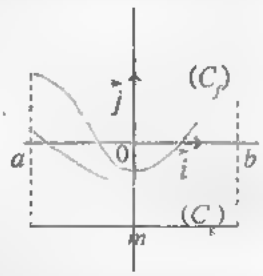
L'aire du domaine plan délimité par (C_f) , (C_g) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le nombre $\int_a^b |f(x) - g(x)\,dx$ exprimé en unité de mesure d'aires.

Sur la figure ci-contre, (C_f) est au dessus de (C_g),

donc : $(\forall x \in [a;b]) ; f(x) > g(x)$

d'où :

$\int^{\wedge} f(x) \quad g(x)|dxua = \int_a^b (f(x) - g(x))dx\ ua$



L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

L'unité de mesure de volumes est : $u.v = \|\vec{i}\|\|\vec{j}\|\|\vec{k}\|$.

Propriété

Soit S un solide délimité par les plans (P_1) et (P_2) d'équations $z = a$ et $z = b$ $(a < b)$ et soit $S(t)$ l'aire de la partie représentant l'intersection du solide S avec le plan d'équation $z = t$ avec $a \le t \le b$; Si la fonction définie sur l'intervalle $[a;b]$ par: $t \mapsto S(t)$ est continue sur $[a\ b]$ alors le volume du solide S est $V = \left(\int_a^b S(t)dt\right)u.v$.

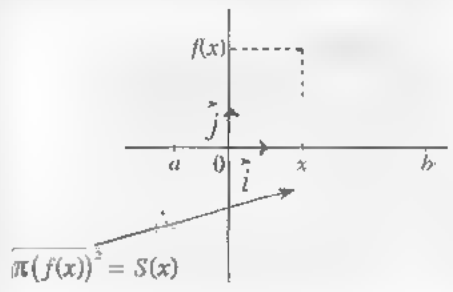
Propriété

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$

Le volume du solide engendré par un tour complet de la courbe (C_f) autour de l'axe des abscisses est :

$V = \left(\int_a^b \pi(f(x))^2\,dx\right)u.v$



Exercices d'application

Exercice 26

1) En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale:

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$$

2) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par: $u_n = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{(n^2+k^2)^3}}$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Solution

1) Calculer l'intégrale: $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$

2) Soit $(u_n)_{n>}$ la suite numérique définie par:

$$(\forall n \in IN^*); u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{\sqrt{n+k}}$$

Calculer: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Solutions

Solution

1) Calculons l'intégrale: $I = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$

on pose: $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \\ v(x) = x^2 \end{cases}$ donc: $\begin{cases} u(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1+x^2}} \\ v'(x) = 2x \end{cases}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $[0;1]$; les fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle $[0;1]$

et d'après la propriété de l'integration par partie, on a:

$$I = \left[\frac{-x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$= \left[\frac{-x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right]_0^1 + 2\left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1$$

d'où: $I = \left[\frac{2+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right]_0^1 = \frac{3}{\sqrt{2}} - 2 = \frac{3\sqrt{2}-4}{2}$

Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ où $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{\sqrt{(n^2+k^2)^3}}$

on a. $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^3}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^3}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

où $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

on a: f est continue sur $[0,1]$ et $(\forall x \in [0;1])$; $f'(x) = \frac{3x^2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$

donc f est strictement croissante sur $[0;1]$

d'où (d'après la propriété des sommes de Riemann) la suite $(u_n)_n$ est convergente et sa limite est égale à $\int_0^1 f(x)\,dx$

donc: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{3\sqrt{2}-4}{2}$

On a

1) Calculons l'intégrale I

Soit x un élément de l'intervalle $[0;1]$; on a:

$\frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{x+1-1}{\sqrt{1+x}} = \sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} = (x+1)'(x+1)^{\frac{1}{2}} - (x+1)'(x+1)^{-\frac{1}{2}}$

donc: $I = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x+1)^{\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(x+1)^{-\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1}\right]_0^1$

$= \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2}\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{4}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Donc: $I = \frac{4}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}$

2) Calculons $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a: $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{n+k}} = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$

$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1-0}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(0+\frac{k(1-0)}{n}\right)$

où $(\forall x \in [0;1])$; $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$

On a f est continue sur $[0;1]$ et $f'(x) = \frac{x+2}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}$ pour tout x de l'intervalle $[0;1]$ donc f est strictement croissante sur $[0;1]$ d'où d'après la propriété des sommes de Riemann on a : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(x)\,dx$ par conséquent $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Exercices de synthèse

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par: $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$, et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) a) Dresser le tableau de variations de f

b) Construire la courbe $(\mathscr{C})$.

2) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose: $I_n = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$

a) En utilisant une intégration par parties, calculer I_1

b) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); I_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{e^2} + (n+1)I_n$, et en déduire la valeur de chacune des intégrales I_2, I_3 et I_4.

Exercice 29

On considère la suite numérique (u_n) definie par:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$$

1) a) Calculer u_1.

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n), en déduire qu'elle est convergente

2) a) Montrer que: $(\forall x \in [1, e]); 0 < \ln x \leq \frac{x}{e}$

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$, déterminer une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1}

b) Vérifier que: $u_2 = \frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}$

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} n u_n$

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^n x} dx$

1)Déterminer les nombres réels a et b telsque:

$$\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right); \frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x}$$

En déduire la valeur de l'intégrale I_1.

2) Calculer I_2.

3) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$; déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}

b) En déduire la valeur de chacune des inégrales I_3 , I_4 et I_5 .

[redacted]

1) Soit g la fonction numérique de la variable x définie par:

$$g(x) = \frac{1}{x}.\ln(1+\tan x)$$

a) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction g .

b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x \to 0}(1+\tan x)^{\frac{1}{x}}$

2) a) Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$.

Montrer que: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

b) En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$

Exercice 32

1) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[0;a]$ telle que: $a \in \mathbb{R}^*$.

Montrer que: $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

2) En utilisant la question1); calculer les intégrales suivantes:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx \ ; \qquad J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx \ ; \quad K = \int_0^{\pi} \frac{x.\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

Remarque: Pour l'intégrale J , on pourra poser $t = Arc\tan x$

Exercice 33

On pose: $I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-x)^2}dx$ et $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2}-x\right)^n}{(1-x)^{n+2}}dx$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

1) a) Calculer I_0

b) En posant $t = 1-x$ calculer I_1 .

2) a) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $I_n = \frac{-1}{(n+1).2^{n+1}} + \frac{n}{n+1}.I_{n-1}$

b) En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $I_n = \frac{1}{(n+1).2^n}$

Exercice

1) a) Vérifier que:

$$(\forall t \in IR - \{-1;1\}); \frac{2t^2}{1-t^4} = \frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)} - \frac{1}{1+t^2}$$

b) En déduire la valeur de α sachant que: $\alpha = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2t^2}{1-t^4}\,dt$

2) Soit h la fonction définie sur $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ par: $h(t) = \ln\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$

a) Calculer $h'(t)$ pour $t \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

b) En utilisant une intégration par parties ; montrer que:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \ln\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)dt = 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{3}\ln 2$$

3) Soit g la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2};1\right]$ par: $\begin{cases} g(x) = \dfrac{\ln(x)}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} \\ g(1) = 0 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue à gauche en 1.

b) Vérifier que: $\int_{\frac{1}{2}}^{1} g(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\cos u)}{1+\cos u}\,du$

c) Calculer en fonction de α l'intégrale $I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} g(x)\,dx$

Exercice 35

1) a- Vérifier que : $(\forall t \in IR - \{-1\}); \frac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}$

b- Calculer l'intégrale : $I = \int_1^2 \frac{t^3}{t+1}dt$

2) Calculer l'intégrale : $J = \int_0^{\sqrt{63}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^2+1}}dx$, (poser: $t = \sqrt[6]{x^2+1}$).

Exercice 36

On pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x}dx$

1) Soit x un élément de $\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$; montrer que :

$$\frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \frac{1}{\cos^2(2x)}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}\tan^2(2x)}\right)$$

2) En posant $t = \tan(2x)$, Calculer l'intégrale I .

Exercice 37

1) On pose : $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^4 x + \sin^4 x - 1} dx$

a- Vérifier que : $(\forall x \in IR)$; $\cos^6 x + \sin^4 x - 1 = 2\cos^2(x)(\cos^2 x - 1)$

b- Vérifier que : $(\forall t \in IR^* - \{-1; 1\}); \frac{1}{t^2(t^2 - 1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) - \frac{1}{t^2}$

c- En posant : $t = \cos x$, calculer l'intégrale I .

2) On pose : $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x \cos x}{1 + \cos^2(2x)} dx$

a- En posant : $t = \cos(2x)$. Montrer que : $J = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1} \frac{1-t}{1+t^2} dt$

b- En déduire que : $J = \frac{\pi}{16}$.

Exercice 38

1) En posant $t = \frac{1}{x}$, calculer $I = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

2) En posant $t = \sqrt{e^x - 1}$ calculer l'intégrale $J = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$

3) On considère l'intégrale : $K = \int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{26}} \frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^2}}$

a- Déterminer les réels a , b et c tels que : $\frac{t}{t^3 - 1} = \frac{a}{t-1} + \frac{bt + c}{t^2 + t + 1}$ pour tout t de $\mathbb{R} - \{1\}$

b- En déduire que : $\frac{1}{t^3 - 1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t-1}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{2t+1}{t^2+t+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2+t+1}\right)$

c- Déterminer une primitive de la fonction $u: t \mapsto \frac{1}{t^2 + t + 1}$

d- En posant $t = \sqrt[3]{1 + x^2}$, calculer l'intégrale K.

Exercice 39

1) a- Vérifier que : $(\forall t \in]0; +\infty[)$; $\frac{t^4 - t^3}{1+t} = t^3 - 2t^2 + 2t - 2 + \frac{2}{t+1}$

b) En posant $t = \sqrt[4]{x+1}$, calculer l'intégrale : $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x+1}} dx$

2) a- Vérifier que : $(\forall t \in]0; +\infty[)$ $\frac{t^2 + 2t + 2}{t(t+1)} = 1 + \frac{2}{t} - \frac{1}{t+1}$

b) En posant $t = \sqrt{x^2 + 2x + 2} + x$,

calculer l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin(2n+1)x}{2\sin x} \; ; \; x \neq 0 \\ f(0) = \dfrac{2n+1}{2} \end{cases}$$

1) a- Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f

b- Montrer que f est continue au point $x_0 = 0$

2) a- Montrer que f admet une fonction primitive sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

b- Montrer que : $(\forall x \in D)$; $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(2kx)$

c-Montrer que : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{\pi}{4}$

Exercice 41

1) Soit f et g deux fonctions numériques continues sur l'intervalle $[a;b]$ $(a < b)$.

Montrer que : $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 < \left(\int_a^b (f(x))^2 dx\right).\left(\int_a^b (g(x))^2 dx\right)$

2) Soit f et g deux fonctions numériques continues et positives sur l'intervalle $[0;1]$ telles que: $f(x)g(x) \geq 1$.

Montrer que : $\left(\int_0^1 f(x)dx\right).\left(\int_0^1 g(x)dx\right) > 1$

3) Montrer que : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice 42

Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $F(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{1-e^t}{t^2}dt$

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $F(x) = \left[\frac{e^t-1}{t}\right]_{2x}^{3x} - \int_{2x}^{3x} \frac{e^t}{t}dt$

2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $e^{2x}.\int_{2x}^{3x} \frac{dt}{t} \leq \int_{2x}^{3x} \frac{e^t}{t}dt \leq e^{3x}.\int_{2x}^{3x} \frac{dt}{t}$

3) En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$

Exercice 43

Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n . \tan x dx$

et $J_n = \int_0^1 x^{n+1} . (1 + \tan^2 x) dx$

1)Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; I_n = \frac{1}{n+1} . \tan(1) - \frac{1}{n+1} J_n$

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 \leq J_n \leq \frac{1 + \tan^2(1)}{n+2}$, et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$

3) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} n I_n$.

[redacted]

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x+n} dx$ et $J_n = \int_0^{\pi} \frac{n \sin x}{x+n} dx$

1) Montrer que : $(\forall n \in IN^*) ; 0 < I_n < \frac{1}{n} . \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$, en déduire : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

2) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

a) Vérifier que : $\left| \int_0^{\pi} \frac{n . \sin x}{x+n} dx - \int_n^{\pi} \sin x dx \right| = \int_0^{\pi} \frac{x . \sin x}{x+n} dx$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \int_0^{\pi} \frac{x . \sin x}{x+n} dx \leq \frac{\pi^2}{n}$

3) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$.

[redacted]

Soit a un nombre réel et n un entier naturel non nul, et soit f une fonction numérique continue sur $\mathbb{R}^+$.

Montrer que : $\int_0^a f(x) \left(\int_0^x f(t) dt \right)^n dx = \frac{1}{n+1} \left(\int_0^a f(x) dx \right)^{n+1}$

[redacted]

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$ qui admet une fonction réciproque g^{-1} sur $[a;b]$.

Pour tout x de $[a;b]$ on pose : $G(x) = -\int_{g(a)}^{g(x)} g^{-1}(t) dt + x g(x)$

et $F(x) = \int_a^x g(t) dt$

1) Montrer que F et G sont dérivables sur $[a;b]$, et calculer $F'(x)$ et $G'(x)$.

pour tout x de $[a;b]$.

2) En déduire que . $\int_a^b g(t)\,dt = bg(b) - ag(a) - \int_{g(a)}^{g(b)} g^{-1}(t)\,dt$

Exercice 47

Soit a et b deux nombres réels de $\mathbb{R}$ tels que $a < b$

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[a;b]$ et vérifiant:

i) f est dérivable sur $[a;b]$; ii) f' est continue sur $[a;b]$;

iii) $(\forall x \in [a,b]); 0 \le f'(x) \le 1$ et $f(a) = 0$

1) Soit la fonction: $\psi:[a;b] \to IR$ définie par $\psi(x) = f^2(x) - 2\left(\int_a^x f(t)dt\right)$

a) Montrer que la fonction ψ est dérivable sur l'intervalle $[a;b]$.

b) Calculer $\psi'(x)$ pour tout x de l'intervalle [a,b].

c) Montrer que la fonction ψ est décroissante sur $[a;b]$, en déduire que $\psi(x) \le 0$ pour tout x de $[a;b]$.

2) Soit φ la fonction définie de $[a;b]$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) \to \int_a^x f^3(t)dt - \left(\int_a^x f(t)dt\right)^2$$

a) Montrer que la fonction φ est dérivable sur l'intervalle [a;b].

b) Montrer que : $(\forall x \in [a,b])$; $\varphi'(x) = f(x).\psi(x)$

3) En déduire que : $\int_a^b f^3(x)dx \le \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2$.

Exercice 48

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

1) a- Soit F la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$F(x) = -\frac{1 + \ln x}{x}$$

vérifier que F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$;

b- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 2$, on pose : $I = \int_2^n f(t)\,dt$;

Calculer l'intégrale I , en déduire que: $I \leq \frac{1 + \ln 2}{2}$

c- Montrer que f est décroissante sur $[2; +\infty[$

2) On considère la suite numérique $(S_n)_{n \geq 2}$ définie par :

$(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}); S_n = \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + ... + \frac{\ln(n)}{n^2}$

a- Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante ;

b- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$

Montrer que: $\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt$, en déduire que : $S_n \leq \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}$

c- Montrer que $(S_n)_{n \geq 2}$ est convergente.

Exercice 49

I- On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

Soit (C) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- Déterminer D l'ensemble de définition de f , puis étudier la parité de f .

2- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, en déduire la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$ de la courbe (C).

3- Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

4-a) Étudier la concavité de (C).

b) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

c) Tracer (C).

5- Calculer l'aire de la partie (Δ) limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = -1$; $x = 1$ et y=0

II- On considère la suite (I_n) définie par :$(\forall n \in \mathbb{N})$; $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}.dx$

1- Montrer que la suite (I_n) est convergente et calculer sa limite.

2- Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_{n-1} pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

3-a) Calculer I_0 ; I_1 , et I_2.

b) En déduire la valeur de l'intégrale : $k = \int_1^2 \frac{u}{\sqrt{u^2 - 2u + 2}}\,du$

On considère la suite (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$

1- a) Calculer u_0 :

b) Montrer que : $(\forall n \in IN); u_{2n} + u_{2n+2} = \frac{1}{1+2n}$

c) Calculer u_2 , u_4 et u_6.

2- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 \leq u_{2n} \leq \frac{1}{1+2n}$, puis déduire $\lim_{n \to +\infty} u_{2n}$

3- On considère la suite (v_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_n = u_0 + (-1)^{n-1} u_{2n}$

b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} v_n$.

Exercice 51

On considère la fonction F de la variable réelle x définie par :

$$F(x) = \int_x^{4x} \frac{\ln t}{2t-1} dt$$

1)Montrer que F est définie sur : $D =]0; \frac{1}{8}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$

2) Montrer que F est dérivable en tout point de D, puis calculer $F'(x)$ pour tout x de D.

3) a- Soit x un élément de $[1; +\infty[$

Montrer que : $(\exists c \in]x; 4x[); F(x) = \frac{3x \ln c}{2c-1}$

b) En déduire que : $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

4)Soit x un élément de l'intervalle $]0; \frac{1}{16}[$

Montrer que : $|F(x)| < \int_x^{4x} -2\ln(t) dt$, en déduire : $\lim_{x \to 0} F(x)$.

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) - f(x) = 2\int_0^x f(t) dt$ et $f(0) = f'(0) = 1$

1) a- Montrer que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

b- Montrer que f est solution de l'équation : $(E): y'' - y' - 2y = 0$

2) a- Résoudre l'équation differentielle (E) ;

b- En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) = \frac{1}{3}(2e^{2x} + e^{-x})$

3) Soit n un entier naturel ; on pose : $u_n = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+nt}\,dt$.

a- Montrer que f est strictement cro ssante sur $[0;1]$;

b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leq u_n \leq f(1)\int_0^1 \frac{dt}{1+nt}$

c- En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Exercice 53

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$; on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$f_n(x) = \frac{x^n . e^{-x}}{n!}$.

1) Pour tout réel n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $I_n(a) = \int_0^a f_n(t)\,dt$.

a- Calcu er $I_1(a)$ en fonction de a ;

b- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $\mathbb{R}^+$; on a :

$$0 \leq f_n(t) \leq \frac{t^n}{n!}$$

c- Déduire un encadrement du nombre $I_n(a)$ en fonction de n et a.

2) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$; on a f_n est strictement décroissante sur l'intervalle $[n; +\infty[$.

3) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\frac{1}{n!} < \left(\frac{e}{n}\right)^n$;

b- En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n(a) = 0$

Exercice 54

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$

et (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $e^x > x$

b- En déduire l'ensemble de définition de f.

c- Calcu er les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2) a- Montrer que le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ est le signe de $1 - x$; puis dresser

le tableau de variations de f.

b- Tracer (C). (on admet que (C) admet deux points d'inflexion d'abscisse 0 et α tels que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$).

3) On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x e^t f(t)\,dt$

a- Déterminer le sens de variation de F.

b- Montrer que pour t de $\mathbb{R}^+$; on a : $e^t - t \geq \frac{t}{e^t}$

c- En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); F(x) \geq \frac{x^2}{2}$, puis calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

Exercice 55

Partie A:

1) Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ avec $(a < b)$ et α une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que : $\alpha(I) \subset [a;b]$.

Montrer que la fonction : $F: x \mapsto \int_a^{\alpha(x)} f(t)\,dt$ est dérivable sur I,

et que : $(\forall x \in I); F'(x) = f(\alpha(x)).\alpha'(x)$

2) Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ avec $(a < b)$ et α ; β deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que : $\alpha(I) \subset [a;b]$ et $\beta(I) \subset [a;b]$

Montrer que la fonction : $F: x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$ est dérivable sur l'intervalle I,

et que : $(\forall x \in I); F'(x) = f(\beta(x)) \times \beta'(x) - f(\alpha(x)) \times \alpha'(x)$

Partie B:

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{1}{x^3 - 1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

et F la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

I- 1) Étudier les variations de f et tracer la courbe (C).

2) Déterminons D_F l'ensemble de définition de F.

3) Calculer $F'(x)$ pour tout x de $]1; +\infty[$ puis étudier les variations de F sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

4) Montrer que : $(\forall x \in]1; +\infty[); (x^2 - x)f(x^2) \leq F(x) \leq (x^2 - x)f(x)$

puis déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

II-1) Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$(\forall x \in D_f); F(x) = a\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}dt + \int_x^{x^2} \frac{bt+c}{t^2+t+1}dt$$

2) On considère la fonction h définie par : $h(t) = -\frac{1}{3}\frac{t+2}{t^2+t+1}$

a- Étudier les variations de h sur $[0; +\infty[$.

b- Déterminons le signe de h sur $[0; +\infty[$.

3) Montrer: $(\forall x \in [0; +\infty[); (x^2 - x)h(x) \leq \int_x^{x^2} h(t)\,dt \leq (x^2 - x)h(x^2)$

puis déduire : $\lim\limits_{x \to 1^+} \int_x^{x^2} h(t)\,dt$

4) a- Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1}\int_x^{x^2} h(t)\,dt$

b- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

5) Tracer (C_f) la courbe représentative de F sur $]1, +\infty[$ dans un repère orthonormé.

Exercice 45

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par: $F(x) = \int_x^{x^2} f(t)\,dt$;

où f est la fonction numérique de la variable réelle t définie par : $f(t) = e^{\frac{1}{\ln t}}$

1) a- Montrer que : $(\forall x \in]1; +\infty[); f(x+1) \leq F(x) \leq f(x)$; puis déduire :

$$\lim_{x \to +\infty} F(x)$$

b- Montrer que : $(\forall u \in [0; +\infty[); e^u \geq u + 1$

c- En déduire : $(\forall x \in]1; +\infty[); F(x) - 1 \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t}dt$

d- Montrer que: $(\forall t \in]0; +\infty[); \ln t \leq t - 1$; puis déduire que :

$(\forall x \in]1, +\infty[); \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}dt \geq \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$; puis déduire de ce qui précède :

$\lim\limits_{x \to 1^+} F(x)$.

2) Étudier les variations de la fonction F.

3) Construire la courbe de F dans un repère orthonormé.

On pose : $J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$

1) On considère la fonction F définie sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ par : $F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin t}{t} dt$

et soit G la fonction définie sur $\left[0; \frac{1}{2}\right[$, par : $G(x) = \int_{0}^{x} \frac{\sin(\pi t)}{1-t} dt$

a- Montrer que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right[\right), G(x) \quad F(\pi) \quad F(\pi(1-x))$

b- En déduire que : $J = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(\pi t)}{1-t} dt$

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in IN); u_n = \int_{0}^{\frac{1}{2}} t^n \sin(\pi t)\, dt$

a- Montrer que : $(\forall n \in IN^*); J = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + R_n$

avec : $R_n = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t} dt$

b- Montrer que: $(\forall n \in IN^*), \left(\forall t \in \left[0; \frac{1}{2}\right[\right), \frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t} < 2t^n$; puis déduire un encadrement de R_n.

c- Calculer $\lim_{n \to +\infty} (u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1})$

3) a- Calculer u_0 et u_1.

b- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N} \quad \{1\}); u_n = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{n}{2^{n-1}} \quad n(n \quad 1)u_{n-2}\right)$

4) Déterminer une valeur approchée du nombre J à 10^{-} (Utiliser les questions précédentes).

On considère la fonction f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $]0 \quad \infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{x \cdot 1} ; x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$

I- 1) a- Calculer les limites suivantes : $\lim f(x)$ et $\lim f(x)$.

b- Étudier la continuité de f au point 1.

2) Soit t un élément de l'intervalle $]-1; +\infty[$

a- Montrer que : $\left| \int_{0}^{t} \frac{u^2}{1+u} du \right| \leq t^2 |\ln(1+t)|$

b- Montrer que : $\int_{0}^{t} \frac{u^2}{1+u} du = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2}$

c- En déduire que la fonction f est dérivable en 1 et que : $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

3) Étudier les variations de la fonction f.

II- Soit G la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} G(x) = \int_x^{x^2} f(t)\,dt \ ; x \neq 0 \\ G(0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que l'ensemble de définition de G est $[0; +\infty[$.

2) a- Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$:

$$\frac{2x \ln x}{x+1} \leq G(x) \leq x \ln x$$

(on pourra utiliser les variations de f).

b- Montrer que la fonction G est continue à droite en 0.

c- Étudier la dérivablité de G à droite en 0.

d- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x)$.

3) On pose : $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$.

a- Exprimer $G(x)$ en fonction de $F(x)$ et $F(x^2)$.

b- Étudier les variations de la fonction G.

4) On admet que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{G(x)}{x} = 0$, tracer la courbe représentative de la fonction G dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (on donne : $G\left(\frac{1}{3}\right) \approx -0,4$)

Exercice 15

Partie 1:

On considère la fonction f de la variable réelle x définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos t}\,dt$$

1) Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

2 a- En utilisant un changement de variable en posant $y = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, montrer que : $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\right); f(x) = \ln\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)$

b- Montrer que f est une fonction impaire.

3) Montrer que f est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

4) Pour tout élément t de $\mathbb{R}$; On pose : $\varphi(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$

Vérifier que : $\left(\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right);\varphi(f(x))=f'(x)$

Partie 2:

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t)=\int_0^x\frac{1}{\varphi(t)}dt$.

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que la fonction g est impaire.

2) a-Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});g(x)=2Arc\tan(e^x)-\frac{\pi}{2}$.

b- Dresser le tableau de variations de la fonction g , puis tracer la courbe (C).

c- Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

3) a- Montrer que la fonction gof est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,

et que : $\left(\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right);(gof)'(x)=1$

b- En déduire que : $\left(\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right).(gof)(x)=x$

4) Montrer que : $\left(\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}\right[\right);(\forall y\in\mathbb{R});y=\int_0^x\frac{1}{\cos t}dt\Leftrightarrow x=\int_0^y\frac{1}{\varphi(t)}dt$

Exercice 30

Partie 1 :

1) Montrer que : $(\forall x\in[1;+\infty[)\ ;\ x\geq 1+\ln x$

2) On considère la fonction φ définie sur $[1,+\infty[$ par :

$$\varphi(x)=\ln(1+\ln x)-\frac{\ln x}{x}$$

a- Donner le tableau de variations de φ.

b- En déduire que : $(\forall x\in[1;+\infty[)\ ;\ \varphi(x)\geq 0$

3)Montrer que . $(\forall x\in[0;+\infty[)\ ;\ x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x\quad\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

Partie 2 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \int_{1+\ln x}^{x} \frac{1}{\ln t} dt \ ; \ x > 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) a- Montrer que : $(\forall x \in]1; +\infty[) \ ; \ \frac{x - 1 - \ln x}{\ln x} \leq f(x) \leq \frac{x - 1 - \ln x}{\ln(1 + \ln x)}$

b- En déduire que f est continue à droite en 1 et calculer les limites suivantes: $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

2) a- Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 1.

b-Montrer que la fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$; puis calculer $f'(x)$ pour tout $x > 1$.

3) Tracer (C_f) .

Exercice 31

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \int_{x}^{2x} \ln(e^t - 1) dt \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1- Montrer que la fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$

2) a) Étudier le sens de variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par :

$$g(x) = \ln(e^x - 1)$$

b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); x \ln(e^x - 1) \leq f(x) \leq x \ln(e^{2x} - 1)$

c) Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.

d) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 .

e) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.

3) a- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); f'(x) = \ln(e^{3x} + e^{2x} - e^x - 1)$

b) Étudier les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$u(x) = e^{3x} + e^{2x} - e^x - 2$$

c) Déduire que : $\left(\exists! \alpha \in \left]\ln\left(\frac{5}{6}\right); \ln\left(\frac{5}{4}\right)\right[\right); u(\alpha) = 0$ et $f'(\alpha) = 0$

d) Étudier les variations de f et vérifier que : $f(\alpha) < 0$.

En déduire qu'il existe un unique réel β tel que :

$$\alpha < \beta < \ln(2) \text{ et } f(\beta) = 0$$

4) a) Étudier le signe de l'intégrale : $\int_x^{2x} \ln(e^t - 1)\,dt$ suivant les valeurs de x de $\mathbb{R}'^+$

b) Tracer la courbe (C) représentant la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

(On prend : $\ln(2) \simeq 0,7$; $f(\alpha) \simeq -0,3$; $\alpha \simeq 0,2$ et $\|\vec{i}\| = 2cm$)

Exercice 62

1) a) Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})$; $\ln(x) \leq x - 1$

b) En déduire : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})$; $\ln(x) \leq 2(\sqrt{x} - 1)$

2) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - \ln(x)} ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

a) Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}'^+$

b) Étudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

c) Étudier les variations de f.

d) Tracer la courbe (C).

3) a) Montrer que : $(\forall x \in [1, +\infty[)$; $\frac{1}{2} + \frac{\ln(x)}{4\sqrt{x}} \leq \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - \ln(x)} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln(x)$

b) Calculer $\int_1^4 \ln(x)\,dx$ et $\int_1^4 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$

c) En déduire un encadrement de l'aire de a partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation: $x = 1$ et $x = 4$

Exercice 63

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x.\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Vérifier que la fonction f est paire.

b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$; $e^{4x} + 4xe^{2x} - 1 > 0$.

c) Dresser le tableau de variations de f.

2. a) Étudier les branches infinies de (C_f) ; puis étudier la position relative de (C_f) avec son asymptote oblique.

b) Tracer (C_f).

3) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); \frac{x}{2e^{2x}} \leq \frac{x}{e^{2x}+1} \leq \frac{e^x}{e^{2x}+1}$

4) Soit (u_n) et (v_n) et (w_n) les suites définies par :

$\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \int_0^n \frac{x}{e^{2x}+1} dx \cdot v_n = \int_0^n \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ et $w_n = \int_0^n \frac{x}{2e^{2x}} dx$

a) Calculer (v_n) et (w_n) en fonction de n ;

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), w_n \leq u_n \leq v_n \leq \frac{\pi}{4}$

c) Montrer que la suite (u_n) est croissante et convergente.

d) Soit a_n l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C_f) et les droites d'équations : $y = x$ et $x = 0$ et $x = n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que : $\frac{1}{4} \leq \lim_{n \to +\infty} a_n \leq \frac{\pi}{2}$

Partie 1 : On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$h(x) = \frac{x}{1+x^2} - Arc\tan(x)$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ $(\|\vec{i}\| = 1\ cm)$

1. Dresser le tableau de variations de h, puis déduire le signe de $h(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

2) Tracer la courbe (C).

3. Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équation : $x = 0$; $x = 1$ et $y = 0$.

Partie 2 :

1) a- Montrer que : $(\forall t \in \mathbb{R})$; $0 \leq 1 - \frac{1}{1+t^2} \leq t^2$

b- En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$: $0 \leq x - Arc\tan x \leq \frac{x^3}{3}$

2) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{Arc\tan(x)}{x} \ ; \ x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

a- Montrer que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

b- Montrer que la fonction g est dérivable en $x_0 = 0$

c Montrer que : $(\forall x \in [1; +\infty[) \; ; \; 0 \leq \int_1^x g(t)dt \leq \frac{\pi}{2} \ln x$ (1)

Partie 3: Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt \; ; \; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

et soit (Γ) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1) Étudier la parité de f.

2) a- Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[) \; ; \; 0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{9}$

b- Montrer que f est con–tinue en 0.

c- Étudier la dérivabilité de f en 0.

3) En utilisant la double inégalité (1) , montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, puis déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

4) a- Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \; ; \; x^2 f'(x) - Arc\tan x - \int_0^x g(t)dt$

b- Pour tout x de $\mathbb{R}^*$ on pose : $\varphi(x) = x^2 f'(x)$ et $\varphi(0) = 0$

Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \; ; \; x\varphi'(x) = h(x)$

c- Dresser le tableau de variations de f.

5) Construire la courbe (Γ).

Solutions

Exercice 68

1) a) Dressons le tab eau de variations de la fonction f

• Les limites:

on a. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$, donc: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(\ln x)^2}{x} = +\infty$

c'est-à-dire: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

• On a: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 = 0$ (car $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$).

• Déterminons $f'(x)$

On a f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$;

et : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; f'(x) = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{\ln(x)(2-\ln x)}{x^2}$

• Le signe de $f'(x)$ est celui de: $\ln(x)(2-\ln(x))$.

D'où le tableau de signe de $f'(x)$

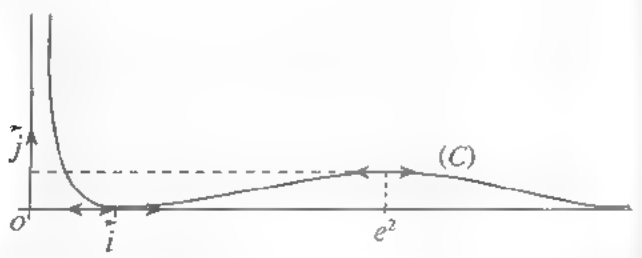
x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$2-\ln x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0		

• Tableau de variations de f :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0

b) Coubre $(\mathscr{C})$

$\frac{4}{e^2} \simeq 0,54$



2) a) Calculons: $I_1 = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x^2} dx$

Utilisons une intégration par parties

• On pose: $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2}$

donc: $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = -\frac{1}{x}$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1;e^2]$; les fonctions u' et v' sont

continues sur $[1;e^2]$ donc: $I_1 = [u(x)v(x)]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} u'(x)v(x)dx$

$$= -\left[\frac{\ln x}{x}\right]_1^{e^2} + \int_1^{e^2} \frac{1}{x^2}dx$$

$$= -\frac{2}{e^2} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{e^2} = -\frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^2} + 1 = -\frac{3}{e^2} + 1$$

b) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); I_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{e^2} + (n+1)I_n$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ on a: $I_{n+1} = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2}dx$

Utilisons une intégration par parties: on pose: $u(x) = (\ln x)^{n+1}$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2}$

donc $u'(x) = \frac{n+1}{x}.(\ln x)^n$ et $v(x) = -\frac{1}{x}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1;e^2]$; les fonctions u' et v' sont continues sur $[1,e^2]$ donc: $I_{n+1} = [u(x)v(x)]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} u'(x)v(x)dx$

$$= \left[-\frac{(\ln x)^{n+1}}{x}\right]_1^{e^2} + (n+1)\int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^n}{x^2}dx$$

$$= -\frac{2^{n+1}}{e^2} + (n+1)I_n$$

d'où: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); I_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{e^2} + (n+1)I_n$ (1)

• Déduction:

D'après le relation (1), on a:

pour $n=1$; $I_2 = -\frac{2^2}{e^2} + 2I_1 = -\frac{4}{e^2} + 2\left(-\frac{3}{e^2} + 1\right) = -\frac{10}{e^2} + 2$

pour $n=2$: $I_3 = -\frac{2^3}{e^2} + 3I_2 = -\frac{8}{e^2} + 3\left(-\frac{10}{e^2} + 2\right) = -\frac{38}{e^2} + 6$

pour n=3: $I_4 = -\frac{2^4}{e^2} + 4I_3 = -\frac{16}{e^2} + 4\left(-\frac{38}{e^2} + 6\right) = -\frac{168}{e^2} + 24$

1) a) Calculons u_1

on a: $u_1 = \int_1^e x^2 \ln x\, dx$

Utilisons une intégration par parties, on a: $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{3}x^3 \end{cases}$

donc

$$u_1 = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x\right]_1^e - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^e = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}$$

d'où $I_1 = \frac{2e^3+1}{9}$

b) Étudions la monotonie de la suite (u_n)

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$, on a: $u_{n+1} - u_n = \int_1^e (x^2(\ln x)^{n+1} - x^2(\ln x)^n)dx$

$$= \int_1^e x^2(\ln x)^n(\ln x - 1)dx$$

et on a: $(1 \le x \le e) \Rightarrow 0 \le \ln x \le 1$

$$\Rightarrow \ln(x) - 1 \le 0$$

et $x^2(\ln x)^n \ge 0$ pour tout x de l'intervalle $[1, e]$

donc: $(\forall x \in [1;e]); x^2(\ln x)^n(\ln x - 1) < 0$

d'où: $\int_1^e x^2(\ln x)^n(\ln x - 1)dx \le 0$ c'est-a-dire: $u_{n+1} - u_n \le 0$

Par conséquent. $(\forall n \in \mathbb{N}^*), u_{n+1} \le u_n$ c'est-à-dire (u_n) est décroissante.

• Convergence de la suite (u_n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a: $(\forall x \in [1,e]); x^2(\ln x)^n \ge 0$

donc: $\int_1^e x^2(\ln x)^n dx > 0$ c'est-à-dire: $u_n > 0$ d'où: $(\forall n \in IN^*), 0 < u_n$

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge

2) a) Montrons que: $(\forall x \in [1;e]); 0 \le \ln x \le \frac{x}{e}$

Puisque la fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

alors: $1 \le x \le e \Rightarrow \ln x \ge \ln 1$

$$\Rightarrow \ln x \ge 0$$

donc: $(\forall x \in [1,e]); \ln x > 0$

• Soit φ la fonction numérique définie sur $[1;e]$ par: $\varphi(x) = \ln(x) - \frac{x}{e}$

On a $(\forall x \in [1;e]); \varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e}{xe} - \frac{x}{xe}$ donc: $(\forall x \in [1;e]); \varphi'(x) \ge 0$

d'où la fonction φ décroissante sur $[1;e]$; par conséquent: croissante

$1 \le x \le e \Rightarrow \varphi(x) \le \varphi(e)$

$$\Rightarrow \varphi(x) \le 0$$

c'est-à-dire $(\forall x \subset [1;e]); \ln(x) \le \frac{x}{e}$, donc $(\forall x \in [1;e]); 0 \le \ln x < \frac{x}{e}$

b) Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Soit x un élément de $[1,e]$ et n un élément de $\mathbb{N}^*$, on a: $0 \le \ln(x) \le \frac{x}{e}$.

donc: $0 \le (\ln x)^n \le \frac{x^n}{e^n}$ d'où $0 \le x^2(\ln x)^n \le \frac{x^{n+2}}{e^n}$

et puisque: $(\forall x \in [1;e]); 0 \le x^2(\ln x)^n \le \frac{x^{n+2}}{e^n}$

alors: $0 \le \int_1^e x^2(\ln x)^n dx \le \frac{1}{e^n}\int_1^e x^{n+2}dx$

et puisque: $\int_1^e x^{n+2}dx = \left[\frac{1}{n+3}x^{n+3}\right]_1^e = \frac{1}{n+3}(e^{n+3}-1)$

alors: $0 \le u_n \le \frac{1}{e^n}.\frac{1}{n+3}(e^{n+3}-1)$

donc: $(\forall n \in IN^*); 0 \le u_n \le \frac{e^3}{n+3} - \frac{1}{(n+3)e^n}$

et on a: $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^3}{n+3} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+3)e^n} = 0$ d'où: $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^3}{n+3} - \frac{1}{(n+3)e^n} = 0$

et d'après les critères de convergence on déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

3) a) Déterminons une relation de recurrence entre u_{n+1} et u_n.

Soit n un élément $\mathbb{N}^*$, on a: $u_{n+1} = \int_1^e x^2(\ln x)^{n+1}dx$

Utilisons une intégration par parties, on a:

$$\begin{cases} u(x) = (\ln x)^{n+1} \\ v'(x) = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = (n+1).\frac{1}{x}.(\ln x)^n \\ v(x) = \frac{1}{3}x^3 \end{cases}$$

$$u_{n+1} = \left[u(x)v(x)\right]_1^e - \frac{n+1}{3}.\int_1^e x^2(\ln x)^n dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \frac{n+1}{3}.u_n$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{n+1}{3}.u_n$$

d'où: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{n+1} = \frac{1}{3}e^3 - \frac{n+1}{3}u_n$ (1)

b) Calculons u_2

En remplaçant n par 1 dans la relation (1), on obtient:

$$u_2 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{3}u_1 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}\right) = \frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}$$

c) Calculons $\lim_{n\to+\infty} n u_n$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$, on a: $u_{n+1} = \frac{1}{3}e^3 - \frac{n+1}{3}u_n$

donc $3u_{n+1} = e^3 - (n+1)u_n$; d'où: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $nu_n = e^3 - u_n - 3u_{n+1}$

et on a: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 3u_{n+1} = 0$ donc: $\lim_{n\to+\infty} nu_n = e^3$

1) Déterminons les nombres a et b tels que:

$$\left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]\right); \frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1-\sin x} + \frac{b\cos x}{1+\sin x}$$

on a:

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right], \frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1-\sin x} + \frac{b\cos x}{1+\sin x} \Leftrightarrow \left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right], \frac{1}{\cos x} = \frac{a(1+\sin x) + b(1-\sin x)}{\cos x}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]; 1 = (a-b)\sin x + (a+b)\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

donc $\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right], \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x} + \frac{\cos x}{1+\sin x}\right)\right.$

• Déduisons a valeur de I_1 :

On a·

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\cos x}{1-\sin x} + \frac{\cos x}{1+\sin x}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{-(1-\sin x)'}{1-\sin x} + \frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x}\right) dx$$

$$\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left((2+\sqrt{3})^2\right)$$

donc: $I_1 = \ln(2+\sqrt{3})$

2) Calculons I_2 :

On a : $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = [\tan x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}$ donc: $I_2 = \sqrt{3}$

3) a) Determinons une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}

Utilisons une intégration par parties.

on pose: $u'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ et $v(x) = \frac{1}{\cos^{n-2} x}$ donc: $u(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et

$v'(x) = \frac{(n-2)\sin x}{\cos^{n-1} x}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right[$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

donc: $I_n = \left[\frac{\tan x}{\cos^{n-2} x}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(n-2)\sin^2 x}{\cos^n x} dx$

$$= \sqrt{3}.(2)^{n-2} - (n-2)\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^n x} dx$$

$$= \sqrt{3}.(2)^{n-2} - (n-2)\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^n x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^{n-2} x} dx\right)$$

$$= \sqrt{3}.(2)^{n-2} - (n-2)I_n + (n-2)I_{n-2}$$

d'où $(n-1)I_n = \sqrt{3}.(2)^{n-2} + (n-2)I_{n-2}$

par conséquent $\circledast (\forall n \in \mathbb{N})(n \geq 3); I_n = \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} + \frac{\sqrt{3}.(2)^{n-2}}{n-1}$.

b) Déduisons les valeurs de I_3 , I_4 et I_5.

d'après l'égalité $\circledast$ on a. $I_3 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{2\sqrt{3}}{2}$ donc: $I_3 = \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3}) + \sqrt{3}$

et on a: $I_4 = \frac{2}{3} I_2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$ donc $I_4 = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

et on a: $I_5 = \frac{3}{4} I_3 + \frac{8\sqrt{3}}{4}$ donc $I_5 = \frac{3}{8}\ln(2+\sqrt{3}) + \frac{11\sqrt{3}}{4}$

Exercice

1) a) Déterminons D.

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a:

$$x \in D \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } 1+\tan x > 0 \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } x \in \left]-\frac{\pi}{4} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[; k \in \mathbb{Z}$$

Donc: $D = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[\right) - \{0\}$

b) Calculons: $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

Soit x un élément de D on a: $g(x) = \frac{\ln(1+\tan x)}{\tan x} \cdot \frac{\tan x}{x}$

on pose: $t = \tan x$; on a: $x \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$

donc: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+\tan x)}{\tan(x)} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

et on a: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$; d'où: $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+\tan x)}{\tan(x)} \cdot \frac{\tan x}{x} = 1$

• Déduction:

Soit x un élément de D ; on a: $(1+\tan x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+\tan x)} = e^{g(x)}$

et puisque: $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$ et la fonction exponentielle est continue en 1

alors $\lim\limits_{x \to 0} e^{g(x)} = e^1 = e$ donc: $\lim\limits_{x \to 0} (1+\tan x)^{\frac{1}{x}} = e$

2) a) Montrons que: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

En posant $t = a+b-x$, on obtient $dx = -dt$

et $\begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = b \\ t = a \end{cases}$

donc: $\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_b^a f(t)(-dt)$

$$= -\int_b^a f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

d'où: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

b) Déduction:

Soit u la fonction numérique définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par: $u(x) = \ln(1+\tan x)$

On a: la fonction: $v : x \mapsto 1 + \tan x$ est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et $v\left(\left[0; \frac{\pi}{4}\right]\right) = [1, 2]$

et la fonction ln est continue sur $[1; 2]$, alors la fonction u est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, donc $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u\left(\frac{\pi}{4} - x\right)dx$ (d'après 2) a)).

Soit x un élément de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ on a: $u\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)$

et puisque: $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$ alors: $1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{2}{1 + \tan x}$

d'où: $u\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln\left(\frac{2}{1+\tan x}\right) = \ln 2 - \ln(1+\tan x)$

par conséquent: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 - \ln(1+\tan(x)))dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\,dx - I = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I$

finalement: $2I = \frac{\pi}{4}\ln 2$ c'est-à-dire: $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$

1) Montrons que: $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

On a f continue sur l'intervalle $[0; a]$ donc f admet une fonction primitive sur cet intervalle:

On pose: $I = \int_0^a f(a-x)\,dx$

Utilisons une intégration par changement de variable en posant $t = a - x$

donc: $dx = -dt$ et $\begin{cases} x = a \iff t = 0 \\ x = 0 \iff t = a \end{cases}$

$$I = \int_a^0 f(t)(-dt) = \int_0^a f(t)\,dt$$

d'où: $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

2) Calculons I, J et K

• Calcul de I :

on a: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)dx$

donc d'après 1) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)dx$ et puisque: $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$

c'est-à-dire: $1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 + \tan x + 1 - \tan x}{1 + \tan x} = \frac{2}{1 + \tan x}$

donc: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1 + \tan x}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 - \ln(1 + \tan x))dx$

d'où: $I = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I$, par conséquent: $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$

• Calcul de J : on a: $J = \int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2}dx$

on pose $t = Arc\tan x$; $x \in [0;1]$, alors: $x = \tan(t)$ et $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

et puisque: $dt = \frac{1}{1 + x^2}dx$

alors: $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t)dt = I$ d'où: $J = \frac{\pi}{8}\ln(2)$

• Calcul K :

On a: $K = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1 + \cos^2(x)}dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1 + \cos^2(\pi - x)}dx$

$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1 + \cos^2(x)}dx$

$= \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}dx - K$

donc: $2K = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}dx$

$= \pi\left[-Arc\tan(\cos x)\right]_0^{\pi}$

$= -\pi(Arc\tan(-1) - Arc\tan(1))$

$= -\pi\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{\pi^2}{2}$

d'où: $K = \frac{\pi^2}{4}$

Exercice 33

1) Calculons I_0.

on a: $I_0 = \int_0^2 \frac{1}{(1 - x)^2}dx = \left[\frac{1}{1 - x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$

donc $I_0 = 1$

b) Calculons I_1.

on a: $I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2} - x}{(1-x)^3} dx$

on pose: $t = 1 - x$, donc $\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$ et $dt = -dx$

donc. $I = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2} + t - 1}{t^3} (-dt) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^3} \right) dt = \left[-\frac{1}{t} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t^2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = -\frac{1}{4}$

d'où: $I_1 = \frac{1}{4}$

2) a) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); I_n = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} + \frac{n}{n+1} I_{n-1}$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ on a: $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2} - x\right)^n}{(1-x)^{n+2}} dx$

Utilisons une intégration par parties:

on a: $\begin{cases} u(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right)^n \\ v'(x) = \frac{1}{(1-x)^{n+2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = -n\left(\frac{1}{2} - x\right)^{n-1} \\ v(x) = \frac{1}{(n+1)} \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \end{cases}$

La fonction u et v sont dérivables sur l'interval e $\left[0; \frac{1}{2}\right]$; et les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$; donc:

$I_n = \left[u(x)v(x)\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{n}{n+1} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2} - x\right)^{n-1}}{(1-x)^{n+1}} dx = -\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} I_{n-1}$

d'où: $(\forall n \in IN^*); I_n = \frac{-1}{(n+1).2^n} + \frac{n}{n+1} I_{n-1}$

b) Déduction:

Si $n = 0$, alors l'égalité est vraie $I_0 = \frac{1}{(0+1)2^0} = 1$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

pour tout k de l'ensemble $\{1, 2, \ldots n\}$ on a: $(k+1)I_k = \frac{-1}{2^k} + k I_{k-1}$

donc. $\begin{cases} 2I_1 = -\frac{1}{2} + 1 I_0 \\ 3I_2 = -\frac{1}{2^2} + 2 I_1 \\ 4 I_3 = -\frac{1}{2^3} + 3 I_2 \\ \vdots \quad \vdots \\ (n+1) I_n = \frac{-1}{2^n} + n I_{n-1} \end{cases}$

En additionnant membre à membre , on obtient (après simplification):

$(n+1)I_n = -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)+1$

et puisque: $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

alors : $(n+1)I_n=-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n+1=\frac{1}{2^n}$ donc: $I_n=\frac{1}{(n+1)2^n}$

d'où: $(\forall n\in IN);I_n=\frac{1}{(n+1)2^n}$

1) a) Soit x un élément de $IR-\{1;-1\}$

On a: $\frac{1}{2(1-t)}+\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1+t+1-t}{2(1-t^2)}=\frac{1}{1-t^2}$

et $\frac{1}{1-t},-\frac{1}{1+t}=\frac{1+t}{1-t^2}-\frac{1+t}{1-t^2}=\frac{2t}{1-t^2}$

donc: $(\forall t\in\mathbb{R}-\{-1.1\}),\frac{2t}{1-t^2}=\frac{1}{2(1-t)}+\frac{1}{2(1+t)}-\frac{1}{1+t^2}$

b) Calculons α

on a: $\alpha=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{2t}{1-t^2}dt=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(\frac{1}{2(1-t)}+\frac{1}{2(1+t)}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$

$=\left[-\frac{1}{2}\ln|1-t|+\frac{1}{2}\ln|1+t|-Arc\tan(t)\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$=-\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-Arc\tan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$=-\frac{1}{2}\ln(3-\sqrt{3})+\frac{1}{2}\ln(3+\sqrt{3})-\frac{\pi}{6}$

$-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right)-\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)-\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}\right)-\frac{\pi}{6}$

$=\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\pi}{6}=\ln\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)-\frac{\pi}{6}$

donc: $\alpha=\ln\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)-\frac{\pi}{6}$

2) a) La fonction h est dérivable sur l'intervalle $\left[0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Pour tout t de $\left[0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, on pose $v(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$; on a: $v(t)=-1+\frac{2}{1+t^2}$

donc: $\left(\forall t\in\left[0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]\right);v'(t)=\frac{-4t}{(1+t^2)^2}$

d'où: $\left(\forall t\in\left[0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]\right);h'(t)=\frac{v'(t)}{v(t)}=\left(\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\right)\cdot\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)=\frac{-4t}{1-t^4}$

b)on pose $\begin{cases} u(t) = h(t) \\ v'(t) = 1 \end{cases}$ donc: $\begin{cases} u'(t) = h'(t) \\ v(t) = t \end{cases}$

d'ou: $\int_{\cdot}^{\cdot} h(t)\,dt = [t\,h(t)]_{\cdot}^{\cdot} - \int_{\cdot}^{\cdot} t\,h'(t)\,dt = \frac{\sqrt{3}}{3} h\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{-4t^2}{1-t^2}\,dt$

$= \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + 2\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2t^2}{1-t^2}\,dt = 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{3}\ln(2)$

par suite: $\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \ln\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)dt = 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{3}\ln(2)$

3) a) Soit x un élément de $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$, on a: $g(x) = \left(\frac{\ln(x)}{x-1}\right)\left(\frac{x-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\right)$

$= \left(\frac{\ln(x)}{x-1}\right).\left(\frac{(x-1)\sqrt{1-x^2}}{(1+x)(1-x^2)}\right)$

$\left(\frac{\ln(x)}{x-1}\right).\left(\frac{-\sqrt{1-x^2}}{(1+x)^2}\right)$

et puisque: $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ et $\lim_{x\to 1}\left(\frac{-\sqrt{1-x^2}}{(1+x)^2}\right) = 0$

alors: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x}{x-1}\right).\left(\frac{-\sqrt{1-x^2}}{(x+1)^2}\right) = 0$

c'est-à-dire: $\lim_{x\to\cdot} g(x) \quad 0 = g(1)$ ainsi g est continue à gauche en 1

b) on pose: $x = \cos u$, alors $dx = -\sin(u)\,du$

et on a: $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 u} = |\sin(u)| = \sin(u)$

et $x = 1 \quad \begin{cases} u = 0 \\ u = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

car: $\sin(u) \geq 0$ pour tout u de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

donc: $\int_{\cdot}^{0} g(x)\,dx = \int_{\cdot}^{0} \frac{\ln(\cos u)(-\sin u)}{(1+\cos u).\sin u}\,du = -\int_{\cdot}^{0} \frac{\ln(\cos u)}{1+\cos u}\,du \quad \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\cos u)}{1+\cos u}\,du$

d'où: $\int_{\cdot}^{0} g(x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\cos u)}{1+\cos u}\,du$

c) On pose $t = \tan\left(\frac{u}{2}\right)$ alors $dt = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{u}{2}\right)\right)du$

(c'est-à-dire: $du = \frac{2}{1+t^2}dt$) et $\begin{cases} u = 0 \\ u = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

on a: $\cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ donc: $1+\cos u = \frac{2}{1+t^2}$

d'où: $I = -\int_{0}^{\cdot}\left(\frac{1+t^2}{2}\right).\ln\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right).\left(\frac{2}{1+t^2}\right)dt = -\int_{0}^{\cdot} \ln\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)dt = 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{3}\ln(2)$

1) a- Vérifions que : $(\forall t \in IR - \{-1\}); \frac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}$

Soit t un élément de $(\mathbb{R} - \{-1\})$; on a :

$$t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} = \frac{t^2(t+1) - t(t+1) + t + 1 - 1}{t+1} = \frac{t^3 + t^2 - t^2 - t + t}{t+1} = \frac{t^3}{t+1}$$

b- Calculons l'intégrale I

$$I = \int_1^2 \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right]_1^2 = \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{11}{6}$$

donc $I = \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{11}{6}$

2)Calculons l'intégrale J

On pose : $t = \sqrt[3]{x^2+1}$, donc $t^6 = x^2 + 1$ d'où : $xdx = 3t^5 dt$

On a : $\sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^2+1} = t^3 + t^2$ et $\begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{63} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$

donc $J = \int_0^{\sqrt{63}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^2+1}} dx$

$$= \int_1^2 \frac{3t^5}{t^3 + t^2} dt = 3\int_1^2 \frac{t^3}{t+1} dt = 3I = 3\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{11}{2}$$

d'où $J = 3\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{11}{2}$

1) Soit x un élément de $\left[0; \frac{\pi}{8}\right]$

Montrons que : $\frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \frac{1}{\cos^2(2x)}\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\tan^2(2x)}\right)$

On a : $\cos^4 + \sin^4 x = (\cos^2 x)^2 + (\sin^2 x)^2$

$$= \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}(2 + 2\cos^2(2x))$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \cos^2(2x))$$

$$= \frac{1}{2}(\cos^2(2x) + \sin^2(2x) + \cos^2(2x)) - \cos^2(2x) + \frac{1}{2}\sin^2(2x)$$

$$= \cos^2(2x)\left(1 + \frac{1}{2}\tan^2(2x)\right)$$

donc : $\frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \frac{1}{\cos^2(2x)}\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\tan^2(2x)}\right)$

2) Calculons I

On a : $I=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\frac{1}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\frac{1}{\cos^4(2x)\left(1+\frac{1}{2}\tan^2(2x)\right)}dx$

On pose : $t=\tan(2x)$, donc : $dt=\frac{2}{\cos^2(2x)}dx$, donc : $\frac{1}{2}dt=\frac{1}{\cos^2(2x)}dx$

et on a : $\begin{cases}x=0\\x=\frac{\pi}{8}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}t=0\\t=1\end{cases}$

donc : $I=\int_0^1\frac{1}{1+\frac{1}{2}t^2}\times\frac{1}{2}dt=\int_0^1\frac{1}{2+t^2}dt$ et on a : $2+t^2=2\left(1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$

On pose : $u=\frac{t}{\sqrt{2}}$ donc : $dt=\sqrt{2}\,du$ et $\begin{cases}t=0\\t=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=0\\u=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$

$I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1+u^2}du=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[Arc\tan u\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Exercice 57

1) a- Vérifions que : $(\forall x\in IR)$; $\cos^4 x+\sin^4 x-1=2\cos^2(x)(\cos^2 x-1)$

Soit x un nombre réel , on a :

$$\begin{aligned}\cos^4(x)+\sin^4(x)-1&=\cos^4(x)+(1-\cos^2(x))^2-1\\&=\cos^4(x)+1-2\cos^2(x)+\cos^4(x)-1\\&=2\cos^4(x)-2\cos^2(x)\end{aligned}$$

donc : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $\cos^4 x+\sin^4 x-1=2\cos^2(x)(\cos^2 x-1)$

b- Vérifions que : $(\forall t\in IR^*-\{-1;1\})$; $\frac{1}{t^2(t^2-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)-\frac{1}{t^2}$

Soit t un élément de $\left(\mathbb{R}^*-\{-1;1\}\right)$

On a : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)-\frac{1}{t^2}=\frac{t+1-t+1}{2(t-1)(t+1)}-\frac{1}{t^2}$

$$=\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2}=\frac{1}{t^2(t^2-1)}$$

c- Calculons l'intégrale I

On a : $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos^4 x+\sin^4 x-1}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{2\cos^2(x)(\cos^2 x-1)}dx$

On pose : $t=\cos x$, alors $dt=-\sin x dx$ et : $\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}\\x=\frac{\pi}{3}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}t=\frac{\sqrt{2}}{2}\\t=\frac{1}{2}\end{cases}$

donc $I=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{-1}{2t^2(t^2-1)}dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{t^2(t^2-1)}dt$

et on a : $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2(t^2-1)}dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)-\frac{1}{t^2}\right)dt$

$$= \left[\frac{1}{2}(\ln|t-1|-\ln|t+1|+\frac{1}{t}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\frac{1}{t}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right)+2-\frac{1}{2}\ln(3-2\sqrt{2})-\sqrt{2}$$

$$= 2-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln(9-6\sqrt{2})$$

donc : $I = -\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln(9-6\sqrt{2})\right) = \frac{\sqrt{2}-2}{2}+\frac{1}{4}\ln(9-6\sqrt{2})$

2) a- Montrons que : $J = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\frac{1-t}{1+t^2}dt$.

On a : $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x\cos x}{1+\cos^2(2x)}dx$

On pose : $t = \cos(2x)$, alors $dt = -2\sin(2x)\,dx = -4\sin x\cos x dx$

c'est-à-dire : $\sin x\cos x dx = -\frac{1}{4}dt$

On a : $1-\cos(2x) = 2\sin^2(x)$, donc : $\sin^2 x = \frac{1-t}{2}$

et on a : $\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$

donc : $J = \int_1^{-1} \frac{1-t}{2(1+t^2)}\left(-\frac{1}{4}\right)dt = -\frac{1}{8}\int_1^{-1}\frac{1-t}{1+t^2}dt = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\frac{1-t}{1+t^2}dt$

b- Déduction

Soit t un élément de $[-1;1]$, on a :

$$\frac{1-t}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2}-\frac{t}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}$$

$$J = \frac{1}{8}\left(\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}\right)\right)dt$$

$$= \frac{1}{8}\left[Arc\tan t-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{8}\left(Arc\tan 1-\frac{1}{2}\ln 2-Arc\tan(-1)+\frac{1}{2}\ln(2)\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{16}$$

Exercice

1) Calculons $I = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$ en posant $t = \frac{1}{x}$

Soit $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, on a : $x = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = \frac{1}{x}$, donc : $dt = \frac{-1}{x^2}dx$

$\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{t^2}\sqrt{1-\frac{1}{t^2}} = \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^3}$, (car : $t \in [\sqrt{2};\sqrt{3}]$)

On a : $x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow t = \sqrt{3}$ et $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$

donc : $I = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{-t}{\sqrt{t^2-1}}dt = -\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{2t}{2\sqrt{t^2-1}}dt = -\left[-\sqrt{t^2-1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = 1-\sqrt{2}$

2) Calculons l'intégrale : $J = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

On pose : $t = \sqrt{e^x-1}$, alors : $t^2 = e^x - 1$, donc : $x = \ln(t^2+1)$

d'où : $dx = \frac{2t}{1+t^2}dt$

d'autre part, on a : $x = \ln 2 \Leftrightarrow t = 1$

$x = \ln 4 \Leftrightarrow t = \sqrt{3}$

donc : $J = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{1+t^2}dt$

$= [2Arc\tan t]_1^{\sqrt{3}}$

$= 2\left(Arc\tan\sqrt{3} - Arc\tan 1\right) = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}$

3) a-Déterminons a, b et c tels que :

$\forall t \in \mathbb{R}-\{1\}); \frac{t}{t^3-1} = \frac{a}{t-1} + \frac{bt+c}{t^2+t+1}$

Soit $t \in \mathbb{R} - \{1\}$ on a : $\frac{a}{t-1} + \frac{bt+c}{t^2+t+1} = \frac{a(t^2+t+1)+(t-1)(bt+c)}{t^3-1}$

$= \frac{(a+b)t^2+(a-b+c)t+(a-c)}{t^3-1}$

donc : $a+b=0$ et $a-b+c=1$ et $a-c=0$

d'où : $c = \frac{1}{3}$ et $b = -\frac{1}{3}$ et $a = \frac{1}{3}$

b-Déduction

D'après la question a) on a : $\frac{t}{t^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{t-1}{t^2+t+1}\right)$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{2t-2}{2(t^2+t+1)}\right)$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{2t+1}{2(t^2+t+1)} + \frac{3}{2(t^2+t+1)}\right)$

donc : $\frac{t}{t^3-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{t-1}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{2t+1}{t^2+t+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2+t+1}\right)$

c- Déterminons une fonction primitive de la fonction $u: t \mapsto \frac{1}{t^2+t+1}$ sur $\mathbb{R}$

Puisque u est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, alors elle admet une fonction primitive sur $\mathbb{R}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$u(t)=\frac{1}{t^2+t+1}=\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}\left(\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1\right)}=\frac{\frac{4}{3}}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

On pose : $v(t)=\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$ alors $v'(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}$ donc $u(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{v'(t)}{(v(t))^2+1}$

d'où : une fonction primitive de la fonction u sur $\mathbb{R}$ est la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}Arc\tan(v(t))$

c'est-à-dire : $(\forall t \in IR)\ H(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}Arc\tan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)$

d- Calculons : $K=\int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{26}}\frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^2}}$

On pose : $t=\sqrt{1+x^2}$; alors : $t^2=1+x^2$ donc $x^2=t^2-1$ et $2xdx=3t^2dt$

d'où : $\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}=\frac{xdx}{x^4\sqrt{x^2+1}}=\frac{\frac{3}{2}t^2dt}{(t^2-1)^2t}$ c'est-à-dire $\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}=\frac{3}{2}\left(\frac{t}{t^3-t}\right)dt$

d'autre part : $x=\sqrt{7} \iff t=2$; $x=\sqrt{26} \iff t=3$

donc : $K=\frac{3}{2}\int_2^3\frac{t}{t^3-t}dt$

et d'après la question b) et la linéarité de l'intégrale, on obtient .

$$K=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\int_2^3\frac{1}{t-1}dt-\frac{1}{6}\int_2^3\frac{2t+1}{t^2+t+1}dt+\frac{1}{2}\int_2^3\frac{dt}{t^2+t+1}\right)$$

$$K=\frac{1}{2}\left[\ln|t-1|\right]_2^3-\frac{1}{4}\left[\ln(t^2+t+1)\right]_2^3+\frac{3}{4}\left[H(t)\right]_2^3$$

d'où : $K=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{13}{7}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(Arc\tan\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)-Arc\tan\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)\right)$

Exercice n°3

1) a- Soit $t \in]0; +\infty[$

on a : $t^4 - 2t^2 + 2t - 2 + \frac{2}{t+1} = \frac{(t+1)(t^3 - 2t^2 + 2t - 2) + 2}{t+1}$

$= \frac{t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2t + t^3 - 2t^2 + 2t}{t+1}$

$= \frac{t^4 - t^3}{t+1}$

donc $(\forall t \in]0; +\infty[)$; $\frac{t^4 - t^3}{t+1} = t^3 - 2t^2 + 2t - 2 + \frac{2}{t+1}$

b- Calculons l'intégrale $I = \int_0^{\cdot} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x+1}} dx$

On pose $t = \sqrt[4]{x+1}$ alors : $t^4 = x + 1$; donc : $dx = 4t^3 dt$

et on a : $x = -1 \iff t = 0$; $x = 0 \iff t = 1$

d'autre part $t^2 = \sqrt{x+1}$ donc : $I = \int_0^1 \frac{t^2 - t}{t^2 + t} 4t^3 dt = 4\int_0^1 \frac{t^4 - t^3}{t+1} dt$

et d'après la question a) et en utilisant la linéarité de l'intégrale on obtient :

$$I = 4\int_0^1 (t^3 - 2t^2 + 2t - 2)\,dt + 8\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt$$

$$= 4\left[\frac{t^4}{4} - \frac{2t^3}{3} + t^2 - 2t\right]_0^1 + 8\left[\ln(1+t)\right]_0^1$$

$$= 4\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - 1\right) + 8\ln 2$$

donc : $I = -\frac{17}{3} + 8\ln 2$

2) a- Soit $t \in]0; +\infty[$; vérifions que : $\frac{t^2 + 2t + 2}{t(t+1)} = 1 + \frac{2}{t} - \frac{1}{t+1}$

On a : $1 + \frac{2}{t} - \frac{1}{t+1} = \frac{t(t+1) + 2(t+1) - t}{t(t+1)} = \frac{t^2 + 2t + 2}{t(t+1)}$

donc : $(\forall t \in]0; +\infty[)$; $\frac{t^2 + 2t + 2}{t(t+1)} = 1 + \frac{2}{t} - \frac{1}{t+1}$

b- Calculons l'intégrale : $J = \int_0^1 \frac{1 + x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx$

On pose : $t = \sqrt{x^2 + 2x + 2} + x$; on a : $(t - x)^2 = x^2 + 2x + 2$ c'est-à-dire

$-2tx + t^2 = 2x + 2$

donc : $x = \frac{t^2 - 2}{2t + 2}$; d'où : $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2 + 2t + 2}{(t+1)^2}\right)$

et on a : $x = 0 \iff t = \sqrt{2}$; $x = 1 \iff t = \sqrt{5} + 1$

d'où : $J = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}+1} \frac{1+t}{t} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{t^2+2t+2}{(t+1)^2}\right)dt = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}+1} \frac{t^2+2t+2}{t(t+1)}\,dt$

et d'après la question 2) a) on conclut que :

$$J = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}+1}\left(1+\frac{2}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{2}\left[t+2\ln t-\ln(t+1)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}+1} = \frac{1}{2}\left[t+\ln\left(\frac{t^2}{t+1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}+1}$$

ainsi : $J = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}+1+\ln\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}\right)-\ln\left(\frac{2}{\sqrt{2}+1}\right)\right)$

1) a- Déterminons D.

Soit x un élément de $\mathbb{R}$.

On a : $x \in D \iff \sin x \neq 0$ ou $x = 0$

$\iff (x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z})$ ou $x = 0$

donc: $D = \mathbb{R} - \{k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}^*\}$

b- Montrons que la fonction f est continue en $x_0 = 0$

Soit x un élément de D tel que $x \neq 0$, on a :

$f(x) = \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)x} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{2n+1}{2}$

et puisque : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ alors $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$; et on a : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)x} = 1$

donc : $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{2n+1}{2} = f(0)$; ainsi f est continue en $x_0 = 0$.

2) a-La fonction $x \mapsto \frac{1}{2\sin x}$ est continue sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$

et la fonction $x \mapsto \sin(2n+1)x$ est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$; donc la fonction f est continue sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$.

• Et f est continue à droite en 0

donc la fonction f est continue sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, donc f admet une primitive sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

b-Soit x un élément de D tel que $x \neq 0$

on a : $\sum_{k=1}^{n}\cos(2kx) + i\sum_{k=1}^{n}\sin(2kx) = \sum_{k=1}^{n}\left(\cos(2kx)+i\sin(2kx)\right)$

$$= \sum_{k=1}^{n} e^{i2kx} = \sum_{k=1}^{n}(e^{i2x})^k = \sum_{k=0}^{n}(e^{i2x})^k - 1$$

et on a : $\sum_{k=0}^{n}(e^{i2x})^k = \frac{(e^{i2x})^{n+1}-1}{e^{i2x}-1} = \frac{e^{i(2n+2)x}-1}{e^{i2x}-1}$

et puisque : $e^{2i(n+1)x}-1=e^{i(n+1)x}.(e^{i(n+1)x}-e^{-i(n+1)x})=(2i\sin(n+1)x).e^{i(n+1)x}$

et $e^{2ix}-1=e^{ix}.(e^{ix}-e^{-ix})=(2i\sin x).e^{ix}$

alors : $\sum_{k=0}^{n}(e^{2ix})^k-1=\dfrac{(\sin(n+1)x).e^{i(n+1)x}}{(\sin x)e^{ix}}-1$

$=\dfrac{(\sin(n+1)x).e^{inx}}{\sin x}-1$

$=\left(\dfrac{\sin(n+1)x.\cos(nx)}{\sin x}-1\right)+i\dfrac{\sin(n+1)x\sin(nx)}{\sin x}$

donc $\sum_{k=1}^{n}\cos(2kx)=\dfrac{\sin(n+1)x.\cos(nx)}{\sin x}-1$

on a : $\sin(n+1)x.\cos(nx)=\dfrac{1}{2}[\sin(2nx+x)+\sin x]$

d'où : $\sum_{k=1}^{n}\cos(2kx)=\dfrac{\sin(2nx+x)+\sin x}{2\sin x}-1=\dfrac{\sin(2nx+x)}{2\sin x}-\dfrac{1}{2}$

ainsi : $\dfrac{\sin(2n+1)x}{2\sin x}=\sum_{k=1}^{n}\cos(2kx)+\dfrac{1}{2}$

c'est-à-dire : $f(x)=\dfrac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(2kx)$

pour $x=0$ on a : $\dfrac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(0)=\dfrac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}1=\dfrac{1}{2}+n=\dfrac{1+2n}{2}=f(0)$

donc : $(\forall x\in D)\ ;\ f(x)=\dfrac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(2kx)$

c) on a : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(2kx)dx\right)=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1.dx+\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2kx)dx\right)$

et puisque : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2kx)dx=\left[\dfrac{1}{2k}\sin(2kx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0$,

alors : $\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2kx)dx\right)=0$ donc : $I=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{4}$

d'où : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\dfrac{\pi}{4}$

Exercice 41

1) Montrons que : $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\left(\int_a^b(f(x))^2dx\right)\left(\int_a^b(g(x))^2dx\right)$

Soit λ un nombre réel.

On a : $(\forall x\in[a,b])\ ;\ (\lambda f+g)^2(x)=\lambda^2(f(x))^2+2\lambda f(x)g(x)+(g(x))^2$

donc : $\int_a^b(\lambda f+g)^2(x)dx=\int_a^b\left(\lambda^2(f(x))^2+2\lambda f(x)g(x)+(g(x))^2\right)dx$

$=\lambda^2.\int_a^b(f(x))^2dx+2\lambda\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b(g(x))^2dx$

et puisque : $(\forall x\in[a;b])\ ;\ (\lambda f+g)^2(x)\ge 0$ alors

$P(\lambda) = \int_a^b (\lambda f + g)^2(x)\,dx \geq 0$

$(\forall \lambda \in IR)\ ;\ P(\lambda) = \lambda^2 \int_a^b (f(x))^2 dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b (g(x))^2 dx > 0$

donc le discriminant Δ du polynôme $P(\lambda)$ vérifie : $\Delta < 0$.

et puisque : $\Delta = 4\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - 4\int_a^b (f(x))^2 dx \int_a^b (g(x))^2 dx$

$= 4\left[\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 - \left(\int_a^b (f(x))^2 dx\right).\left(\int_a^b (g(x))^2 dx\right)\right]$

a ors : $\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 < \left(\int_a^b (f(x))^2 dx\right).\left(\int_a^b (g(x))^2 dx\right)$

2) Montrons que : $\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right).\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right) > 1$

On a les fonctions $\sqrt{f}$ et $\sqrt{g}$ sont continues sur l'intervalle $[0;1]$

et puisque : $(\forall x \in [0,1])$, $f(x)g(x) > 1$; alors $(\forall x \in [0,1])$: $\sqrt{f(x)g(x)} \geq 1$

donc : $\int_0^1 \sqrt{f(x)g(x)}\,dx \geq 1$

et d'après la question 1) on a : $\left(\int_0^1 \sqrt{f(x)g(x)}\,dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right).\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)$

d'où : $\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right).\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right) \geq 1$

3) Montrons que : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\,dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

On désigne par f et g les fonctions définies sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par :

$f(x) = \frac{1}{\cos x}$ et $g(x) = 1$

On a : f et g sont continues sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$,

donc d'après 1) on a : $\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)g(x)\,dx\right)^2 < \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} (f(x))^2 dx\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} (g(x))\,dx\right)$

c'est-à-dire : $\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\,dx\right)^2 \leq \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1.dx\right)$

et puisque : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$ et $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}$

alors : $\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\,dx\right)^2 < \frac{\pi}{4}$, et on a : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\,dx > 0$ donc $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\,dx < \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

1) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ ;\ F(x) = \frac{e^t - 1}{t}\Big]_{3x}^{2x} - \int_{2x}^{3x} \frac{e^t}{t}\,dt$

Soit $x \in]0;+\infty[$

utilisons une intégration par parties :

On pose : $\begin{cases} u(t) = e^t - 1 \\ v'(t) = -\dfrac{1}{t^2} \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u'(t) = e^t \\ v(t) = \dfrac{1}{t} \end{cases}$

les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $[2x, 3x]$; et les fonctions

u' et v' sont continues sur l'intervalle $[2x;3x]$

donc : $F(x) = \left[u(t).v(t)\right]_{2x}^{3x} - \int_{2x}^{3x} u'(t)\ v(t)\,dt = \left[\dfrac{e^t - 1}{t}\right]_{x}^{3x} - \int_{2x}^{3x} \dfrac{e^t}{t}dt$

d'où : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $F(x) = \left[\dfrac{e^t - 1}{t}\right]_{2x}^{3x} - \int_{2x}^{3x} \dfrac{e^t}{t}dt$

2) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$, $e^{2x}.\int_{2x}^{3x} \dfrac{dt}{t} < \int_{2x}^{3x} \dfrac{e^t}{t}dt < e^{3x}.\int_{2x}^{3x} \dfrac{dt}{t}$

Soit $x \in]0;+\infty[$

Puisque la fonction $x \longmapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

alors : $(\forall t \in [2x;3x])$; $e^{2x} \le e^t \le e^{3x}$ donc : $(\forall t \in [2x;3x])$; $\dfrac{e^{2x}}{t} < \dfrac{e^t}{t} < \dfrac{e^{3x}}{t}$

d'où : $\int_{2x}^{3x} \dfrac{e^{2x}}{t}.dt \le \int_{2x}^{3x} \dfrac{e^t}{t}dt \le \int_{2x}^{3x} \dfrac{e^{3x}}{t}dt$

c'est-à-dire : $e^{2x}.\int_{2x}^{3x} \dfrac{dt}{t} \le \int_{2x}^{3x} \dfrac{e^t}{t}dt \le e^{3x}.\int_{2x}^{3x} \dfrac{dt}{t}$

ainsi : $(\forall x \in IR_+^*)$; $e^{2x}.\int_{2x}^{3x} \dfrac{dt}{t} \le \int_{2x}^{3x} \dfrac{e^t}{t}dt \le e^{3x}.\int_{2x}^{3x} \dfrac{dt}{t}$

3) Déduction

Soit x un élément de $]0;+\infty[$

On a : $\int_{2x}^{3x} \dfrac{dt}{t} = [\ln|t|]_{2x}^{3x} = \ln(3x) - \ln(2x) = \ln\left(\dfrac{3x}{2x}\right) = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

donc d'après 2): $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$, $e^{2x} \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) \le \int_{2x}^{3x} \dfrac{e^t}{t}dt \le e^{3x} \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

et puisque : $\lim_{x \to 0^+} e^{2x} \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) = \lim_{x \to 0^+} e^{3x} \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ (car $\lim_{0} e^x = 1$)

d'où : $\lim_{x \to 0^+} \int_{2x}^{3x} \dfrac{e^t}{t}dt = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

et on a : $\left[\dfrac{e^t - 1}{t}\right]_{x}^{3x} = \dfrac{e^{3x} - 1}{3x} - \dfrac{e^{2x} - 1}{2x}$

et $\lim_{x \to 0^+}\left(\dfrac{e^{3x} - 1}{3x}\right) = \lim_{x \to 0^+}\left(\dfrac{e^{2x} - 1}{2x}\right) = 1$ (car : $\lim_{X \to 0} \dfrac{e^X - 1}{X} = 1$) donc : $\lim_{x \to 0^+}\left[\dfrac{e^t - 1}{t}\right]_{x}^{3x} = 0$

d'où : $\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+}\left(\left[\dfrac{e^t - 1}{t}\right]_{2x}^{3x} - \int_{2x}^{3x} \dfrac{e^t}{t}dt\right) = -\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

1) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $I_n = \frac{1}{n+1}.\tan(1) - \frac{1}{n+1} J_n$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$, on a : $I_n = \int_0^1 x^n.\tan x dx$

Utilisons une intégration par parties, on pose : $u(x) = \tan x$ et $v'(x) = x^n$

donc : $u'(x) = 1 + \tan^2(x)$ et $v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

On a : - Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $[0;1]$

- Les fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle $[0;1]$

donc : $I_n = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 v(x)u'(x)dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}.\tan x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}.(1+\tan^2 x)dx$

$= \frac{1}{n+1}\tan(1) - \frac{1}{n+1}.\int_0^1 x^{n+1}.(1+\tan^2 x)dx = \frac{1}{n+1}.\tan(1) - \frac{1}{n+1}.J_n$

d'où $(\forall n \in \mathbb{N}^*); I_n = \frac{1}{n+1}.\tan(1) - \frac{1}{n+1} J_n$

2) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 \le J_n \le \frac{1+\tan^2(1)}{n+2}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

On a : la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

et $1 < \frac{\pi}{2}$

donc : $0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le \tan x \le \tan(1)$

$\Rightarrow 0 \le 1 + \tan^2(x) \le 1 + \tan^2(1)$

d'où : $(\forall x \in [0;1])$; $0 \le x^{n+1}.(1 + \tan^2(x)) \le (1 + \tan^2(1))x^{n+1}$

et d'après la propriété de l'intégrale et l'ordre, on a :

$0 \le \int_0^1 x^{n+1}(1 + \tan^2(x))dx \le \int_0^1 (1 + \tan^2(1)).x^{n+1}dx$

c'est-à-dire : $0 \le J_n \le (1 + \tan^2(1)).\int_0^1 x^{n+1}dx$

et puisque : $\int_0^1 x^{n+1}dx = \left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+2}$; alors : $0 \le J_n \le \frac{1+\tan^2(1)}{n+2}$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 \le J_n \le \frac{1+\tan^2(1)}{n+2}$

• Déduction :

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), 0 < J_n < \frac{1+\tan^2(1)}{n+2}$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1+\tan^2(1)}{n+2} = 0$

d'où, d'après les critères de convergences on a: $\lim_{n \to +\infty} J_n = 0$

3) Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} n.I_n$.

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $n.I_n = \frac{n}{n+1}.\left(\tan(1) - J_n\right)$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$

donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} n.I_n = 1 \times (\tan(1) - 0) = \tan(1)$

Exercice 40

1) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 \le I_n \le \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$, et x un élément de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,

On a : $0 < n \le n + x$ donc $0 < \frac{1}{x+n} \le \frac{1}{n}$

et puisque $0 \le \sin x \le 1$ alors $0 \le \frac{\sin x}{x+n} \le \frac{\sin x}{n}$

donc : $\left(\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\right)$; $0 \le \frac{\sin x}{x+n} \le \frac{\sin x}{n}$

d'où : $0 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x+n} dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{n} dx$; c'est-à-dire : $0 \le I_n \le \frac{1}{n}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

ainsi : $(\forall n \in IN^*)$; $0 \le I_n \le \frac{1}{n}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

* Déduction :

On a : $\int \sin x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$, et $(\forall n \in IN^*) : 0 < I_n < \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

donc : $(\forall n \in IN^*)$; $0 \le I_n \le \frac{1}{n}$

et puisque : $\lim \frac{1}{n} = 0$ alors d'après les critères de convergence, on a:

$\lim I_n = 0$

2) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

a- Vérifions que : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n\sin x}{x+n} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{x+n} dx$

on a : d'après la linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n\sin x}{x+n} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{n\sin x}{x+n} - \sin x\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{n\sin x - x\sin x - n\sin x}{x+n}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-x\sin x}{x+n} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{x+n} dx$$

donc : $\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n\sin x}{x+n} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx\right| = \left|-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{x+n} dx\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{x+n} dx\right|$

et puisque $(\forall x \in [0,\pi])$: $\frac{x\sin x}{x+n} \geq 0$ (car $0 \leq \sin x \leq 1$)

alors : $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{x+n}dx \geq 0$, d'où : $\left|\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{x+n}dx - \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{x+n}dx\right|$

ainsi : $\left|\int_0^{\pi} \frac{n\sin x}{x+n}dx - \int_0^{\pi}\sin x dx\right| = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{x+n}dx$

b- Montrons que : $\int_0^{\pi} \frac{x.\sin x}{x+n}dx \leq \frac{\pi^2}{n}$

Soit x un élément de l'intervalle $[0;\pi]$, et $n \in \mathbb{N}^*$

On a : $x+n \geq n > 0$ donc : $0 < \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$, d'où $0 \leq \frac{x}{x+n} \leq \frac{\pi}{n}$

(car $0 \leqslant x \leqslant \pi$) et on a : $0 \leq \sin x \leq 1$, donc : $\frac{x\sin x}{x+n} \leq \frac{\pi}{n}$

ainsi : $(\forall x \in [0;\pi])$; $\frac{x\sin x}{x+n} \leq \frac{\pi}{n}$

et d'après la propriété de l'intégrale et ordre on a : $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{x+n}dx \leq \int_0^{\pi} \frac{\pi}{n}dx$

et : $\int_0^{\pi} \frac{\pi}{x}dx = \frac{\pi}{n}[x]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{n}$ donc : $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{x+n}dx \leq \frac{\pi^2}{n}$

3) Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\left|\int_0^{\pi} \frac{n\sin x}{x+n}dx - \int_0^{\pi}\sin x dx\right| = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{x+n}dx$ et $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{x+n} \leq \frac{\pi^2}{n}$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\left|J_n - \int_0^{\pi}\sin x dx\right| \leq \frac{\pi^2}{n}$

et on a : $\int_0^{\pi}\sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2$

d'où : $(\forall n \in IN^*)$; $|J_n - 2| \leq \frac{\pi^2}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi^2}{n} = 0$

finalement d'après les critères de convergence on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 2$

Exercice 45

On considère la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{n+1}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^{n+1}$

On a f est continue sur $\mathbb{R}^+$ alors la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et c'est la fonction primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^+), F'(x) = \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^n f(x)$

d'où F' est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\int_0^a F'(x)\,dx = \int_0^a \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^n f(x)\,dx$

et on a : $\int_0^a F'(x)\,dx = F(a) - F(0) = F(a)$

donc : $\frac{1}{n+1}\left(\int_0^a f(t)\,dt\right)^{n+1} = \int_0^a \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^n f(x)\,dx$

1)* On a g est une fonction continue sur $[a;b]$, donc F est la primitive de g sur $[a;b]$ qui s'annule en a.

d'où F est dérivable sur $[a;b]$, et : $(\forall x \in [a;b]) ; F'(x) \quad g(x)$

* On a . g est continue sur $[a;b]$, donc $g([a,b]) = J$ où J est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.

Soit H la fonction définie de J sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) \mapsto \int_a^{\cdot} g'(t)dt$

on a g' est continue sur l'intervalle J, donc H est la primitive de

La fonction g^{-1} qui s'annule en $g(a)$

donc H est dérivable sur J et : $(\forall x \in J)$; $H'(x) = g^{-1}(x)$.

et pour tout x de J on a : $G(x) - \int_{g(a)}^{g(x)} g^{-1}(t)\,dt + xg(x) - H(g(x)) + xg(x)$

et puisque g est dérivable sur $[a;b]$ et la fonction H est dérivable sur $J = g([a;b])$ alors la fonction Hog est dérivable sur $[a;b]$

alors : $(\forall x \in [a,b])$; $(Hog)'(x) - H'(g(x)).g'(x) - g^{-1}(g(x))\,g'(x) = xg'(x)$

d'ou la fonction G est dérivable sur $[a;b]$ (somme de deux fonctions dérivables sur $[a;b]$).

et on a : $(\forall x \in [a,b])$; $G'(x) = -xg'(x) + xg'(x) + g(x) = g(x)$

2)Déduction:

Les fonctions F et G sont dérivables sur $[a;b]$

et $(\forall x \in [a,b]) ; F'(x) = G'(x)$

donc $(\exists c \in \mathbb{R}) ; (\forall x \in [a,b]) ; F(x) = G(x) + c$

pour $x = a$, on a : $F(a) = 0$ et $G(a) = ag(a)$; donc $c = -ag(a)$

d'où $(\forall x \in [a,b]) ; F(x) = G(x) - ag(a)$

Par conséquent : $F(b) - G(b) - ag(a)$

c'est-à-dire : $\int_a^b g(t)\,dt = bg(b) \quad ag(a) \; - \int_{g(a)}^{g(b)} g^{-1}(t)\,dt$

1) a- Montrons que ψ est dérivable sur $[a;b]$.

* On a f est dérivable sur $[a;b]$, donc f' est dérivable sur $[a;b]$.

* et puisque f est continue sur $[a;b]$ alors la fonction : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur $[a;b]$ qui s'annule en $x=a$ donc la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a;b]$, d'où la fonction ψ est dérivable sur l'intervalle $[a,b]$ (somme de deux fonctions dérivables sur $[a;b]$

b) Calculons $\psi'(x)$ pour tout x de $[a;b]$

La fonction $u: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a;b]$ et on a :

$(\forall x \in [a,b])$; $u'(x) = f(x)$

donc : $(\forall x \in [a,b])$; $\psi'(x) = 2f(x)f'(x) - 2f(x)$

c'est-à-dire : $(\forall x \in [a,b])$; $\psi'(x) = 2f(x)(f'(x) - 1)$

c) Montrons que ψ est décroissante sur $[a;b]$

On a : $(\forall x \in [a,b])$; $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $[a;b]$.

d'où $(\forall x \in [a,b])$; $f(a) \leq f(x)$

et on a $f(a) = 0$ donc : $(\forall x \in [a,b])$; $f(x) \geq 0$

et on a : $(\forall x \in [a,b])$; $f'(x) - 1 \leq 0$, d'après la donnée iii)

donc : $(\forall x \in [a,b])$; $f(x)(f'(x) - 1) \leq 0$

c'est-à-dire : $(\forall x \in [a,b])$; $\psi'(x) \leq 0$

Par conséquent ψ est décroissante sur l'intervalle $[a;b]$.

* Déduction :

La fonction ψ est décroissante sur $[a;b]$, donc $(\forall x \in [a,b])$; $\psi(x) \leq \psi(a)$

et on a : $\psi(a) = 0$ (car $f(a) = 0$ et $\int_a^a f(t)dt = 0$)

donc : $(\forall x \in [a,b])$; $\psi(x) \leq 0$

2) a- Montrons que φ est une fonction dérivable sur $[a;b]$

On a la fonction $u: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a;b]$.

donc la fonction u^2 est dérivable sur $[a;b]$.

La fonction f^3 est continue sur $[a;b]$, donc la fonction $x \mapsto \int_a^x f^3(t)dt$ est la fonction primitive de f sur $[a;b]$, qui s'annule en a , donc elle est dérivable sur $[a;b]$.

Finalement la fonction φ est dérivable sur $[a;b]$.

b- Calculons $\varphi'(x)$ pour tout x de l'intervalle $[a;b]$

On a : $(\forall x \in [a,b])$, $\varphi'(x) = f^3(x) - 2f(x)\int_a^x f(t)dt = f(x)\left(f^2(x) - 2\int_a^x f(t)dt\right)$

donc : $(\forall x \in [a,b]) ; \varphi'(x) = f(x).\psi(x)$

3) Déduction :

On a : $\psi(x) \leq 0$ et $(\forall x \in [a,b]) ; f(x) \geq 0$

donc : $(\forall x \in [a,b]) ; \varphi'(x) \leq 0$ d'où la fonction φ est décroissante sur l'intervalle $[a;b]$, par suite : $a < b \Rightarrow \varphi(a) \geq \varphi(b)$

et on a : $\varphi(a) = 0$; $\varphi(b) \leq \varphi(a)$ et on a : $\varphi(b) = \int_a^b f^3(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)^3$

donc : $\int_a^b f^3(t)\,dt \leq \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)^2$

1) a) Vérifions que la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

On a : F est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ (quotient de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.

Et on a : $\forall x \in]0;+\infty[$; $F'(x) = -\dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 - \ln x}{x^2} = -\dfrac{\ln x}{x^2} = f(x)$

donc : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; F'(x) = f(x)$

d'où F est une primitive de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$

b- Calculons l'intégrale I :

On a : $I = \int_2^n f(t)\,dt = [F(t)]_2^n = F(n) - F(2) = -\dfrac{1+\ln(n)}{n} + \dfrac{1+\ln(2)}{2}$

donc : $I = \dfrac{1+\ln(2)}{2} - \dfrac{1+\ln(n)}{n}$

• Déduction :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : $n > 2$ on a : $\ln(n) > 0$ donc : $\dfrac{1+\ln(n)}{n} > 0$

et puisque : $\dfrac{1+\ln(2)}{2} - I = \dfrac{1+\ln(n)}{n}$; alors : $I \leq \dfrac{1+\ln(2)}{2}$

c) Montrons que f est strictement croissante sur l'intervalle $[2,+\infty[$.

On a f est dérivable sur $[2;+\infty[$,

et $\forall x \in [2;+\infty[$; $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

On a : $f'(x) \leq 0 \iff x \geq \sqrt{e}$

et puisque : $x > \sqrt{e}$ alors : $(\forall x \in [2;+\infty[) . f'(x) < 0$

donc f est strictement décroissante sur 'interva le $[2,+\infty[$

2) a- Montrons que la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante

Soit n un élément de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$

on a : $S_{n+1} - S_n = \left(\sum_{k=2}^{n+1} \frac{\ln(k)}{k^2}\right) - \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k^2}\right) = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}$

et puisque $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$; $\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} > 0$ alors: $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$. $S_{n+1} - S_n > 0$

donc la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

b- Soit $n \in (\mathbb{N}^* - \{1\})$, montrons que : $\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} < \int_n^{n+1} f(t)\,dt$

on a :

$n < t < (n+1) \Rightarrow f(t) > f(n+1)$ (car f est décroissante sur $[2; +\infty[$)

$$\Rightarrow \int_n^{n+1} f(t)\,dt \geq \int_n^{n+1} f(n+1)\,dt$$

$$\Rightarrow \int_n^{n+1} f(t)\,dt > f(n+1)[t]_n^{n+1}$$

$$\Rightarrow \int_n^{n+1} f(t)\,dt \geq f(n+1)$$

et puisque : $f(n+1) = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}$ alors : $\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt$

• Déduisons que : $S_n \leq \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$, on a : $\frac{\ln(3)}{3^2} \leq \int_2^3 f(t)\,dt$ (d'après la question précédente)

$$\frac{\ln(4)}{4^2} \leq \int_3^4 f(t)\,dt$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{\ln(n)}{n^2} \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt$$

En additionnant de ces inégalités membre à membre, et en utilisant de la linéarité de l'intégrale on obtient :

$\frac{\ln(3)}{3^2} + \frac{\ln(4)}{4^2} + \cdots + \frac{\ln(n)}{n^2} \leq \int_2^n f(t)\,dt$ c'est-à dire : $S_n \leq \int_2^n f(t)\,dt + \frac{\ln 2}{2^2}$

et puisque $\int_2^n f(t)\,dt \leq \frac{1+\ln 2}{2}$ (d'apres 1)b) alors) $S_n \leq \frac{\ln(2)}{2^2} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}$

c- Montrons que la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ est convergente

on a : $(S_n)_{n\geq 2}$ est croissante et majorée par le nombre $\frac{\ln(2)}{2^2} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}$

donc elle est convergente

Exercice 49

1- Déterminons D :

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a : $\sqrt{1+x^2} > |x|$ et puisque : $-x < |x|$; alors : $x < \sqrt{1+x^2}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\sqrt{1+x^2}+x > 0$, par conséquent : $D = \mathbb{R}$

• Etudions la partie de f :

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $-x \in \mathbb{R}$

et on a : $f(-x)+f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$

$= \ln\left(\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\right)$

$= \ln(1) = 0$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f(-x) = -f(x)$, d'où f est impaire.

2- • Calculons $\lim\limits_{+\infty} f(x)$

On a : $\lim\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \ln X = +\infty$; donc : $\lim f(x) = +\infty$

• Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

Soit x un réel de $]0; +\infty[$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln\left(x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right)}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x}$$

on a : $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} \ln\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right) = \ln 2$ (car la fonction ln est continue en2), donc: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

d'où la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction l'axe (ox)

3- • Étudions les variations de f.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car c'est la composée de deux fonctions dérivables)

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	|		$+$		
f	| $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Puisque f est impaire alors : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

4- a) Étudions la concavité de la courbe (C) :

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f''(x) = \frac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

Le tableau suivant nous donne le signe de $f''(x)$ est la concavité de la courbe (C).

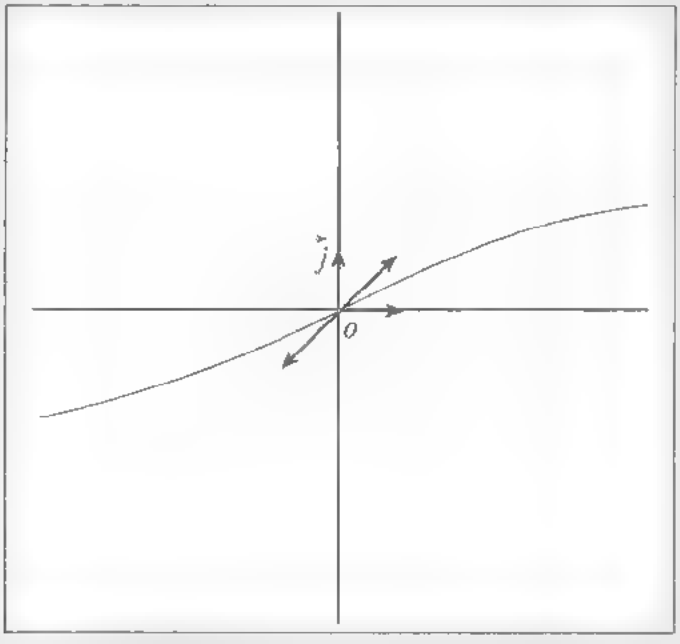
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
concavité de (C)		∪		∩	

Le point $O(0,0)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C).

b) Équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0:

On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$; d'où $(T) : y = x$ est la tangente à (C) au point O

c) Courbe (C)



5 - Calculons l'aire

Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie limitée par (C) et les droites d'équations . $x = 1$, $x = -1$ et $y = 0$.

On a : $\mathcal{A} = \left(2\int_0^1 f(x)dx\right).ua$

On pose : $I = \int_0^1 f(x)dx$; on pose $v(x) = f(x)$ et $u'(x) = 1$; on a : $u(x) = x$

et $v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $[0;1]$ et u' et v' sont continues sur l'intervalle $[0;1]$; d'après la propriété de l'intégration par parties :

$I = [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = [xf(x)]_0^1 - [\sqrt{x^2+1}]_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2}$

Donc : $\mathcal{A} = 2(\ln(1+\sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2})u.a$

II)1- • Montrons que la suite (I_n) est convergente et déterminons sa limite

-On a : $(\forall n \in IN) ; (\forall x \in [0;1]) ; \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$; d'où : $(\forall n \in IN) \ ; \ I_n \geq 0$

et soit $n \in \mathbb{N}$: on a : $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}dx$

Et puisque : $(\forall x \in [0;1]) \ ; \ \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}} \leq 0$; alors : $I_{n+1} - I_n \leq 0$

ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; I_{n+1} \leq I_n$

Par suite ; la suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 ; donc elle est convergente.

• Calculons : $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

Soit $x \in [0;1]$, on a : $0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}x^n \leq \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} \leq x^n$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 x^n dx < I_n < \int_0^1 x^n dx$$

Donc : $(\forall n \in IN) \ \frac{\sqrt{2}}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

Et puisque : $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{2}}{2(n+1)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$; alors d'après les critères de convergence on a: $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

2) Déterminons une relation de récurrence entre I_{n-1} et I_{n+1} pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_{n-1} + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1+x^2}}(x^2+1)dx = \int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1+x^2}\,dx$

On pose . $k_n = \int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1+x^2}\,dx$ calculons k_n en utilisant une intégration par parties.

On pose : $u'(x) = x^{n-1}$ et $v(x) = \sqrt{1+x^2}$; alors : $u(x) = \frac{1}{n}x^n$

et $v'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $[0;1]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[0,1]$; d'après la propriété de l'intégration par parties, on a : $k_n = \left[\frac{1}{n}x^n.\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}dx$

d'où : $I_{n+1} + I_{n-1} = \frac{\sqrt{2}}{n} - \frac{1}{n}I_n$

Donc : $(\forall n \in IN^*)$; $I_{n+1} = \frac{n}{n+1}(\frac{\sqrt{2}}{n} - I_{n-1})$

3- a) Calculons I_0 :

On a : $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 f'(x)dx = \left[f(x)\right]_0^1$; donc : $I_0 = \ln(1+\sqrt{2})$

• Calculons I_1 :

On a : $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1$, donc : $I_1 = \sqrt{2}-1$

• Calculons I_2 :

En utilisant la propr été de récurrence obtenue dans la question précédente et pour $n = 1$

on a : $I_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - I_0) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2}))$

Donc $I_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln(\sqrt{1+\sqrt{2}})$

3- b) Déterminons la valeur de l'intégrale k :

On utilise la méthode de changement de variable :

on a : $k = \int_1^2 \frac{u}{\sqrt{u^2-2u+2}}du = \int_1^2 \frac{u}{\sqrt{1+(u-1)^2}}du$

on pose : $x = u - 1$; d'où : $dx = du$

et pour $u = 1$ on a : $x = 0$ et pour $u = 2$ on a : $x = 1$

Donc : $k = \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = I_1 + I_0$

Ainsi : $k = (\sqrt{2}-1) + \ln(1+\sqrt{2})$

Exercice 50

-1 a- Calculons u_0.

On a : $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = [Arc\tan t]_0^1 = Arc\tan(1) - Arc\tan(0) = \frac{\pi}{4}$

Donc : $u_0 = \frac{\pi}{4}$

b) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{2n} + u_{2n+2} = \frac{1}{1+2n}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$, on a : $u_{2n} + u_{2n+2} = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt + \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$

$$= \int_0^1 \left(\frac{t^{2n}}{1+t^2} + \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\right)dt$$

$$= \int_0^1 \frac{(1+t^2)t^{2n}}{1+t^2}dt = \int_0^1 t^{2n}dt$$

Et puisque $\int_0^1 t^{2n}dt = \left[\frac{1}{2n+1}t^{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$; donc : $u_{2n} + u_{2n+2} = \frac{1}{1+2n}$

Donc : $(\forall n \in IN)$; $u_{2n} + u_{2n+2} = \frac{1}{1+2n}$

c) Calculons u_2 ; u_4 et u_6

• En utilisant l'égalité précédente ; on a :

Pour : $n = 0$; $u_0 + u_2 = 1$ et $u_0 = \frac{\pi}{4}$, donc $u_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$

• Pour $n = 1$, on a : $u_2 + u_4 = \frac{1}{3}$ et on a : $u_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$, donc : $u_4 = -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}$

• Pour $n = 2$ on a : $u_4 + u_6 = \frac{1}{5}$

et on a : $u_4 = -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}$, donc : $u_6 = \frac{13}{15} - \frac{\pi}{4}$

2) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 \le u_{2n} \le \frac{1}{1+2n}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$, on a : $u_{2n} = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt$

et on a : $(\forall t \in [0;1])$; $\frac{t^{2n}}{1+t^2} \ge 0$

donc : $\int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt \ge 0$; c'est-à-dire : $u_{2n} \ge 0$.

on a : $0 \leq t \leq 1 \quad \Rightarrow 1 \leq 1 + t^2 \leq 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+t^2} \leq 1$$

d'où : $(\forall t \in [0,1])$; $\frac{t^{2n}}{1+t^2} \leq t^{2n}$

par suite : $\int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt < \int_0^1 t^{2n}dt$ c'est-à-dire : $u_{2n} \leq \frac{1}{1+2n}$ car $\int_0^1 t^{2n}dt = \frac{1}{1+2n}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 \leq u_{2n} \leq \frac{1}{1+2n}$

Méthode 2:

On a : $u_{2n} + u_{2n+2} = \frac{1}{1+2n}$ donc $\frac{1}{1+2n} - u_{2n} = u_{2n+2}$

et puisque $u_{2n+2} \geqslant 0$ alors $u_{2n} \leqslant \frac{1}{1+2n}$

* Déduction de la limite : on a : $\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 \leq u_{2n} \leq \frac{1}{1+2n} \\ \lim \frac{1}{1+2n} = 0 \end{cases}$

Donc d'après les critères de convergence on a : $\lim_{n \to +\infty} u_{2n} = 0$

3- a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_n = u_0 + (-1)^{n-1}.u_{2n}$

On utilise le raisonnement par récurrence :

• Pour $n = 1$, on a : $v_1 = \frac{(-1)^2}{2-1} = 1$, et $u_0 + (-1)^0 u_2 = u_0 + u_2 = 1$

Donc : $v_1 = u_0 + (-1)^0.u_2$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que : $v_n = u_0 + (-1)^{n-1}.u_{2n}$;

et on montre que : $v_{n+1} = u_0 + (-1)^n.u_{2n+2}$

on a : $v_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\right) + \frac{(-1)^{n+2}}{2(n+1)-1}$

$= v_n + \frac{(-1)^n}{2n+1}$

et d'après l'hypothèse de récurrence : $v_{n+1} = u_0 + (-1)^{n-1}u_{2n} + \frac{(-1)^n}{2n+1}$

on a : $u_{2n} = \frac{1}{1+2n} - u_{2n+2}$, (d'après la question 1) b)

Donc : $v_{n+1} = u_0 + (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{1+2n} - u_{2n}\right) + \frac{(-1)^n}{1+2n}$

$= u_0 + (-1)^n u_{2n+2} + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n+1} + (-1)^n \frac{1}{2n+1}$

$= u_0 + (-1)^n u_{2n+2} + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n+1} - (-1)^{n-1}\frac{1}{2n+1}$

$= u_0 + (-1)^n u_{2n+2}$

• Conclusion : d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = u_0 + (-1)^n u_{2n}$

b) Déduction de $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

On a : $v_n - u_0 = (-1)^{n-1}.u_{2n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

donc: $|v_n - u_0| = |(-1)^{n-1}.u_{2n}| = u_{2n}$

d'où : $(\forall n \in IN^*)$; $|v_n - u_0| \leq \frac{1}{1+2n}$

et puisque : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{1+2n} = 0$, alors d'après les critères de convergence

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = u_0$

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$

Exercice

1)Montrons que la fonction F est définie sur D.

On considère la fonction f définie sur : $\left]0;\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par : $f(t) = \frac{\ln t}{2t-1}$

la fonction f est continue en tout point de $\left]0,\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.

• Soit x un élément de $\left]0;\frac{1}{8}\right[$, on a : $[x;4x] \subset \left]0;\frac{1}{2}\right[$

Donc f est continue sur $[x;4x]$, d'où $F(x)$ existe.

Par suite : $\left(\left(\forall x \in \left]0;\frac{1}{8}\right[\right); F(x) \in IR\right)$.

• Soit x un élément de $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, on a : $[x;4x] \subset \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

ainsi f est continue sur l'intervalle $[x;4x]$, donc $F(x)$ existe.

Par suite : $\left(\left(\forall x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[\right); F(x) \in IR\right)$

Par conséquent : $D = \left]0;\frac{1}{8}\right[\cup \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

2) •Montrons que F est dérivable en tout point de D.

Soit G une fonction pr mitive de f sur les intervalles $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$

On a : $(\forall x \in D); F(x) = [G(t)]_x^{4x} = G(4x) - G(x)$

et puisque G est primitive de f sur les deux intervalles $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $\left]0,\frac{1}{8}\right[$

alors G est dérivable sur les deux intervalles $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $\left]0;\frac{1}{8}\right[$; et on a :

$(\forall x \in D), G'(x) - f(x)$

Soit la fonction $u: x \mapsto 4x$ on a : $F = Gou - G$

- La fonction u est dérivable sur $\left]0;\frac{1}{8}\right[$ et $u\left(\left]0;\frac{1}{8}\right[\right) - \left]0;\frac{1}{2}\right[$ et la fonction G est dérivable sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ d'où $G\,0u$ est dérivable sur $\left]0,\frac{1}{8}\right[$.

-La fonction u est dérivable sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ et $u\left(\left]\frac{1}{2},+\infty\right[\right) \subset \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

et la fonction G est dérivable sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ d'où Gou est dérivable sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

• On en déduit que, d'après ce qui précède : la fonction F est dérivable en tout point de D.

• Calcul de $F'(x)$, on a :

$(\forall x \in D), F'(x) - G'(u(x)) \times u'(x) - G'(x) - f(u(x)) \times 4 - f(x)$

d'où : $(\forall x \in D); F'(x) = \frac{-\ln(x)}{2x - 1} + 4\frac{\ln(4x)}{8x - 1}$

3) a-Montrons que : $(\exists c \in [x;4x]); F(x) = \frac{3x\ln c}{2c-1}$

Soit x un élément de $]1,+\infty[$; la fonction f est continue sur $[x;4x]$

Donc d'après le théorème de la valeur moyenne, on a:

$$(\exists c \in [x;4x]); \frac{1}{4x-x}\int_x^{4x} f(t)dt = f(c)$$

c'est-à-dire : $(\exists c \in [x;4x]); F(x) = 3xf(c) = \frac{3x\ln(c)}{2c-1}$

b- Montrons que : $\lim\limits_{+\infty} F(x) = +\infty$:

Soit x un élément de l'intervalle $[1;+\infty[$

On a : $(\exists c \in [x;4x]); F(x) = \frac{3x\ln c}{2c-1}$

et puisque la fonction $\ln$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$

alors : $1 \leq x \leq c \leq 4x \Rightarrow 0 \leq \ln x \leq \ln c \leq \ln(4x)$

et $1 \leq x \leq c \leq 4x \Leftrightarrow 1 \leq 2x-1 \leq 2c-1 \leq 8x-1$

conc : $0 < \frac{1}{8x-1} \leq \frac{1}{2c-1} \leq \frac{1}{2x-1}$, et $x\ln x \leqslant x\ln c$

donc : $\frac{3x\ln x}{8x-1} < \frac{3x\ln x}{2c-1} \leqslant \frac{3x\ln c}{2c-1}$

Par suite : $(\forall x \in [1;+\infty[) ; F(x) \geq \frac{3x\ln x}{8x-1}$

et puisque : $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{8x-1} = \frac{3}{8}$, alors : $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x\ln x}{8x-1} = +\infty$,

donc : $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

4) Soit x un élément de $\left]0, \frac{1}{16}\right[$; montrons que : $F(x) \leq \int_x^{4x} -2\ln(t)\,dt$

On a : $|F(x)| = \left|\int_x^{4x} \frac{\ln t}{2t-1} dt\right| \leq \int_x^{4x} \left|\frac{\ln t}{2t-1}\right| dt$

et comme : $[x;4x] \subset \left]0;\frac{1}{4}\right[$; alors : $(\forall t \in [x;4x]) ; \ln t < 0$

et on a : $x < t \leq 4x \Leftrightarrow 2x-1 < 2t-1 \leq 8x-1$

de plus : $(\forall t \in [x;4x])\ 2t-1 < 0$ ainsi : $(\forall t \in [x;4x]) ; \left|\frac{\ln t}{2t-1}\right| = \frac{-\ln t}{1-2t}$

et puisque : $x \leq t \leq 4x \Leftrightarrow 1-8x \leq 1-2t \leq 1-2x$

d'où : $0 < \frac{1}{1-2x} \leq \frac{1}{1-2t} \leq \frac{1}{1-8x}$

et puisque : $1-8x \geq \frac{1}{2}$, alors : $\frac{1}{1-8x} \leq 2$

alors : $(\forall t \in [x,4x])\ \frac{-\ln t}{1-2t} < -2\ln t$ Donc : $|F(x)| < \int_x^{4x} -2\ln(t)\,dt$

• Déduction :

On a : $\left(\forall x \in \left]0, \frac{1}{16}\right[\right) ; |F(x)| \leq -2\int_x^{4x} \ln(t)\,dt$

et puisque : $\int_x^{4x} \ln(t)\,dt = [t\ln t - t]_x^{4x}$

$= 4x\ln(4x) - x\ln x - 3x$

$\left(\forall x \in \left]0;\frac{1}{16}\right[\right), |F(x)| \leq 2(x\ln x - 4x\ln 4x - 3x)$

et on a : $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ d'où : $\lim_{x\to 0} 4x\ln 4x = \lim_{x\to 0} t\ln t = 0$ (en posant $t = 4x$)

on a alors : $\lim_{x\to 0} 2(x\ln x - 4x\ln 4x - 3x) = 0$. Donc : $\lim_{x\to 0^+} F(x) = 0$

1) a- Montrons que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

On a : F est la fonction primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 ;

d'où F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$

et puisque . $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f'(x) = f(x) + 2\int_0^x f(t)dt = f(x) + 2F(x) = (f + 2F)(x)$

alors : $f' = f + 2F$ et puisque $(f + 2F)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, car F et f sont dérivables sur $\mathbb{R}$,

alors la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

b-Montrons que f est solution de l'équation différentielle.

On a : $f' = f + 2F$; d'où $f'' = (f + 2F)' = f' + 2F' = f' + 2f$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f''(x) - f'(x) - 2f(x) = 0$

c'est-à-dire f est solution de l'équation différentielle : $y'' - y' - 2y = 0$

2) a- Résolvons l'équation differentielle (E) :

L'équation caractéristique de l'équation $y'' - y' - 2y = 0$ est : $r^2 - r - 2 = 0$,

ses deux racines sont -1 et 2.

Donc : la solution générale de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $x \mapsto \alpha e^{2x} + \beta e^{-x}$, avec : $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$.

b- Déduction : La fonction f est solution de l'équation différentielle (E),

d'où : $(\exists(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2);(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{-x}$

on a : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = 2\alpha e^{2x} - \beta e^{-x}$

$$f(0) = f'(0) = 1 \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha - \beta = 1 \end{cases}$$

donc : $\iff \alpha = \frac{2}{3}$ et $\beta = \frac{1}{3}$

donc : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) = \frac{2}{3}e^{2x} + \frac{1}{3}e^{-x} = \frac{1}{3}(2e^{2x} + e^{-x})$

3) a Montrons que f est strictement croissante sur $]0;1]$.

on a : f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = \frac{1}{3}(4e^{2x} - e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{3}.(4e^{3x} - 1)$

Puisque : $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 3x \geq 0$

$\Rightarrow e^{3x} \geq 1$

$\Rightarrow 4e^{3x} - 1 \geq 3 > 0$

alors $(\forall x \in [0;1]) ; f'(x) > 0$; donc f est croissante sur $[0;1]$

b) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq f(1) \int_0^1 \frac{dt}{1+nt}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$;

on a : $1 + nt > 0$ et $(\forall t \in [0;1]) ; f(t) > 0$

donc : $(\forall t \in [0,1]) ; \frac{f(t)}{1+nt} > 0$ d'où : $\int_0^1 \frac{f(t)}{1+nt} \geq 0$; c'est-à-dire : $u_n \geq 0$ (1)

• On a : la fonction f est strictement croissante sur $[0,1]$ donc :

$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow f(0) \leq f(t) \leq f(1)$

Donc : $(\forall t \in [0;1]) ; \frac{f(t)}{1+nt} \leq \frac{f(1)}{1+nt}$

Par suite : $\int_0^1 \frac{f(t)}{1+nt} dt \leq \int_0^1 \frac{f(1)}{1+nt} dt$

c'est-à-dire : $u_n \leq f(1) \int_0^1 \frac{dt}{1+nt}$ (2)

d'après (1) et (2) on en déduit que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 \leq u_n \leq f(1) \int_0^1 \frac{dt}{1+nt}$

c- Déduction :

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$; on a :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+nt} = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{n}{1+nt} dt = \frac{1}{n} \left[\ln |1+nt| \right]_0^1 = \frac{1}{n} (\ln(1+n) - \ln(1)) = \frac{\ln(1+n)}{n}$$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 \leq u_n \leq f(1) . \frac{\ln(1+n)}{n}$

et on a : $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(1+n)}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n} = 0$

(car : $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$)

d'où : $\lim_{n \to +\infty} f(1) . \frac{\ln(1+n)}{n} = 0$

Donc : $\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 \leq u_n \leq f(1) . \frac{\ln(1+n)}{n} \\ \lim_{n \to +\infty} f(1) . \frac{\ln(1+n)}{n} \quad 0 \end{cases}$

et d'après les critères de convergence, on conclut que : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

1) a- Calculons $I_1(a)$ en fonction de a :

On a : $I_1(a) = \int_0^a f_1(t)\,dt = \int_0^a te^{-t}\,dt$

En utilise une intégration par parties:

on pose : $v'(t) = e^{-t}$ et $u(t) = t$, on a : $v(t) = -e^{-t}$ et $u'(t) = 1$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0;a]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[0;a]$, d'après la formule de l'intégration par parties on a :

$$I_1(a) = [u(t)v(t)]_0^a - \int_0^a u'(t)v(t)\,dt = [-te^{-t}]_0^a + \int_0^a e^{-t}\,dt$$
$$= -ae^{-a} + [-e^{-t}]_0^a = -ae^{-a} - e^{-a} + 1$$

Donc : $I_1(a) = -ae^{-a} - e^{-a} + 1$

b-Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*);(\forall t \in \mathbb{R}^+); 0 \le f_n(t) \le \frac{t^n}{n!}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et t un élément de $\mathbb{R}^+$, on a :

$t^n \ge 0$ et $e^{-t} > 0$ et $n! > 0$, d'où : $\frac{t^n.e^{-t}}{n!} \ge 0$, c'est-à-dire : $f_n(t) \ge 0$ (1)

et on a : $t \ge 0$, d'où : $-t \le 0$; ainsi : $e^{-t} \le 1$

Donc : $\frac{t^n.e^{-t}}{n!} \le \frac{t^n}{n!}$ c'est-à-dire : $f_n(t) \le \frac{t^n}{n!}$ (2)

d'après (1) et (2) on a : $0 \le f_n(t) \le \frac{t^n}{n!}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*);(\forall t \in \mathbb{R}^+); 0 \le f_n(t) \le \frac{t^n}{n!}$

c- Déduction :

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et a un nombre de $]0, +\infty[$

on a : $(\forall t \in [0;a]); 0 \le f_n(t) \le \frac{t^n}{n!}$ d'où : $0 \le \int_0^a f_n(t)\,dt \le \int_0^a \frac{t^n}{n!}\,dt$

c'est-à-dire : $0 \le I_n(a) \le \frac{1}{n!}\int_0^a t^n\,dt$ et comme : $\int_0^a t^n\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^a = \frac{a^{n+1}}{n+1}$

d'où : $0 \le I_n(a) \le \frac{1}{n!}.\frac{a^{n+1}}{n+1}$

c'est-à-dire : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \le I_n(a) \le \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*);(\forall a \in \mathbb{R}^+); 0 \le I_n(a) \le \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$

2) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$; montrons que f_n est strictement décroissante

sur $[n; +\infty[$.

la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+); f'_n(x) = \frac{1}{n!}(nx^{n-1}.e^{-x} - x^n e^{-x})$$
$$= \frac{x^{n-1}.e^{-x}}{n!}.(n-x)$$

Ainsi : le signe de $f'_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$ est le signe de $n-x$

Donc : $f'_n(x) \leq 0 \iff x \in [n; +\infty[$

d'où la fonction f_n est strictement décroissante sur l'interva le $[n; +\infty[$

3) a- Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{1}{n!} < \left(\frac{e}{n}\right)^n$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$,

on a : $\frac{1}{n!} < \left(\frac{e}{n}\right)^n \iff \frac{1}{n!} < \frac{e^n}{n^n}$

$\iff \frac{n^n e^{-n}}{n!} < 1$

$\iff f_n(n) < 1$

Ainsi ; il suffit de montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), f_n(n) < 1$ en utilisant le raisonnement par récurrence

• Pour $n = 1$; on a : $f_1(1) = \frac{1}{e}$ et $\frac{1}{e} < 1$; d'où $f_1(1) < 1$

ainsi la propriété est vrai pour $n = 1$.

• Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$,on suppose : $f_n(n) < 1$ et, on montre que : $f_{n+1}(n+1) < 1$

la fonction f_n est strictement décroissante sur l'intervalle $[n; +\infty[$, d'où

$n < n+1 \Rightarrow f_n(n+1) < f_n(n)$ et on a: $f_n(n) < 1$

et d'après l'hypothèse de récurrence donc $f_n(n+1) < 1$

et on a : $f_{n+1}(n+1) = \frac{(n+1)^{n+1}.e^{-(n+1)}}{(n+1)!}$

$= \frac{(n+1)(n+1)^n e^{-n}e^{-1}}{(n+1)n!} = \frac{(n+1)^n.e^{-n}e^{-1}}{n!} = f_n(n+1)$

Donc . $f_n(n+1) < 1$, d'après le principe de récurrence: $(\forall n \in \mathbb{N}^*), f_n(n) < 1$

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{1}{n!} < \left(\frac{e}{n}\right)^n$

b- Déduction :

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$, on a :

$0 < I_n(a) < \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$ (d'après la question 1) c)

Et puisque : $\frac{1}{(n+1)!} < \left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1}$; (d'après la question précédente)

Donc : $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} < a^{n+1}.\left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1}$ c'est-à-dire : $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} < \left(\frac{ae}{n+1}\right)^{n+1}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 \leq I_n(a) \leq \left(\frac{ae}{n+1}\right)^{n+1}$

•Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{ae}{n+1}\right)^{n+1}$:

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$,on a : $\left(\frac{ae}{n+1}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln\left(\frac{ae}{n+1}\right)}$

$= e^{(n+1)(\ln(ae) - \ln(n+1))}$

Et puisque : $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$

alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1).(\ln(ae) - \ln(n+1)) = -\infty$

d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{(n+1)(\ln(ae) - \ln(n+1))} = 0$ ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{ae}{n+1}\right)^{n+1} = 0$

D'après un critère de convergence on conclut que : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n(a) = 0$.

Exercice 3

1) a- Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R}); e^x > x$

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $(\forall x \in \mathbb{R}); u(x) = e^x - x$

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$; et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}); u'(x) = e^x - 1$

• Tableau de variations de u est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
u	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

- La fonction u est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$

d'où : $(\forall x \in]-\infty; 0]), u(x) > u(0)$,ainsi : $(\forall x \in]-\infty, 0]), u(x) > 1$

donc : $(\forall x \in]-\infty; 0]) ; u(x) > 0$

La fonction u est strictement croissant sur $[0; +\infty[$

donc : $(\forall x \in [0; +\infty[) ; u(x) \geq u(0)$, d'où : $(\forall x \in [0; +\infty[) ; u(x) \geq 1$

donc : $(\forall x \in [0; +\infty[) ; u(x) > 0$

Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; u(x) > 0$; donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x > x$

b- Déterminons D l'ensemble de définition de f : Soit $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$x \in D \Leftrightarrow e^x - x \neq 0 \quad (\text{car } (\forall x \in \mathbb{R}), e^x > x)$$
$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Donc: $D = \mathbb{R}$

c- • Calculons les limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

Calcul de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Soit x un élément de $\mathbb{R}^*$, on a : $f(x) = \frac{x}{e^x - x} = \frac{x}{x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)} = \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1}$

Et puisque : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

• Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$

$$= \frac{x - e^x + e^x}{e^x \quad x}$$

$$= -1 + \frac{e^x}{e^x - x}$$

Et puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x) = +\infty$; alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$

2) a- Dressons le tableau de variations de f

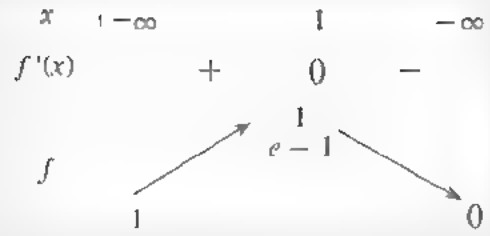
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a :

$$(\forall x \in IR) ; f'(x) = \frac{e^x - x - xe^x + x}{(e^x - x)^2}$$

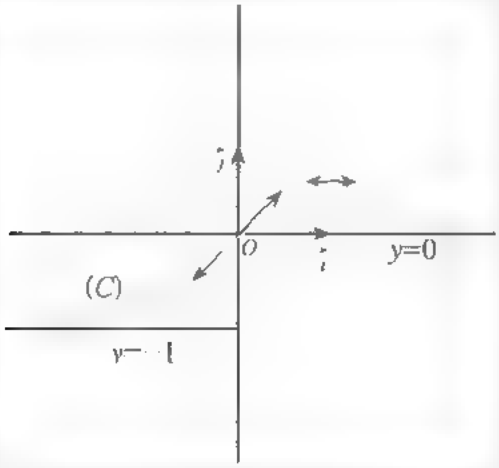
$$= \frac{(1 - x)e^x}{(e^x - x)^2}$$

• Le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$;

• Le tableau de variations de f est le suivant :



b- Le tracé de (C) ; on a : $\left(\frac{1}{e-1} \simeq 0,6\right)$



3) a- Déterminons le sens de variations de F

La fonction : $t \mapsto e^t f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$; donc la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}); F'(x) = e^x f(x)$

Ainsi le signe de $F'(x)$ dépend de celui de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

D'après ce qui précède ; on a : $(\forall x \in [0; +\infty[), F'(x) \geq 0$ et

$(\forall x \in]-\infty; 0]); F'(x) \leq 0$

Donc F est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.

b-Vérifions que $(\forall t \in \mathbb{R}^*); \frac{t}{e^t - t} \geq \frac{t}{e^t}$

on a : $0 < e^t - t < e^t \Rightarrow \frac{1}{e^t} < \frac{1}{e^t - t}$

$\Rightarrow \frac{t}{e^t} \leq \frac{t}{e^t - t}$

c- • Déduction :

soit x un élément de $\mathbb{R}^+$ et t un élément de $[0;x]$,

et on a : $\frac{t}{e^t} < e^t \frac{t}{t} \Rightarrow t \leq \frac{te^t}{e^t - t}$

ainsi : $(\forall t \in [0;x]) ; t \leq e^t f(t)$; donc : $\int_0^x t dt \leq \int_0^x e^t f(t)\, dt$

c'est-à-dire : $\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x \leq F(x)$

D'où: $(\forall x \in \mathbb{R}^+); F(x) > \frac{x^2}{2}$

• On a : $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$ et $F(x) \geq \frac{x^2}{2}$, donc $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

Exercice 55

Partie A·

1) Montrons que F est dérivable sur l'intervalle I .

On a f est continue sur le segment [a,b] ; donc f admet une fonction primitive F sur I .

Soit φ a fonction primitive de la fonction f sur $[a;b]$ et qui s'annule en a .

On a : $(\forall x \in [a;b]) ; \varphi(x) = \int_a^x f(t)\, dt$

Soit x un élément de I , on a :

$F(x) = \int_a^{\alpha(x)} f(t)\, dt = \varphi(\alpha(x)) = (\varphi o \alpha)(x)$

On a : • α est continue et dérivable sur I .

• $\alpha(I) \subset [a;b]$.

• φ est dérivable sur $[a\, b]$

d'où : F $\varphi o \alpha$ est dérivable sur I , et on a pour tout x de I :

$F'(x) = \alpha'(x).\varphi'(\alpha(x)) = \alpha'(x) f(\alpha(x))$

donc : $(\forall x \in I) ; F'(x) = \alpha'(x) f(\alpha(x))$

2) Montrons que F est dérivable sur l'intervalle I .

On a f est continue sur l'intervalle I ; donc f admet une fonction primitive f sur $[a;b]$ et qui s'annule en a .

Soit φ a fonction prim tive de f sur $[a;b]$ qui s'annule en a.

On a : $(\forall x \in [a;b]) ; \varphi(x) = \int_a^x f(t)\, dt$

Soit x un élément de I , on a :

$\ldots = \int_{\ldots}^{\beta(x)} f(t)\, dt = \int_a^{\beta(x)} f(t)\, dt - \int_a^{\alpha(x)} f(t)\, dt = \varphi(\beta(x)) - \varphi(\alpha(x))$

Donc : $(\forall x \in I); F(x) = (\varphi o \beta)(x) - (\varphi o \alpha)(x)$

On a : • β est dérivable sur I . • $\beta(I) \subset [a;b]$. • φ est dérivable sur $[a;b]$.

Donc : la fonction $\varphi o \beta$ est dérivable sur I , de même la fonction $\varphi o \alpha$ est dérivable sur l'intervalle I ainsi la fonction F est dérivable sur I , et on a

$(\forall x \in I); F'(x) = \beta'(x)\ \varphi'(\beta(x)) - \alpha'(x)\ \varphi'(\alpha(x))$

$(\forall x \in I); F'(x) = \beta'(x)\ f(\beta(x)) - \alpha'(x)\ f(\alpha(x))$

Partie B :

I- **1)** • Étudions les variations de f .

- Ensemble de définition: Soit x un élément de $\mathbb{R}$; on a car:

$$x \in D \iff x^3 - 1 \neq 0$$
$$\iff (x-1)(x^2 + x + 1) \neq 0$$
$$\iff x \neq 1 \text{ (car } (\forall x \in \mathbb{R}); x^2 + x + 1 \neq 0$$

Donc : $D =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

- Variations de f :

La fonction f est une fonction rationnelle , donc dérivable en tout point de D

On a : $(\forall x \in D); f'(x) = \frac{-3x^2}{(x^3-1)^2}$ d'où : $(\forall x \in D); f'(x) < 0$

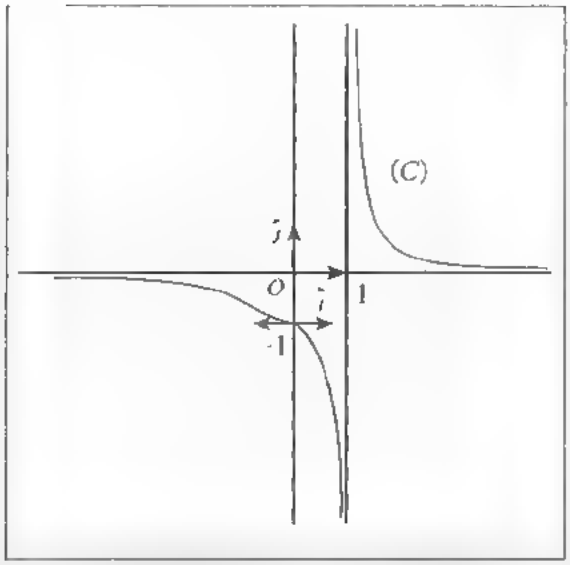
- tableau de variations de f :

On peut vérifier les limites aux bornes de D :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$ || $-$	
f	0 ↘		$+\infty$ || ↘	0
		$-\infty$		

• Le tracé de (C):

La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$ et (C) admet une asymptote horizontale au voisinages de $+\infty$ et $-\infty$ d'équation : $y = 0$.



2) Déterminons D_F :

• 1er cas : $x \in]1; +\infty[$

on a : $x^2 > x > 1$; d'où : $1 \notin [x; x^2]$

et puisque f est continue sur l'intervalle $[x; x^2]$ alors la fonction F est définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

• 2ème cas : $x \in [0; 1[$

On a : $x^2 \leq x < 1$; donc : $1 \notin [x^2; x]$

et puisque f est continue sur l'intervalle $[x^2; x]$ alors la fonction F est définie sur l'intervalle $]0; 1]$.

• 3ème cas : $x \in]-1; 0]$

On a : $x \leq x^2 < 1$, donc : $1 \notin [x; x^2]$

et puisque f est continue sur l'intervalle $[x^2; x]$; alors F est définie sur $]-1; 0]$

• 4ème cas : $x \in]-\infty; -1]$

On a : $x \leq x^2$ et $1 \in [x, x^2]$; donc F n'est pas définie sur $]-\infty; -1]$

Donc : $D_F =]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

3) • Calculons $F'(x)$ pour tout x de $]1; +\infty[$

D'après la première partie ; on a :

$(\forall x \in]1,+\infty[); F(x) = \varphi(x^2) - \varphi(x)$

où φ est une fonction primitive de f sur l'intervalle $]1;+\infty[$

et on a : F est dérivable sur $]1;+\infty[$

et on a : $(\forall x \in]1;+\infty[); F'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = \frac{2x}{x^6-1} - \frac{1}{x^3-1}$

Donc : $(\forall x \in]1;+\infty[); F'(x) = \frac{2x}{x^6-1} \frac{x^3}{1}$

• Étudions les variations de F sur $]1;+\infty[$:

On a : $(\forall x \in]1;+\infty[); x^6 \quad 1 > 0$ ainsi le s.gne de $F'(x)$ est celui de $P(x) = -x^3 + 2x - 1$ sur $]1;+\infty[$

On remarque que 1 est une solution evidente du polynôme $P(x)$;

En effectuant la div sion euclidienne de $P(x)$ par $x-1$;

on obtient : $P(x) = (1-x)(x^2+x-1)$

D'où : $(\forall x \in]1;+\infty[); F'(x) = \frac{(1-x)(x^2+x-1)}{x^6-1}$

Ainsi : $(\forall x \in \ 1;+\infty[\,); F'(x) < 0$; Donc la fonction F est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

4) • Montrons que . $(\forall x \in]1;+\infty[); (x^2 \quad x)f(x^2) < F(x) < (x \quad x)f(x)$

Soit x un élément de $]1;+\infty[$,

D'après le théorème de la valeur moyenne, on a :

$(\exists c \in [x;x^2]); f(c) = \frac{1}{x^2-x}\int_x^{x^2} f(t)dt$

Et puisque F est strictement décroissante sur l' ntervalle $]1;+\infty[$ alors :

$$x < c < x^2 \Rightarrow f(x^2) < f(c) < f(x)$$
$$\Rightarrow f(x^2) \le \frac{1}{x^2-x}F(x) \le f(x) \qquad (\text{car } x^2-x > 0)$$
$$\Rightarrow (x^2-x)f(x^2) \le F(x) \le (x^2-x)f(x)$$

Donc: $(\forall x \in]1;+\infty[); (x^2-x)f(x^2) \le F(x) \le (x^2-x)f(x)$

•Déduisons : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$:

Soit x un élément de $]1;+\infty[$; on a : $(x^2-x)f(x) = \frac{x^2-x}{x^3-1}$

d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty}(x^2-x)f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2-x}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \quad 0$

On montre de même que : $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x)f(x^2) = 0$

D'après la propriété des limites et ordre on a: $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$

II- 1) Déterminons a , b et c : Soit $x \in D_F$ on a :

$$F(x) = a\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}dt + \int_x^{x^2} \frac{bt+c}{t^2+t+1}dt$$

$$= \int_x^{x^2} \left(\frac{a}{t-1} + \frac{bt+c}{t^2+t+1}\right)dt = \int_x^{x^2} \left(\frac{(a+b)t^2 + (a-b+c)t + (a-c)}{t^3-1}\right)dt$$

et on a : $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t^3-1}dt$

Donc ; on doit avoir : $(a+b)t^2 + (a-b+c)t + a - c = 1$

d'où : $(a+b)t^2 + (a-b+c)t + (a-c-1) = 0$

donc : $\begin{cases} a+b=0 \\ a-b+c=0 \\ a-c-1=0 \end{cases}$; par suite : $\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \\ c = -\frac{2}{3} \end{cases}$

Donc : $(\forall x \in D_F)\,; F(x) = \frac{1}{3}\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}dt - \frac{1}{3}\int_x^{x^2} \frac{t+2}{t^2+t+1}dt$

2) a- Étudions les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0; +\infty[$:

La fonction h est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$; et on a :

$\forall t \in [0, +\infty[, h'(t) = -\frac{1}{3}\frac{(t^2+4t+1)}{(t^2+t+1)^2}$ d'où : $(\forall t \in [0; +\infty[, h'(t) > 0$

Le tableau de variations de h est le suivant :

t	0		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	
h	$-\frac{2}{3}$	↗	0

b- D'après le tableau de variations de h ; on a : $h([0; +\infty[) = \left[-\frac{2}{3}; 0\right[$

Donc : $(\forall t \in [0; +\infty[)\,; h(t) < 0$

Ainsi : la fonction h est négative sur $[0; +\infty[$

(on peut déterminer le signe de h en utilisant l'expression de h)

3) • Montrons que : $(\forall x \in [0; +\infty[)\,. (x^2 - x)h(x) \leq \int_x^{x^2} h(t)dt \leq (x^2 - x)h(x^2)$

La fonction h est continue sur l'intervalle $[0; +\infty[$, donc h est continue sur tout intervalle de bornes x et x^2 où : $x \in [0; +\infty[$

On étudie deux cas : $x \geq 1$ et $0 \leq x \leq 1$

1er cas : $0 \leq x \leq 1$ (dans ce cas ; on a : $x^2 \leq x$)

D'après le théorème de la moyenne ; on a :

$(\exists c \in [x^2; x]) / h(c) = \frac{1}{x - x^2} \int_{x^2}^{x} h(t)\,dt$

et puisque h est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ on a alors :

$$x^2 \leq c \leq x \Rightarrow h(x^2) \leq h(c) \leq h(x)$$
$$\Rightarrow h(x^2) \leq \frac{1}{x - x^2} \int_{x^2}^{x} h(t)\,dt \leq h(x)$$
$$\Rightarrow (x - x^2) h(x^2) \leq \int_{x^2}^{x} h(t)\,dt \leq (x - x^2) h(x)$$
$$\Rightarrow (x^2 \quad x) h(x) \leq \int_{x}^{x^2} h(t)\,dt \leq (x^2 - x) h(x^2) \text{ car } x - x^2 \geqslant 0 \quad (1)$$

2ème cas : $x \geq 1$; (dans ce cas on a . $x \leq x^2$)

D'après le théorème de la moyenne : $(\exists c \in [x; x^2]) : h(c) = \frac{1}{x^2 - x} \int_{x}^{x^2} h(t)\,dt$

Et puisque la fonction h est strictement croissante sur $[0; +\infty[$; alors :

$$x \leq c \leq x^2 \Rightarrow h(x) \leq h(c) \leq h(x^2) \qquad \text{car } x^2 - x \geqslant 0 \ (2)$$
$$\Rightarrow (x^2 - x) h(x) \leq \int_{x}^{x^2} h(t)\,dt \leq (x^2 - x) h(x^2)$$

D'après (1) et (2) on en déduit que :

$(\forall x \in [0; +\infty[) ; (x^2 - x) h(x) \leq \int_{x}^{x^2} h(t)\,dt \leq (x^2 - x) h(x^2)$

• Déduisons : $\lim_{x \to 1^+} \int_{x}^{x^2} h(t)\,dt$

On a : $\lim_{x \to 1} (x^2 - x) h(x) = 0$ et $\lim_{x \to 1} (x^2 - x) h(x^2) = 0$

Donc d'après une propriété des limites et l'ordre on a : $\lim_{x \to 1^+} \int_{x}^{x^2} h(t)\,dt = 0$

4) a Calculons : $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x - 1} \int_{x}^{x^2} h(t)\,dt$

Soit x un élément de $]1; +\infty[$, d'après la question 3) on a :

$(x^2 - x) h(x) \leq \int_{x}^{x^2} h(t)\,dt \leq (x^2 - x) h(x^2)$

D'où : $xh(x) \leq \frac{1}{x - 1} \int_{x}^{x^2} h(t)\,dt \leq xh(x^2)$

Et puisque : $\lim\limits_{x \to 1^+} xh(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} xh(x^2) = -\frac{1}{3}$; alors d'après une propriété des limites et ordre on a : $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} \int_x^{x^2} h(t)\,dt = -\frac{1}{3}$

b- Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$:

On a : $(\forall x \in D_F)\,;\, F(x) = \frac{1}{3} \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,dt + \int_x^{x^2} h(t)\,dt$

Soit x un élément de l'intervalle $]1; +\infty[$; on a :

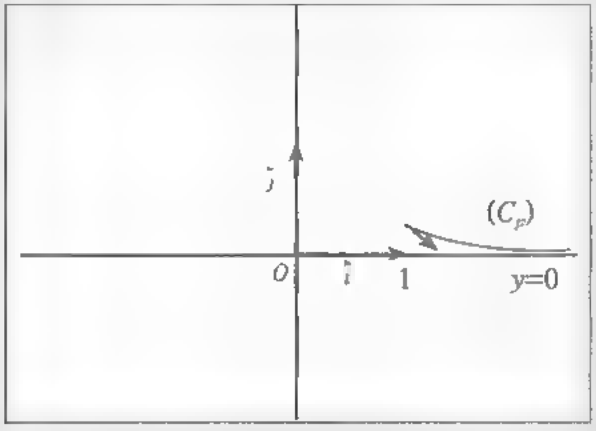
$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,dt = [\ln(t-1)]_x^{x^2}$$

$$= \ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = \ln(x+1)$$

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{3} \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,dt = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{3} \ln(x+1) = \frac{\ln(2)}{3}$

et puisque : $\lim\limits_{x \to 1^+} \int_x^{x^2} h(t)\,dt = 0$ alors : $\lim\limits_{x \to 1^+} F(x) = \frac{\ln(2)}{3}$

5) Le tracé de la courbe (C_F) :



Exercice 5

1) a- • Montrons que : $(\forall x \in]1; +\infty[)\,;\, f(x+1) \leq F(x) \leq f(x)$

La fonction f est continue et dérivable sur l'intervalle $]1; +\infty[$

d'où : $(\forall t \in]1; +\infty[)\,;\, f'(t) = \frac{-1}{t(\ln t)^2} . e^{\frac{1}{\ln t}}$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]1; +\infty[$

Soit x un élément de $]1; +\infty[$; et $t \in]1; +\infty[$

on a : $x \leq t \leq x+1 \Rightarrow f(x+1) \leq f(t) \leq f(x)$

$\Rightarrow \int_x^{x+1} f(x+1)dt \leq \int_x^{x+1} f(t)dt \leq \int_x^{x+1} f(x)dt$

$\Rightarrow f(x+1) \leq F(x) \leq f(x)$

Donc : $(\forall x \in]1;+\infty[) ; f(x+1) \leq F(x) \leq f(x)$

• Déduisons : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$:

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x+1) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

D'après une propriété des limites et ordre on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

b- Montrons que : $(\forall u \in [0;+\infty[) ; e^u \geq u+1$

On considère la fonction φ défin e sur l'intervalle $[0;+\infty[$, par

$\varphi(u) = e^u - u - 1$

La fonction φ est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$

et $(\forall u \in [0;+\infty[) ; \varphi'(u) = e^u - 1$

On a : $(\forall u \in [0;+\infty[) ; \varphi'(u) \geq 0$

Donc la fonction φ est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$

d'où : $u \geq 0 \Rightarrow \varphi(u) \geq \varphi(0)$

$\Rightarrow e^u - u - 1 \geq 0$

ainsi : $(\forall u \in [0;+\infty[) ; e^u \geq u+1$

c - Déduisons que : $(\forall x \in]1;+\infty[) ; F(x) - 1 \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} dt$

Soit t un élément de l'intervalle $]1;+\infty[$,

on pose : $u = \frac{1}{\ln t}$, et utilisant l'inégalité précédente

on a : $e^{\frac{1}{\ln t}} \geq \frac{1}{\ln t} + 1$ (car $\frac{1}{\ln t} \in]0;+\infty[$)

d où : $\int_x^{x+1} e^{\frac{1}{\ln t}} dt \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} dt + \int_x^{x+1} 1 dt$ ainsi : $F(x) \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} dt + 1$

donc : $(\forall x \in]1;+\infty[) ; F(x) - 1 \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} dt$;

d- Montrons que : $(\forall t \in]0;+\infty[) ; \ln t \leq t - 1$

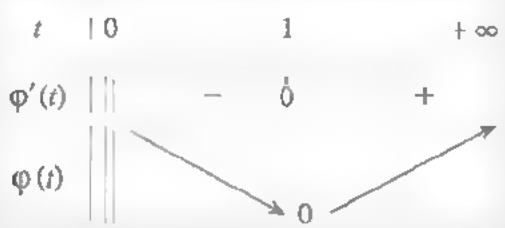
On considère la fonction φ définie sur l'interva le $]0;+\infty[$ par

$\varphi(t) = t - 1 - \ln t$

La fonction φ est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$

et : $(\forall t \in]0; +\infty[) ; \varphi'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$

Le tableau de variations de φ est le suivant :



D'après le tableau de variations de φ , 0 est la valeur minimale de la fonction φ sur l'intervalle $]0; +\infty[$: Donc $(\forall t \in]0; +\infty[) ; \varphi(t) > 0$

Ainsi : $(\forall t \in]0; +\infty[) ; \ln t \leq t - 1$

• Déduisons que : $(\forall t \in]1; +\infty[) ; \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} > \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

Soit x un élément de l'intervalle $]1; +\infty[$ et t un élément de $[x; x+1]$ on a :

$\ln t < t - 1 \rightarrow \frac{1}{\ln t} \geq \frac{1}{t-1}$

$\rightarrow \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} dt \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{t-1} dt$

$\rightarrow \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} dt \geq \ln(x) - \ln(x-1)$

Donc : $(\forall x \in]1; +\infty[) ; \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} dt \geq \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

4- Déduisons $\lim_{x \to +\infty} F(x)$

D'après ce qui précède : $(\forall x \in]1; +\infty[) , F(x) - F(1) > \int_1^x \frac{1}{\ln t} dt > \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

d'où : $(\forall x \in]1; +\infty[) ; F(x) \geq \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 1$

Et puisque : $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 1 = +\infty$

alors d'après une propriété des limites et ordre : $\lim_{+\infty} F(x) = +\infty$

2) Etudions les variations de F :

La fonction f est continue sur l'intervalle $]1; +\infty[$, donc f admet une primitive sur l'intervalle $]1; +\infty[$

Soit G la fonction primitive de f qui s'annule en 2.

ona : $(\forall x \in]1; +\infty[); G(x) = \int_2^x f(t)\,dt$ et $(\forall x \in]1, +\infty[); G'(x) = f(x)$

d'où : $(\forall x \in]1; +\infty[); F(x) = G(x+1) - G(x)$

on a la fonction F est dérivable sur $]1; +\infty[$ et pour tout x de $]1; +\infty[$:

$F'(x) = f(x+1) \quad f(x)$

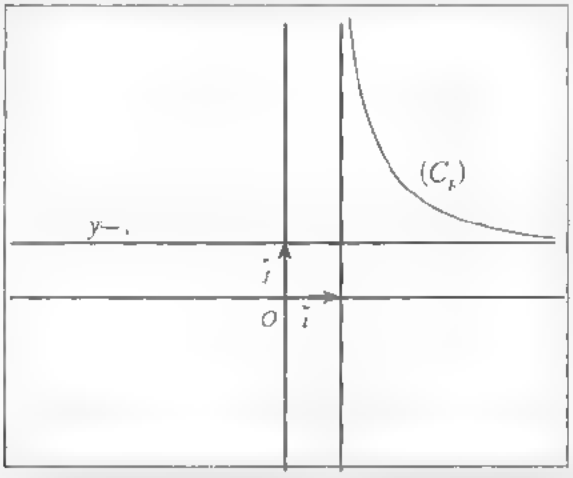
Et puisque f est strictement décroissante sur l'intervalle $]1; +\infty[$et $x < x+1$ alors : $f(x+1) < f(x)$ d'où : $f(x+1) - f(x) < 0$

Donc : $(\forall x \in]1; +\infty[); F'(x) < 0$

• Le tableau de variations de F est le suivant :

x	1		$+\infty$
$F'(x)$	‖	$-$	
F	$+\infty$	↘	1

Courbe de la fonction F



1) a- Montrons que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]\right); G(x) = F(\pi) - F(\pi(1-x))$

On a : $G(x) = \int_0^x \frac{\sin(\pi t)}{1-t}\,dt$

on pose : $u = (1-t)\pi$ c'est-à-dire $\pi t = \pi - u$

on a : $du = -\pi dt$ et $(u = \pi \Leftrightarrow t = 0)$ et $(u = (1-x)\pi \Leftrightarrow t = x)$

Donc : $G(x) = \int_{x}^{1} \frac{\sin(\pi - u)}{\frac{u}{\pi}} \cdot \left(-\frac{du}{\pi}\right) = \int_{\pi(1-x)}^{\pi} \frac{\sin u}{u} du$

$$= \int_{\pi(1-x)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u} du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin u}{u} du$$

$$- \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin u}{u} du - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi(1-x)} \frac{\sin u}{u} du$$

$$= F(\pi) - F(\pi(1-x))$$

b-Déduisons que : $J = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(\pi t)}{1-t} dt$

on a : $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(\pi t)}{1-t} dt = G\left(\frac{1}{2}\right) \quad F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt$

$$- \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = J$$

2) a- Montrons que : $(\forall n \in IN^*), \left(\forall t \in \left[0; \frac{1}{2}\right[\right), J = u_0 + u + \quad + u_{n-1} + R_n$

avec : $R_n = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t} dt$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$= u_0 + u_1 + \ldots u_{n-1} + R_n$$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{2}} \sin(\pi t) dt + \int_{0}^{\frac{1}{2}} t \sin(\pi t) dt + \ldots + \int_{0}^{\frac{1}{2}} t^{n-1} \sin(\pi t) dt + R_n$$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{2}} (1 + t + t^2 + \ldots + t^{n-1}) \sin(\pi t) dt + R_n$$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1 - t^n}{1-t}\right) \sin(\pi t) dt + \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t} dt$$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(\pi t)}{1-t} dt - G\left(\frac{1}{2}\right) = J$$

b- • Montrons que : $(\forall n \in IN^*), \left(\forall t \in \left[0; \frac{1}{2}\right[\right), \frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t} < 2t^n$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et t un élément de l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right[$,

on a : $-\frac{1}{2} \leq -t \leq 0$ et $0 \leq t \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \pi t \leq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 0 \leq \sin(\pi t) \leq 1$ et $\frac{1}{2} \leq 1 - t \leq 1$

$\leq \frac{1}{1-t} \leq 2$ et $0 \leq \sin(\pi t) \leq 1) \Rightarrow 0 \leq \frac{\sin(\pi t)}{1-t} \leq 2$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t} \leq 2t^n$$

• Déterminons un encadrement de R_n :

On a : $0 \le \frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t} \le 2t^n \Rightarrow 0 \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t} dt \le 2\int_0^{\frac{1}{2}} t^n dt$

$$\Rightarrow 0 \le R_n \le 2\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 \le R_n \le \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c-Déduisons $\lim_{n\to+\infty}(u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1})$

on a : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (car : $-1 < \frac{1}{2} < 1$)

ainsi : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$; d'après un critère de convergence : $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$

Et puisque : $J = (u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}) + R_n$

alors : $\lim_{n\to+\infty}(u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}) = J$

3) a- Calculons u_0 et u_1 :

on a : $u_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(\pi t)dt = \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}$

et on a $u_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} t\sin(\pi t)dt$ (En utilise une intégration par parties) :

on pose : $u'(t) = \sin(\pi t)$ et $v(t) = t$ donc : $u(t)$ $\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)$ et $v'(t)$ 1

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ et u' et v' sont continues sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

D'après la propriété de l'intégration par parties ; on a :

$u_1 = \left[-\frac{t}{\pi}\cos(\pi t)\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\cos(\pi t)dt = \frac{1}{\pi^2}\left[\sin(\pi t)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi^2}$

Donc : $u_0 = \frac{1}{\pi}$ et $u_1 = \frac{1}{\pi^2}$

b-Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}); u_n = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{n}{2^n} - n(n-1)u_{n-2}\right)$

On calcule u_n en utilisant deux fois une intégration par parties.

On a : $u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} t^n \sin(\pi t)dt$

on pose : $u'(t) = \sin(\pi t)$ et $v(t) = t^n$

d'où : $u(t) = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)$ et $v'(t) = nt^{n-1}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ et u' et v' sont continues sur

l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, d'après la propriété de l'intégration par parties ; on a :

$u_n = \left[-\frac{1}{\pi}t^n\cos(\pi t)\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{n}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} t^{n-1}.\cos(\pi t)dt = \frac{n}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} t^{n-1}.\cos(\pi t)dt$

On pose : $K_n = \int_0^{\frac{1}{2}} t^{n-1}\cos(\pi t)dt$

On pose : $u'(t) = \cos(\pi t)$ et $v(t) = t^{n-1}$

d'où : $u(t) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi t)$ et $v'(t) = (n-1)t^{n-2}$

les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ et u' et v' sont continues sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, d'après une intégration par parties ; on a :

$K_n = \left[\frac{1}{\pi}t^{n-1}\sin(\pi t)\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{n-1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} t^{n-2}\sin(\pi t)dt$

d'où : $K_n = \frac{1}{\pi}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{n-1}{\pi}u_{n-2}$

par suite : $u_n = \frac{n}{\pi}K_n = \frac{n}{\pi^2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - (n-1)u_{n-2}\right)$

Donc : $(\forall n \in IN^*)$; $u_n = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{n}{2^{n-1}} - n(n-1)u_{n-2}\right)$

4) Déterminons une valeur approchée du nombre J :

On a : $J - (u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}) = R_n$

Donc : $\left|J - (u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1})\right| = |R_n|$ et $|R_n| \leq \frac{1}{(n+1)2^n}$

d'où : $\left|J - (u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1})\right| \leq \frac{1}{(n+1)2^n}$

on a : $\frac{1}{(n+1)2^n} < 10^{-2} \Leftrightarrow 2^n(n+1) > 10^2$

Pour $n = 5$; on a : $2^5 \times 6 > 100$

d'où : $\left|J - (u_0 + u_1 + \ldots + u_4)\right| \leq 10^{-2}$

donc : $\sum_{k=0}^{4} u_k$ est une valeur approchée du nombre J à 10^{-2}.

I-1) a- • Calculons $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$:

on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x-1} = -1$ donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

• Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1$

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x}{x-1} = 0$

ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

b- Étudions la continuité de f en 1.

on a : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 = f(1)$, donc f est continue en 1.

2) a- montrons que : $(\forall t \in]-1; +\infty[)$; $\left| \int_0^t \frac{u^2}{1+u} du \right| \leq t^2 |\ln(1+t)|$

On étudie deux cas: $-1 < t \leq 0$ et $t \geq 0$

1er cas : $-1 < t \leq 0$

Soit u un élément de l'intervalle $[t; 0]$, on a :

$$t \leq u \leq 0 \Rightarrow 0 \leq u^2 \leq t^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{u^2}{1+u} \leq t^2 \cdot \frac{1}{1+u}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_t^0 \frac{u^2}{1+u} du \leq t^2 \int_t^0 \frac{1}{1+u} du$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_t^0 \frac{u^2}{1+u} du \leq t^2 [\ln(1+u)]_t^0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_t^0 \frac{u^2}{1+u} du \leq -t^2 \ln(1+t)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left| \int_0^t \frac{u^2}{1+u} du \right| \leq t^2 |\ln(1+t)| \text{ (car } \ln(1+t) \leq -\ln(1+t))$$

2ème cas : $t \geq 0$

Soit u un élément de l'intervalle $[0; t]$, on a :

$$0 \leq u \leq t \Rightarrow 0 \leq u^2 \leq t^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{u^2}{1+u} \leq t^2 \cdot \frac{1}{1+u}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^t \frac{u^2}{1+u} du \leq t^2 \int_0^t \frac{1}{1+u} du$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^t \frac{u^2}{1+u} du \leq t^2 \ln(1+u)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left| \int_0^t \frac{u^2}{1+u} du \right| \leq t^2 |\ln(1+t)| \quad \text{(car } |\ln(1+t)| = \ln(1+t))$$

b- Montrons que : $\int_0^t \frac{u^2}{1+u} du = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2}$

on a : $\int_0^t \frac{u^2}{1+u}du = \int_0^t \frac{u^2-1+1}{1+u}du = \int_0^t \left(u-1+\frac{1}{1+u}\right)du$

$$= \left[\frac{1}{2}u^2 - u + \ln(1+u)\right]_0^t = \frac{1}{2}t^2 - t + \ln(1+t)$$

Donc : $\int_0^t \frac{u^2}{1+u}du = \ln(1+t) - t + \frac{1}{2}t^2$

c- Deduisons que f est dérivable en 1 et que : $f'(1) = -\frac{1}{2}$

Soit x un élément de $]0;+\infty[- \{1\}$; on a : $\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{\ln x - (x-1)}{(x-1)^2}$

On pose : $t = x - 1$, alors :

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^2}\int_0^t \frac{u^2}{1+u}du - \frac{1}{2}\right)$$

et puisque : $\left|\int_0^t \frac{u^2}{1+u}du\right| \le t^2|\ln(1+t)|$, alors : $\left|\frac{1}{t^2}\int_0^t \frac{u^2}{1+u}du\right| \le \ln(1+t)$

et on a : $\lim_{t\to 0}\ln(1+t) = 0$ d'où: $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\int_0^t \frac{u^2}{1+u}du = 0$

donc : $\lim_{x\to 1}\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^2}\int_0^t \frac{u^2}{1+u}du - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

Ainsi f est dérivable en 1 et $f'(1) = -\frac{1}{2}$

3)Étudions les variations de f :

la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a :

$\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[; f'(x) = \frac{\frac{x-1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}$

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x - 1 - x\ln x$

La fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $(\forall x \in]0,+\infty[) ; g'(x) = -\ln x$

et on a : $\lim_{x\to 0} g(x) = -1$; $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x(1-\ln x) - 1 = -\infty$

d'où le tableau de variations de g est :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
g	‖ -1	↗	0	↘	$-\infty$

d'où : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; g(x) \leq 0$

c'est-à-dire : $(\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[) ; f'(x) \leq 0$ et : $f'(1) = -\frac{1}{2}$

d'où : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) \leq 0$

Le tableau de variations de f est :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	0

II- 1) Montrons que l'ensemble de définition de la fonction G est : $[0; +\infty[$

On a : f est définie et continue sur $]0; +\infty[$; ainsi f admet une fonction primitive sur l'intervalle $]0; +\infty[$, donc G est bien définie sur $]0; +\infty[$.

Puisque $G(0) = 0$ alors G est définie sur $[0; +\infty[$.

2) a- Montrons que : $(\forall x \in]0, +\infty[) ; \frac{2x \ln x}{x+1} < G(x) \leq x \ln x$

On étudie deux cas $x > 1$ et $0 < x < 1$

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$

1er cas : $x > 1$; (dans ce cas on a : $x^2 > x$)

Soit t un élément de $]0; +\infty[$, on a :

$$x \leq t \leq x^2 \Rightarrow f(x^2) \leq f(t) \leq f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{2\ln x}{x^2-1} \leq f(t) \leq \frac{\ln x}{x-1}$$

$$\Rightarrow \int_x^{x^2} \frac{2\ln x}{x^2-1} dt \leq \int_x^{x^2} f(t)\, dt \leq \int_x^{x^2} \frac{\ln x}{x-1} dt$$

$$\Rightarrow \frac{2\ln x}{x^2-1}(x^2-x) \leq G(x) \leq \frac{\ln x}{x-1}.(x^2-x) \text{ (car } x-1>0)$$

$$\Rightarrow \frac{2x\ln x}{x+1} \leq G(x) \leq x\ln x$$

2ème cas : $0 < x < 1$ (dans ce cas on a : $x^2 < x$)

Soit t de $]0; +\infty[$, on a :

$x^2 \leq t \leq x \Rightarrow f(x) \leq f(t) \leq f(x^2)$

$$\Rightarrow \int_{x^2}^{x} f(x)\,dt \leq \int_{x^2}^{x} f(t)\,dt \leq \int_{x^2}^{x} f(x^2)\,dt$$

$$\Rightarrow (x - x^2)f(x) \leq -G(x) \leq (x - x^2)f(x^2)$$

$$\Rightarrow (x^2 - x)f(x^2) \leq G(x) \leq (x^2 - x)f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{2x\ln x}{x+1} \leq G(x) \leq x\ln x \qquad (1)$$

et pour $x = 1$ l'inégalité (1) est vérifiée

Donc : $(\forall x \in]0; +\infty[); \frac{2x\ln x}{x+1} \leq G(x) \leq x\ln x$

b- Étudions la continuité de la fonction G à droite en 0:

On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x\ln x}{x+1} = 0$

D'après les propriétés des limites et ordre ; on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} G(x) = 0 = G(0)$

ainsi la fonction G est continue à droite en 0.

c- Étudions la dérivabilité de G à droite en 0:

On a : $(\forall x \in]0; +\infty[); \frac{G(x)}{x} \leq \ln x$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

D'après les propriétés des limites et ordre ; on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{G(x) - G(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{G(x)}{x} = -\infty$$

Donc la fonction G n'est pas derivable à droite en 0.

d- Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x)$:

On a : $(\forall x \in]0; +\infty[); G(x) \geq \frac{2x\ln x}{x+1}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x\ln x}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{x+1}.\ln x = +\infty$

D'après les propriétés des limites et ordre : $\lim\limits_{+\infty} G(x) = +\infty$

3) a Determinons l'expression de $G(x)$ en fonction de $F(x^2)$ et $F(x)$.

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$; on a :

$$G(x) = \int_{x}^{x^2} f(t)\,dt = \int_{1}^{x^2} f(t)\,dt - \int_{1}^{x} f(t)\,dt = F(x^2) - F(x)$$

Donc : $(\forall x \in]0; +\infty[); G(x) = F(x^2) - F(x)$

b- Étudions les variations de la fonction G :

La fonction f est continue sur $I' =]0; +\infty[$; ainsi f admet une fonction primitive sur I', donc : F est la primitive de la fonction f qui s'annule en 1.

Conclusion : F est dérivable sur I' et on a : $(\forall x \in I) ; F'(x) = f(x)$

La fonction: $u : x \longmapsto x^2$ est dérivable sur I' ; d'où (Fou)est dérivable sur I'

et on a : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; G'(x) = \left(F(x^2) - F(x)\right)'$

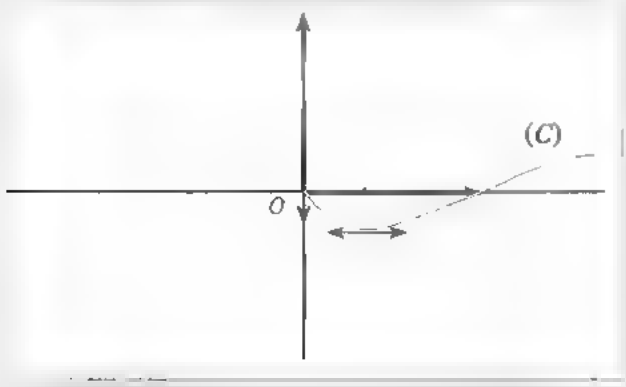
$$= 2xF'(x^2) - F'(x)$$
$$= 2xf(x^2) - f(x)$$
$$= \frac{4x \ln x}{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{x - 1}$$
$$= \frac{\ln x}{x^2 - 1}(4x - x - 1) = \frac{\ln x}{x^2 - 1}(3x - 1)$$

Pour $x = 1$ on a : $G'(1) = 2 \times 1 \ f(1) - f(1) = f(1) = 1$

Le tableau de variations de G est le suivant :

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$G'(x)$	||	$-$	0	$+$	
G	0	↘	$-0,4$	↗	$+\infty$

4) Le tracé de (C)



Partie 1:

1) Montrons que f est strictement croissante sur l' ntervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

la fonction : $u: t \mapsto \frac{1}{\cos t}$ est continue $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, donc f est la fonction

primitive de u sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ qui s'annule en 0 ; donc f est dérivable sur

$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, et on a : $f'(x) = \frac{1}{\cos x}$ pour tout x de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Puisque : $\cos x > 0$ pour tout x de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, alors $f'(x) > 0$

pour tout x de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Par suite la fonction f est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

2) a- Montrons que : $\left(\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right); f(x) = \ln\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)$

Soit x un élément de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on a . $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos t}\,dt$

On pose : $y = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, d'où : $dy = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)dt$

ainsi : $dt = \frac{2}{1+y^2}dy$

et on a : $\begin{cases} t = 0 \\ t = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases}$ et on a : $\cos t = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ donc: $\frac{1}{\cos t} = \frac{1+y^2}{1-y^2}$

Par conséquent: $f(x) = \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{2}{1+y^2} \times \frac{1+y^2}{1-y^2}dy = \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{2}{1-y^2}dy$

et on a : $\frac{2}{1-y^2} = \frac{1+y+1-y}{(1-y)(1+y)} = \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}$

d'où: $f(x) = \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right)dy = \left[\ln|1+y| - \ln|1-y|\right]_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$

$$= \left[\ln\frac{1+y}{1-y}\right]_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} = \ln\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

et on a : $\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$

et on a : $\frac{1+\sin x}{\cos x} \geqslant$ sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

Donc : $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right); f(x) = \ln\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)$

b-Montrons que f est une fonction impaire.

On a : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\; ; -x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

et $f(-x) + f(x) = \ln\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right) + \ln\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)$

$= \ln\left(\frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) = \ln\left(\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\right) = \ln(1) = 0$

c'est-à-dire : $f(-x) = -f(x)$ d'où f est une foncton impaire.

3) Montrons que f est une bijection :

La fonction f est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, car elle est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ (d'après la question 1)), et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, donc f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ vers $J = f\left(\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)$

• Déterminons J :

On a : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-}(1+\sin x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-}(\cos x) = 0^+$

d'où : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right) = +\infty$

et puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$

on pose : $t = -x$; $x \to -\frac{\pi}{2}^+ \iff t \to \frac{\pi}{2}^-$

ainsi ; on a : $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}^-} f(-t) = -\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}^-} f(t) = -\infty$

d'où : $J = \left]\lim\limits_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x); \lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)\right[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

4) Vérifions que : $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right); \varphi(f(x)) = f'(x)$

Soit x un élément de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$; on a :

$$\varphi(f(x)) = \frac{1}{2}\left(e^{f(x)} + e^{-f(x)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(1+\sin x)^2 + \cos^2 x}{(1+\sin x).\cos x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2(1+\sin x)}{(1+\sin x).\cos x}\right)$$

$$= \frac{1}{\cos x} = f'(x)$$

Donc : $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right); \varphi(f(x)) = f'(x)$

Partie 2 :

1) Montrons que g est une fonction impaire .

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$ et $g(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{\varphi(t)} dt$

on pose : $t = -u$, on a : $dt = -du$

$$\begin{cases} t = -x \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = x \\ u = 0 \end{cases}$$

d'où : $g(-x) = \int_0^{x} \frac{1}{\varphi(-u)}(-du)$

$= -\int_0^{x} \frac{1}{\varphi(u)} du = -g(x)$ car $\varphi(-u) = \varphi(u)$ et φ une fonction paire

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}); g(-x) = -g(x)$ ainsi g est impaire .

2) a- Montrons que . $(\forall x \in \mathbb{R}); g(x) = 2Arc\tan(e^x) - \frac{\pi}{2}$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $g(x) = \int_0^{x} \frac{2}{e^t + e^{-t}} dt = 2.\int_0^{x} \frac{e^t}{1+e^{2t}} dt$

on pose : $u = e^t$, on a : $du = e^t dt$

et $\begin{cases} t = 0 \\ t = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 1 \\ u = e^x \end{cases}$

ainsi : $g(x) = 2\int_1^{e^x} \frac{1}{1+u^2} du$

$= 2\left[Arc\tan(u)\right]_1^{e^x} = 2\left(Arc\tan(e^x) - \frac{\pi}{4}\right) = 2Arc\tan(e^x) - \frac{\pi}{2}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}); g(x) = 2Arc\tan(e^x) - \frac{\pi}{2}$

b- • Tableau de variations de g :

• Les limites :

On a : $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} Arc\tan(x) = \frac{\pi}{2}$

donc : $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(2Arc\tan(e^x) - \frac{\pi}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

En posant : $t = -x$, on a : $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{t \to +\infty} g(-t)$

$= -\lim_{t \to +\infty} g(t) = -\frac{\pi}{2}$ (car g est impaire).

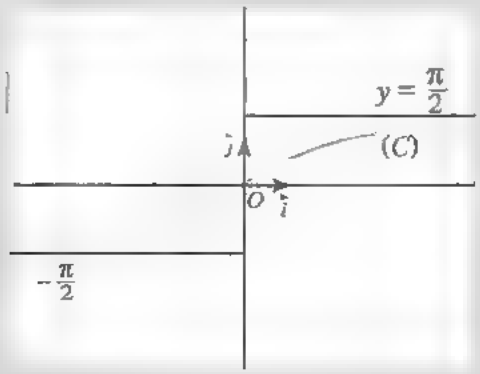
• La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$; on a : $(\forall x \in \mathbb{R}); g'(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$

Et puisque $\varphi(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$; alors $g'(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Le tableau de variations de g est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$	|	$+$	
g	$-\frac{\pi}{2}$	↗	$\frac{\pi}{2}$

*Le tracé :



c- Montrons que g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

La fonction g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; donc g admet une bijection de $\mathbb{R}$ vers $g(\mathbb{R})$, et on a : $g(\mathbb{R}) = \left]\lim_{-\infty} g(x); \lim_{+\infty} g(x)\right[= \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

3) a- Montrons que la fonction gof est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

On a la fonction f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

et on a $f\left(\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right) \subset \mathbb{R}$; et la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$

d'où la fonction gof est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

• Soit x un élément de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$; on a :

$(gof)'(x) = g'(f(x))f'(x) = \frac{1}{\varphi(f(x))}f'(x)$

Et puisque : $\varphi(f(x)) = f'(x)$, alors : $(gof)'(x) = 1$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}); (gof)'(x) = 1$

b- Déduction :

Soit h la fonction numér que de la variable x définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$h(x)=(gof)(x)-x$

On a : La fonction h est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $h'(x)=0$ pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, donc h est une fonction constante.

d'où : $(\exists c\in\mathbb{R});\left(\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right);h(x)=c$

et puisque : $h(0)=0$ alors : $c=0$,

Donc : $\left(\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right);h(x)=0$, c'est-à-dire : $\left(\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right);(gof)(x)=x$

4) Soit x un élément de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et y un élément de $\mathbb{R}$, on a :

$y=\int_0^x\frac{1}{\cos t}dt\iff y=f(x)$

et puisque g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

alors: $y=f(x)\iff g(y)=g(f(x))$

$\iff g(y)=x$ car : $g(f(x))=x$

Donc: $y=\int_0^x\frac{1}{\cos t}dt\iff x=g(y)$

$\iff x=\int_0^y\frac{1}{\varphi(t)}dt$

Exercice 60

Partie 1 :

1) Montrons que : $(\forall x\in[1;+\infty[)\ ;\ x\geq 1+\ln x$

On considère la fonction ψ définie sur $[1,+\infty[$ par: $\psi(x)=x-1-\ln(x)$

La fonction ψ est dérivable sur $[1;+\infty[$ et on a :

$(\forall x\in[1;+\infty[)\ ;\ \Psi'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

et on a : $\psi'(x)\geq 0$ pour tout x de $[1;+\infty[$; ainsi la fonction ψ est croissante sur $[1;+\infty[$, donc : $(\forall x\subset[1;+\infty[)\ ;\ \psi(x)\geq\psi(1)$

et puisque : $\psi(1)=0$ alors : $(\forall x\in[1;+\infty[)\ ;\ x\geq 1+\ln x$

2) a-Variations de la fonction φ

* Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\ln x)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$; alors :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+\ln x)=+\infty$. Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$; donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$

* Déterminons φ'

La fonction $u: x\mapsto 1+\ln(x)$ est dérivable sur $[1;+\infty[$

et $u([1;+\infty[)\subset]0;+\infty[$ et la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$; ainsi

la fonction : $x\mapsto \ln(1+\ln x)$ est dérivable sur $[1;+\infty[$;

Donc la fonction φ est dérivables sur $[1;+\infty[$; comme somme de deux

fonctions dérivable sur $[1;+\infty[$

et on a : $(\forall x\in[1;+\infty[)\ ;\ \varphi'(x)=\frac{\frac{1}{x}}{1+\ln(x)}-\frac{1-\ln(x)}{x^2}=\frac{1}{x(1+\ln(x))}\quad\frac{1-\ln(x)}{x^2}$

$$=\frac{x-(1+\ln x)(1-\ln x)}{x^2(1+\ln x)}=\frac{x-1+\ln^2(x)}{x^2(1+\ln x)}$$

Donc : $\varphi'(x)\geq 0$ pour tout x de $[1;+\infty[$; ainsi la fonction φ est croissante sur $[1;+\infty[$.

Tableau de variations de φ est le suivant :

x	1		$+\infty$
$\varphi'(x)$	0	$+$	
φ	0	↗	$+\infty$

b- Déduction:

La fonction φ est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$; et

on a : $\varphi([1;+\infty[)=\left[\varphi(1);\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\right[=[0;+\infty[$

Donc : $(\forall x\in[1;+\infty[)\ ;\ \varphi(x)\geq 0$

3) Montrons que : $(\forall x\in[0;+\infty[)\ ; x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

On considère la fonction u définie sur $[0;+\infty[$ par :

$u(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$

La fonction u est dérivable sur $[0;+\infty[$

et on a : $(\forall x\in[0;+\infty[)\ ;\ u'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}$

et puisque : $x\geq 0$ alors $0\leq\frac{1}{1+x}\leq 1$

Donc : $(\forall x \in [0; +\infty[) \; ; \; 0 \leq u'(x) \leq x^2$

Soit x un élément de $[0; +\infty[$; on a : $\forall t \in [0.x]) \; ; \; 0 \leq u'(t) \leq t^2$

d'où : $0 \leq \int_0^x u'(t)\,dt \leq \int_0^x t^2 dt$

Et on a : $\int_0^x u'(t)\,dt = [u(t)]_0^x = u(x) - u(0) = u(x)$ et $\int_0^x t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{3}$

donc : $0 \leq u(x) \leq \frac{x^3}{3}$; c'est-à-dire : $0 \leq \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^3}{3}$

Par suite : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Conclusion : $(\forall x \in [0; +\infty[) \; ; \; x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Partie 2 :

1) a- Soit x un élément de $]1; +\infty[$; on a la fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

d'où : $1 + \ln(x) \leq t \leq x \Rightarrow 0 < \ln(1 + \ln(x)) \leq \ln t \leq \ln x$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln x} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{1}{\ln(1 + \ln(x))}$$

Donc : $(\forall t \in [1 + \ln(x); x] \; ; \; \frac{1}{\ln x} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{1}{\ln(1 + \ln(x))}$

d'où : $\int_{1+\ln x}^{x} \frac{1}{\ln(x)}dt \leq \int_{1+\ln x}^{x} \frac{1}{\ln(t)}dt \leq \int_{1+\ln x}^{x} \ln(1 \frac{1}{+ \ln(x))}dt$

c'est-à-dire : $\frac{x - 1 - \ln x}{\ln x} \leq f(x) \leq \frac{x - 1 - \ln x}{\ln(1 + \ln(x))}$

Donc : $(\forall x \in]1; +\infty[) \; ; \; \frac{x - 1 - \ln x}{\ln(x)} \leq f(x) \leq \frac{x - 1 - \ln(x)}{\ln(1 + \ln(x))}$

b- * Continuité de f à droite en 1

Soit x un élément de $]1; +\infty[$; on a : $\frac{x - 1 - \ln x}{\ln x} = \frac{x - 1}{\ln x} - 1$

Et puisque : $\lim_{x \to 1^+} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$; alors : $\lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1}{\ln x} = 1$ et : $\lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1 - \ln x}{\ln x} = 0$

donc : $\frac{x - 1 - \ln x}{\ln(1 + \ln(x))} = \frac{x - 1 - \ln(x)}{\ln(x)} \; \frac{\ln x}{\ln(1 + \ln(x))}$

et on a : $\lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1 - \ln x}{\ln x} = 0$

*Calculons : $\lim_{x \to 1^+} \frac{\ln x}{\ln(1 + \ln x)}$

On pose : $t = \ln x$; donc : $x \to 1^+ \Leftrightarrow t \to 0^+$

d'où : $\lim_{x \to 1^+} \frac{\ln x}{\ln(1 + \ln x)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{t}{\ln(1 + t)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{\frac{\ln(1 + t)}{t}} = 1$

car : $\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1 + t)}{t} = 1$ donc : $\lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1 - \ln x}{\ln x} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1 - \ln x}{\ln(1 + \ln x)} = 0$

D'après les inégalités précédentes et les propriétés des limites et ordre :

on en déduit que : $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0 = f(1)$; c'est-à-dire f est continue à droite en 1.

* Calculons $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

Soi x un élément de $]1; +\infty[$; on a : $\frac{x - 1 - \ln x}{\ln x} = \frac{x}{\ln x} - \frac{1}{\ln x} - 1$

Et puisque : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$; alors : $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$

et on a : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$ (car : $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$) d'où : $\lim_{x \to +\infty} \frac{x - 1 - \ln x}{\ln x} = +\infty$

Donc : $\begin{cases} (\forall x \in]1; +\infty[) \ ; \ f(x) \geq \frac{x - 1 - \ln x}{\ln x} \\ \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x - 1 - \ln x}{\ln x} \right) = +\infty \end{cases}$

Ainsi : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (d'après une propriété des limites et ordre)

* Calculons : $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Soit x un élément de $]1; +\infty[$;

on a : $\frac{x - 1 - \ln x}{x \ln(1 + \ln x)} = \frac{1}{\ln(1 + \ln x)} - \frac{1}{x \ln(1 + \ln x)} - \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{\ln(1 + \ln x)}$

$= \frac{1}{\ln(1 + \ln x)} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) - \frac{1}{x . \ln(1 + \ln x)}$

Et puisque : $\lim_{x \to +\infty} 1 + \ln x = +\infty$ et $\lim_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$

alors : $\lim_{x \to +\infty} \ln(1 + \ln x) = +\infty$; d'où : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln(1 + \ln x)} = 0$

* Et on a : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x . \ln(1 + \ln x)} = 0$;

d'où : $\lim_{x \to +\infty} \frac{x - 1 - \ln x}{x . \ln(1 + \ln x)} = 0$

De plus on a : $\frac{x - 1 - \ln x}{x \ln x} = \left(\frac{x - 1}{x}\right) \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x}$

et puisque : $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$; alors : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$ et on a : $\lim_{x \to +\infty} \frac{x - 1}{x} = 1$

et $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ d'où : $\lim_{x \to +\infty} \frac{x - 1 - \ln x}{x \ln x} = 0$

Donc : $\begin{cases} (\forall x \in]1;+\infty[) \ ; \ \dfrac{x-1-\ln x}{x\ln x} \le \dfrac{f(x)}{x} \le \dfrac{x-1-\ln x}{x.\ln(1+\ln x)} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1-\ln x}{x.\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1-\ln x}{x.\ln(1+\ln x)} = 0 \end{cases}$

On en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

2) a- Dérivabilité de f à droite en 1.

Soit x un élément de l'intervalle $]1;+\infty[$, on a : $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{f(x)}{x-1}$

et puisque : $\dfrac{x-1-\ln x}{\ln x} \le f(x) \le \dfrac{x-1-\ln x}{\ln(1+\ln x)}$

c'est-à-dire : $\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} \le \dfrac{f(x)}{x-1} \le \dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln(1+\ln x)}$

• Calculons : $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\right)$

On pose : $h = x-1$; on a alors : $x \to 1^+ \iff h \to 0^+$

d'où : $\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \dfrac{h-\ln(1+h)}{h\ln(1+h)} = \dfrac{h-\ln(1+h)}{h^2}.\dfrac{h}{\ln(1+h)}$

et on a : $\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$; d'où : $\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{h}{\ln(1+h)} = 1$

et d'après l'inégalité double de la 1ère partie 3) ; on a .

$h - \dfrac{h^2}{2} \le \ln(1+h) \le h - \dfrac{h^2}{2} + \dfrac{h^3}{3}$

d'où : $-\dfrac{h^3}{3} + \dfrac{h^2}{2} - h \le -\ln(1+h) \le \dfrac{h^2}{2} - h$

Donc : $-\dfrac{h}{3} + \dfrac{1}{2} \le \dfrac{h-\ln(1+h)}{h^2} \le \dfrac{1}{2}$

et comme : $\lim\limits_{h\to0^+}\left(-\dfrac{h}{3}+\dfrac{1}{2}\right) = \lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$; alors : $\lim\limits_{h\to0^+}\left(\dfrac{h-\ln(1+h)}{h^2}\right) = \dfrac{1}{2}$

Donc: $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\right) = \dfrac{1}{2}$

• Calculons : $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln(1+\ln x)}\right)$

On a : $\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln(1+\ln x)} = \dfrac{x-1-\ln x}{(x-1).\ln x}.\dfrac{\ln x}{\ln(1+\ln x)}$

D'après ce qui précède : $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\right) = \dfrac{1}{2}$

en posant : $t = \ln x$; on a : $x \to 1^+ \iff t \to 0^+$

d'où : $\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x}{\ln(1+\ln x)}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\ln(1+t)}\right) = 1$ car : $\lim_{t\to 0}\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right) = 1$

Donc : $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln(1+\ln x)}\right) = \frac{1}{2}$

D'après une propriété des limites et l'ordre on a :

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)}{x-1}\right) = \frac{1}{2}$$

Donc f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = \frac{1}{2}$.

b- • Montrons que f est dérivable sur l'intervalle $]1; +\infty[$

la fonction : $\psi : t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $]1; +\infty[$; soit H une fonction primitive ψ sur l'intervalle $]1; +\infty[$

On a : $(\forall x \in]1; +\infty[) : f(x) = [H(t)]_{1+\ln x}^{x} = H(x) - H(1+\ln x)$

Et puisque : la fonction $u : x \mapsto 1 + \ln x$ est dérivable sur $]1; +\infty[$ et $u(]1; +\infty[) \subset]1; +\infty[$ et la fonction H est dérivable sur $]1; +\infty[$; donc la fonction Hou est dérivable sur $]1, +\infty[$; par conséquent $f = H - Hou$ est dérivable sur $]1; +\infty[$.

• Calculons $f'(x)$ pour tout x de $]1; +\infty[$

Soit x un élément de $]1; +\infty[$; on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (H - Hou)'(x) \\ &= H'(x) - H'(u(x)).u'(x) \\ &= \Psi(x) - \psi(u(x)).\frac{1}{x} = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x}.\frac{1}{\ln(1+\ln x)} \\ &= \frac{x\ln(1+\ln x) - \ln x}{x\ln(x).\ln(1+\ln x)} = \frac{\varphi(x)}{\ln(x).\ln(1+\ln x)} \end{aligned}$$

3) • Tableau de variations de f :

Soit x un élément de $]1; +\infty[$; on a : $\ln x > 0$ et $\ln(1+\ln x) > 0$

et $\varphi(x) > 0$; d'où : $f'(x) > 0$ pour tout x de $]1; +\infty[$.

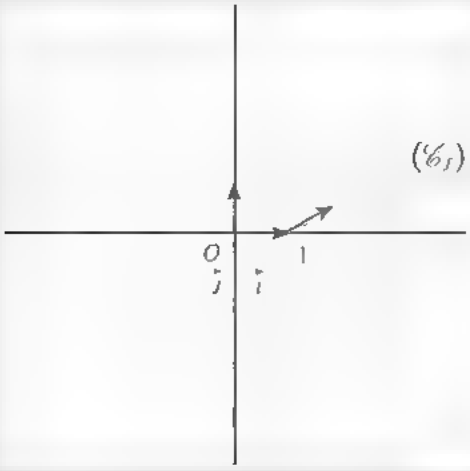
Donc le tableau de variations de f est :

x		$+\infty$
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	$+$
f	0 ↗	$+\infty$

3) Courbe C_f

• On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$; donc la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe (ox) au voisinage de $+\infty$.

• Le tracé de la courbe de f :



1) Montrons que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$

On a $(\forall t \in \mathbb{R}^{*+})\ e^t - 1 > 0$, donc la fonction : $g : t \mapsto \ln(e^t - 1)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$; (composée de deux fonctions continues), ainsi la fonction g admet une fonction primitive F définie sur $\mathbb{R}^{*+}$, avec F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Soit x un élément de $\mathbb{R}^{*+}$, on a : $f(x) = F(2x) - F(x)$

On a la fonction $x \mapsto 2x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ ; 2x > 0$; donc la fonction $x \mapsto F(2x)$ est continue (et dérivable) sur $\mathbb{R}^{*+}$; composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{*+}$; donc f est

continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$

2) a) Variations de g : la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$; et on a :

$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) g'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$

donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}), g'(x) > 0$, ainsi la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$.

b) Déduction :

Soit x un élément de $\mathbb{R}^{*+}$, on a $2x > x$.

La fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[x\ 2x]$; donc pour tout t de $[x, 2x]$ on a : $x \leq t \leq 2x \Rightarrow g(x) \leq g(t) \leq g(2x)$

$$\Rightarrow \int_x^{2x} g(x)\,dt \leq \int_x^{2x} g(t)\,dt \leq \int_x^{2x} g(2x)\,dt$$
$$\Rightarrow xg(x) \leq f(x) \leq xg(2x)$$
$$\Rightarrow x\ln(e^x - 1) \leq f(x) \leq x\ln(e^{2x} - 1)$$

c) Montrons que la fonction f est continue à droite en 0

Soit x un élément de $]0, +\infty[$; on a : $x\ln(e^x - 1) = (e^x - 1)\ln(e^x - 1)\frac{x}{e^x - 1}$

En posant : $X = e^x - 1$, on a : $X \to 0^+ \iff x \to 0^+$

d'où : $\lim_{x \to 0^+}(e^x - 1)\ln(e^x - 1) = \lim_{X \to 0^+} X\ln(X) = 0$,

et on a : $\lim_{x \to 0^+}\frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0}\frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = 1$; donc : $\lim_{x \to 0^+} x\ln(e^x - 1) = 0$

d'autre part : $\lim_{x \to 0^+} x\ln(e^{2x} - 1) = \lim_{x \to 0^+}\frac{1}{2}(2x\ln(e^{2x} - 1))$

$$= \lim_{X \to 0^+}\frac{1}{2}(X\ln(e^X - 1)) = 0 \text{ (en posant } X = 2x\text{)}$$

et puisque : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) x\ln(e^x - 1) \leq f(x) \leq x\ln(e^{2x} - 1)$

et $\lim_{x \to 0^+} x\ln(e^x - 1) = \lim_{x \to 0^+} x\ln(e^{2x} - 1) = 0$, alors d'après les propriétés, limites et ordre, on en conclut que :

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$, donc f est continue à droite en 0.

d) Étudions la dérivabilité de f à droite en 0

Soit x un élément de $\mathbb{R}^{*+}$, on a : $\ln(e^x - 1) \leq \frac{f(x)}{x} < \ln(e^{2x} - 1)$

Et puisque : $\lim_{x \to 0^+}(e^x - 1) = \lim_{x \to 0^+}(e^{2x} - 1) = 0^+$ et $\lim_{X \to 0^+}\ln(X) = -\infty$

alors : $\lim_{x \to 0^+}\ln(e^{2x} - 1) = -\infty$

d'où : $\lim_{x \to 0^+}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+}\frac{f(x)}{x} = -\infty$; (d'après les propriétés des limites et l'ordre), Donc f n'est pas dérivable à droite en 0.

• Calculons $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}^{*+}$; on a : $x\ln(e^x - 1) \leq f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} x\ln(e^x - 1) = +\infty$

D'après une propriété des limites et ordre ; on a : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

* Soit $x \in \mathbb{R}^{*+}$ on a : $\ln(e^x - 1) \leq \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \to +\infty}\ln(e^x - 1) = +\infty$

D'après une propriété des limites et ordre ; on a : $\lim_{x \to +\infty}\frac{f(x)}{x} = +\infty$

* Interprétation géométrique ; on a : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty}\frac{f(x)}{x} = +\infty$, donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3) a) Montrons l'égalité demandée :

On a f est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$; et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})\ f(x) = F(2x) - F(x)$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})$; $f'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2g(2x) - g(x)$

$$= 2\ln(e^{2x} - 1) - \ln(e^x - 1) = \ln\left((e^{2x} - 1)^2\right) - \ln(e^x - 1)$$

$$= \ln\left(\frac{(e^{2x} - 1)^2}{e^x - 1}\right) = \ln\left((e^x - 1)(e^x + 1)^2\right)$$

$$= \ln\left((e^x - 1)(e^{2x} + 2e^x + 1)\right) = \ln(e^{3x} + e^{2x} - e^x - 1)$$

b) Variations de u

• $\lim_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$(à vérifier)

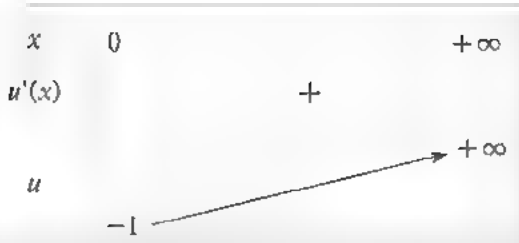
• La fonction u est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$, et on a :

$$(\forall x \in [0; +\infty[)\ ; u'(x) = 3e^{3x} + 2e^{2x} - e^x = e^x(3e^{2x} + 2e^x - 1)$$

$$= 3e^x(e^x + 1)\left(e^x - \frac{1}{3}\right)$$

Et puisque $x \geq 0$ a ors : $e^x \geq 1$, d'où $e^x > \frac{1}{3}$ par conséquent u'(x)>0 pour tout x de $[0; +\infty[$

Donc, le tableau de variations de u est le suivant :



c) Déduction:

La fonction u est continue et strictement croissante sur l'interva le $[0; +\infty[$, d'où la fonction u réalise une bijection de $[0; +\infty[$ vers :

$u([0; +\infty[) = [-1; +\infty[$

Et puisque $0 \in [-1; +\infty[$; alors il existe un seul réel α de $[0; +\infty[$ tel que $u(\alpha) = 0$.

on a : $u\left(\ln\left(\frac{5}{6}\right)\right) < 0$ et $u\left(\ln\left(\frac{5}{4}\right)\right) > 0$, et $u(\alpha) = 0$

d'où : $u\left(\ln\left(\frac{5}{6}\right)\right) < u(\alpha) < u\left(\ln\left(\frac{5}{4}\right)\right)$

et puisque la fonction u est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$ alors :

$\ln\left(\frac{5}{6}\right) < \alpha < \ln\left(\frac{5}{4}\right)$

et on a : $f'(\alpha) = \ln(u(\alpha) + 1) = \ln(1) = 0$

d) Variations de f.

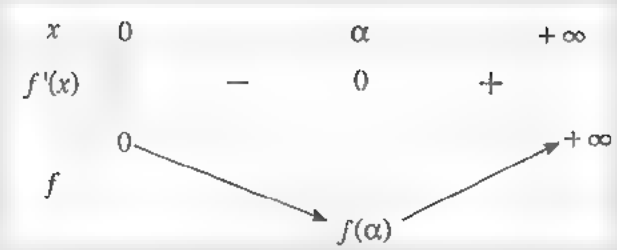
On a : $(\forall x \in [0; +\infty[); f'(x) = \ln(u(x) + 1)$

Soit x un élément de l'interva le $[0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff \ln(u(x) + 1) > 0 \\ &\iff u(x) + 1 > 1 \\ &\iff u(x) > 0 \\ &\iff x > \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } f'(x) < 0 &\iff \ln(u(x) + 1) < 0 \\ &\iff u(x) < 0 \\ &\iff 0 \leq x < \alpha \end{aligned}$$

Donc le tableau de variations de f est le suivant :



Déduction (1)

On a $f(\alpha)$ est la valeur minimale absolue de f sur $\mathbb{R}^+$ et $f(0) = 0$ d'où

$\alpha < 0$

Déduction (2)

La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$;

donc f est une bijection de $[\alpha; +\infty[$ vers $f([\alpha; +\infty[) = [f(\alpha); +\infty[$

Et puisque $0 \in [f(\alpha); +\infty[$; alors il existe un seul élément β de l'intervalle

$]\alpha; +\infty[$ tels que : $f(\beta) = 0$

On a, d'après la question 2) b), en remplaçant x par $\ln 2$; on trouve :

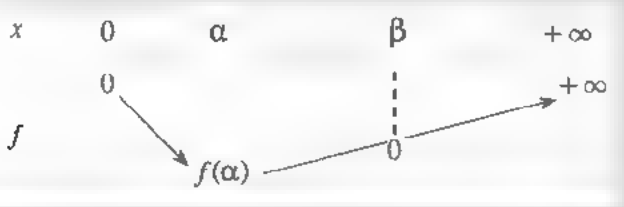
$f(\ln 2)$

donc : $f(\beta) < f(\ln 2)$, et puisque f est strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$

alors $\beta < \ln 2$; d'où $0 < \beta < \ln(2)$

4) a- Déterminons le signe de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

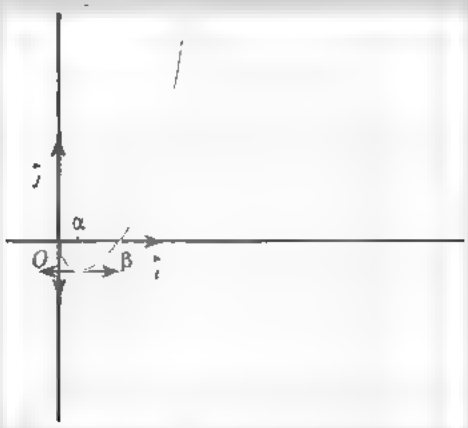
On a : le tableau de variations de la fonction f est



Donc on en déduit le tableau de signe de $f(x)$:

x	0		β	$+\infty$
f	0	$-$	0	$+$

Le tracé de la courbe de f



Exercice 61

1) a) On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par : $u(x) = x - 1 - \ln(x)$

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); u'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

La fonction u est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0, 1]$; d'où :

$(\forall x \in]0, 1])\ u(x) \geq u(1)$ et $(\forall x \in [1, +\infty[)\ u(x) \geq u(1)$

et puisque $u(1) = 0$ alors : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); u(x) \geq 0$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})\ \ln(x) \leq x - 1$

b) Déduction :

Soit x un élément de $\mathbb{R}^{*+}$; on a : $\sqrt{x} \in \mathbb{R}^{*+}$

D'après la question 1) a) ; on en déduit que : $\ln(\sqrt{x}) \leq \sqrt{x} - 1$

Donc : $\ln(x) \leq 2(\sqrt{x} - 1)$ (car $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln(x)$)

2) a) Montrons que f est définie sur $\mathbb{R}^{+}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a: $x \in D \Leftrightarrow (x > 0$ et $2\sqrt{x} - \ln(x) \neq 0)$ ou $x = 0$

D'après la question 1)b) ; on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) \ln(x) < 2\sqrt{x} - 2$

d'où : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); 2 < 2\sqrt{x} \quad \ln(x)$ donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})$; $2\sqrt{x} \quad \ln(x) \neq 0$

-ainsi : $D = [0; +\infty[$

b) *Continuité de f à droite en 0 :

Soit x un élément de $]0, +\infty[$ on a : $\lim_{x \to 0^+}(2\sqrt{x} - \ln(x)) - +\infty$ et $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} - 0^+$

donc: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - \ln(x)} = 0 = f(0)$

Par conséquent f est continue à droite en 0.

• Dérivablité de f à droite en 0

Soit x un élément de $]0, +\infty[$; on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x(2\sqrt{x} - \ln(x))} = \frac{1}{2x - \sqrt{x}\ln(x)} = \frac{1}{2x - 2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})}$$

on a : $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\ln(\sqrt{x}) - \lim_{x \to 0^+} X\ln(X) = 0$ (avec $X = \sqrt{x}$)

D'où : $\lim_{x \to 0^+}(2x - 2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})) = 0$

D'autre part : $2x - 2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}(\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}))$

et puisque : $\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}) \geq 0$ (car : $\ln(\sqrt{x}) \leq \sqrt{x} - 1$)

alors : $\lim_{x \to 0^+}(2x - 2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})) - 0^+$; donc : $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$

Par conséquent f est non dérivable à droite en 0.

c) * Calculons $\lim_{x \to +\infty} f(x)$:

Soit $x \in \mathbb{R}^{*+}$; on a : $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - \ln(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(2 - \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{1}{2 - 2\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}$

Et on a : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - \lim_{X \to +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$ (avec $X = \sqrt{x}$) ; donc : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

* La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$; comme rapport de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et on a pour tout x de $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2\sqrt{x} - \ln(x)) - \sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)}{(2\sqrt{x} - \ln(x))^2}$$

$$= \frac{-\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x} - \ln(x))^2} = \frac{2 - \ln(x)}{2\sqrt{x}(2\sqrt{x} - \ln(x))^2}$$

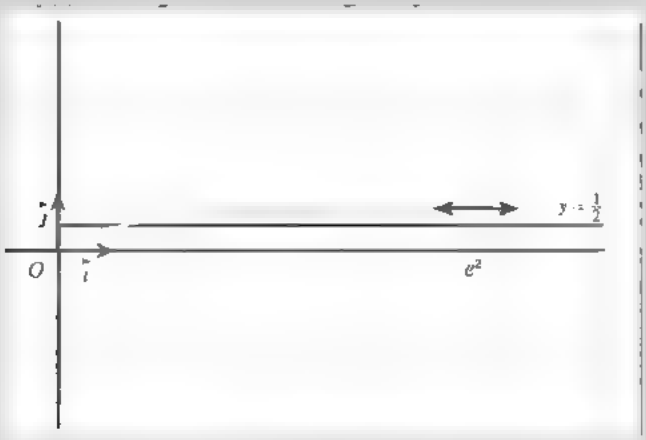
on a : $f'(x) > 0 \iff x < e^2$

$f'(x) \leq 0 \iff x \geq e^2$

Le tableau de variations de f est le suivant :

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	0	↗	$\frac{e}{2(e-1)}$	↘	$\frac{1}{2}$

d) Le tracé de (C) :



3) a) Montrons la double inégalité

Soit x un élément de $[1, +\infty[$;

on a : $\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - \ln(x)} \left\{\frac{1}{2} + \frac{\ln(x)}{4\sqrt{x}}\right\} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - \ln(x)} \cdot \frac{2\sqrt{x} + \ln(x)}{4\sqrt{x}}$

$$= \frac{4x - 4x + (\ln x)^2}{4\sqrt{x}\left(2\sqrt{x} - \ln(x)\right)}$$

$$= \frac{(\ln(x))^2}{4\sqrt{x}\left(2\sqrt{x} - \ln(x)\right)}$$

On a montré dans la question1) a) que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}), 2\sqrt{x} - \ln(x) > 0$

D'où : $(\forall x \in [1, +\infty[) \quad \frac{(\ln(x))^2}{4\sqrt{x}(2\sqrt{x} - \ln(x))} \geq 0$

Donc : $\left(\forall x \in [1, +\infty[\right), \frac{1}{2} + \frac{\ln(x)}{4\sqrt{x}} < \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - \ln(x)}$

D'autre part :

on a :

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ln(x)\right)-\left(\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-\ln(x)}\right)=\frac{2+\ln(x)}{4}-\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-\ln(x)}$$

$$=\frac{4\sqrt{x}-2\ln(x)+2\sqrt{x}\ln(x)-(\ln x)^2-4\sqrt{x}}{4\left(2\sqrt{x}-\ln(x)\right)}$$

$$=\frac{\ln(x)\left(2\sqrt{x}-2-\ln(x)\right)}{4\left(2\sqrt{x}-\ln(x)\right)}$$

D'après la question 1) b) on a : $2\sqrt{x}-2-\ln(x)>0$ et $2\sqrt{x}-\ln(x)>0$

et on sait que : $\left(\forall x\in[1,+\infty[\right);\ln(x)\geq 0$

d'où : $\left(\forall x\in[1,+\infty[\right);\frac{\ln(x)\left(2\sqrt{x}-2-\ln(x)\right)}{4\left(2\sqrt{x}-\ln(x)\right)}\geq 0$

Donc : $\left(\forall x\in[1,+\infty[\right),\ \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-\ln(x)}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ln(x)$

Conclusion : $\left(\forall x\in[1;+\infty[\right)\ ;\ \frac{1}{2}+\frac{\ln x}{4\sqrt{x}}\leq\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-\ln x}<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ln x$

b) Calculons $I_1=\int_1^4\ln(x)\,dx$ (en utilisant une intégration par parties).

On pose : $\begin{cases}u'(x)=1\\ v(x)=\ln(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u(x)=x\\ v'(x)=\frac{1}{x}\end{cases}$

les fonctions u et v sont dérivables sur $[1;4]$ et u' ; v' sont continues sur $[1;4]$

donc : $I_1=\int_1^4\ln(x)dx=[x\ln(x)]_1^4-[x]_1^4=4\ln(4)-4+1=4\ln(4)\quad 3$

- Calculons $I_2=\int_1^4\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$ par parties.

on pose : $\begin{cases}u'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\\ v(x)=\ln(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u(x)=2\sqrt{x}\\ v'(x)=\frac{1}{x}\end{cases}$

Donc : $I_2=\int_1^4\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx=\left[2\sqrt{x}\ln(x)\right]_1^4-2\int_1^4\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$$=\left[2\sqrt{x}\ln(x)\right]_1^4-2\left[2\sqrt{x}\right]_1^4$$

$$=4\ln(4)-4(2-1)$$

$$=4\ln(4)-4$$

c) Pour tout x de $[1, +\infty[$ on a : $\frac{1}{2} + \frac{\ln(x)}{4\sqrt{x}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln(x)$

donc : $\int_1^4 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right)dx < \int_1^4 f(x)\,dx < \int_1^4 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln(x)\right)dx$

d'où : $\left[\frac{1}{2}x\right]_1^4 + \frac{1}{4}I_2 \leq \int_1^4 f(x)\,dx \leq \left[\frac{1}{2}x\right]_1^4 + \frac{1}{4}I_1$

ainsi : $\frac{1}{2} + \ln(4) \leq \int_1^4 f(x)\,dx \leq \frac{3}{4} + \ln(4)$

En posant $\mathscr{A}(\Delta)$ l'aire demandée ; on a :

$$\left(\frac{1}{2} + \ln(4)\right)u.a \leq \mathscr{A}(\Delta) \leq \left(\frac{3}{4} + \ln(4)\right)u.a$$

Exercice 63

1. a) Vérifions que f est une fonction paire.

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $-x \in \mathbb{R}$;

et : $f(\quad x) \quad (-x).\frac{e^{\quad x} - 1}{e^{\quad x} + 1} \quad (-x)\ \frac{e^{\quad x}(1 - e^{2x})}{e^{\quad x}(1 + e^{2x})} = x.\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad f(x)$

on a : $\begin{cases}(\forall x \in \mathbb{R}) ; (-x) \in \mathbb{R} \\ (\forall x \in \mathbb{R}) ; f(-x) = f(x)\end{cases}$ donc f est une fonction paire.

b) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; e^{4x} + 4xe^{2x} - 1 > 0$

Soit x un élément de $\mathbb{R}_+^*$;

La fonction exponentielle népérienne est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;

donc : $x > 0 \Rightarrow 4x > 0$

$\Rightarrow e^{4x} > e^0$

c'est-à-dire , $e^{4x} - 1 > 0$ et on a $xe^{2x} > 0$; donc , $e^{4x} + 4xe^{2x} \quad 1 > 0$

d'où : $(\forall x \in\ ]0, +\infty[) ; e^{4x} + 4xe^{2x} - 1 > 0$

c) Tableau de variations de f :

* Limites : on a : $\lim\limits_{\ } e^{2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \quad 1$

et on a : $\lim\limits_{\ } x = \quad \infty$; donc : $\lim\limits_{\ } f(x) = \lim\limits_{x} x.\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} \quad 1 - + \infty$

Puisque f est paire ; alors : $\lim\limits_{\ } f(x) - \lim\limits_{t} f(\quad t) - \lim\limits_{t} f(t) - + \infty$

(en posant ; $t = -x$; $x \to +\infty \iff t \to -\infty$)

* Fonction dérivée :

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} + x.\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{e^{4x}+4xe^{2x}-1}{(e^{2x}+1)^2}$$

et d'après la question b) on alors : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); f'(x) > 0$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, (car f est continue en 0).

Et puisque f est une fonction paire, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

Ainsi , le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

2. a) * Etude des branches infinies :

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X-1}{X+1} = \lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X}{X} = \lim\limits_{X\to+\infty} 1 = 1$

(En posant $X = e^{2x}$; $x \to +\infty \iff X \to +\infty$)

Et on a : $f(x) - x = x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} - 1\right)$

$$= x\left(\frac{-2}{e^{2x}+1}\right) = \frac{2x}{e^{2x}}.\left(\frac{-1}{1+e^{-2x}}\right)$$

Et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{2x} = +\infty$; alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^{2x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{1+e^{-2x}} = -1$

car : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; Donc la droite d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

* On pose $t = -x$ on a : $x \to -\infty \iff t \to +\infty$

donc : $\lim_{x \to -\infty} f(x) + x = \lim_{t \to +\infty} f(-t) - t = \lim_{t \to +\infty} f(t) - t = 0$

et on a : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; donc la droite d'équation $y = -x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

* Position de (C_f) et son asymptote oblique sur $\mathbb{R}^+$:

On a : $(\forall x \in [0, +\infty[) ; f(x) - x = \frac{-2x}{e^{2x} + 1}$

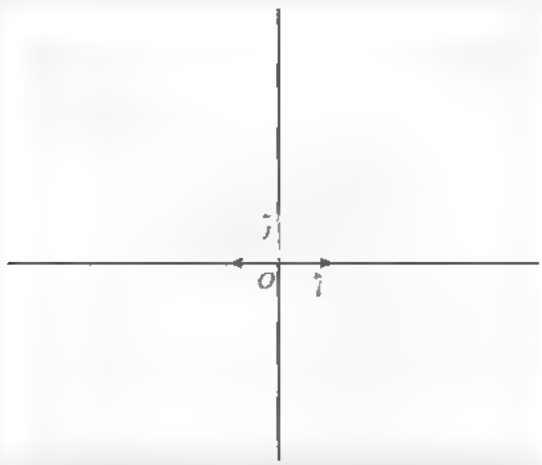
Donc : $(\forall x \in [0, +\infty[) ; f(x) \leq x$

c'est-à-dire la courbe (C_f) est au dessous de son asymptote oblique sur $\mathbb{R}^+$.

et on a : $(\forall x \in]-\infty, 0]) ; f(x) + x = \frac{2xe^{2x}}{1 + e^{2x}}$

Donc : $(\forall x \in]-\infty, 0]) ; f(x) \leq -x$

Ainsi la courbe (C_f) est au dessous de son asymptote oblique sur $\mathbb{R}$.



3. Soit x un élément de $[0, +\infty[$. montrons que : $\frac{x}{2e^{2x}} < \frac{x}{e^{2x} + 1} < \frac{e^x}{e^{x} + 1}$

* On a : $\frac{x}{e^{2x} + 1} - \frac{x}{2e^{2x}} = \frac{2xe^{2x} - xe^{2x} - x}{2e^{2x}.(e^{2x} + 1)}$

$$= \frac{x}{2e^{2x}} \cdot \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{2e^{2x}} f(x)$$

Et puisque f est positive sur $\mathbb{R}^+$ (d'après le tableau de variations)

alors $(\forall x \in [0, +\infty[) ; f(x) \geq 0$ (1)

* et on a : $\frac{e^x}{e^{2x} + 1} - \frac{x}{e^{2x} + 1} = \frac{e^x - x}{e^{2x} + 1}$

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $u(x) = e^x - x$

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); u'(x) = e^x - 1$

Et puisque $u'(x) \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$, alors $(\forall x \in [0, +\infty[), u(x) \geq u(0)$

c'est-à-dire : $(\forall x \in [0, +\infty[); e^x - x \geq 0$ car $u(0) = 1$

Donc : $\frac{e^x - x}{e^{2x} + 1} \geq 0$ ainsi : $\frac{x}{e^{2x} + 1} \leq \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$ (2)

D'après (1) et (2) on déduit que : $\forall x \in [0, +\infty[); \frac{x}{2e^{2x}} < \frac{x}{e^{2x} + 1} < \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$

4. a) Calculons v_n et w_n en fonction de n.

• Soit n un élément de $\mathbb{N}$, on a : $v_n = \int_0^n \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$

On pose : $t = e^x$, on a alors ; $dt = e^x dx$

et $\begin{cases} x = 0 \\ x = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = e^n \end{cases}$

ainsi ; on a : $v_n = \int_0^n \frac{e^x}{1 + (e^x)^2} dx = \int_1^{e^n} \frac{dt}{1 + t^2}$

$= [Arc\tan(t)]_1^{e^n} = Arc\tan(e^n) - \frac{\pi}{4}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = Arc\tan(e^n) - \frac{\pi}{4}$

* Soit n un élément de $\mathbb{N}$, on a : $w_n = \int_0^n \frac{x}{2e^{2x}} dx$

En utilisant une intégration par parties ; on a :

$$\begin{cases} u(x) = \frac{x}{2} \\ v'(x) = e^{-2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{2} \\ v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$$

on a donc : $w_n = \left[-\frac{1}{4}xe^{-2x}\right]_0^n + \frac{1}{4}\int_0^n e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{4}xe^{-2x}\right] + \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^n$

$w_n = -\frac{1}{4}ne^{-2n} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}e^{-2n} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}\left(n + \frac{1}{2}\right)e^{-2n} + \frac{1}{8}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}), w_n = -\frac{1}{4}\left(n + \frac{1}{2}\right)e^{-2n} + \frac{1}{8}$

b) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}); w_n \leq u_n \leq v_n \leq \frac{\pi}{4}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on a :

D'après la question 3) : $(\forall t \in [0;n]); \frac{t}{2e^{2t}} \leq \frac{t}{e^{2t}+1} \leq \frac{e^t}{e^{2t}+1}$

d'où : $\int_0^n \frac{t}{2e^{2t}}dt \leq \int_0^n \frac{t}{e^{2t}+1}dt \leq \int_0^n \frac{e^t}{e^{2t}+1}dt$

c'est-à-dire $w_n \leq u_n \leq v_n$ (1)

Et on a : $v_n = Arc\tan(e^n) - \frac{\pi}{4}$; donc : $\frac{\pi}{4} + v_n = \frac{\pi}{2} - Arc\tan(e^n)$

Et puisque : $(\forall x \in \mathbb{R}); -\frac{\pi}{2} < Arc\tan(x) < \frac{\pi}{2}$

alors : $\frac{\pi}{2} - Arc\tan(e^n) > 0$ donc : $v_n \leq \frac{\pi}{4}$ (2)

D'après (1) et (2) on a : $(\forall n \in \mathbb{N}); w_n \leq u_n \leq v_n \leq \frac{\pi}{4}$

c) * Montrons que la suite (u_n) est croissante.

Soit n un élément de $\mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} \frac{x}{e^{2x}+1}dx - \int_0^n \frac{x}{e^{2x}+1}dx$$
$$= \int_0^{n+1} \frac{x}{e^{2x}+1}dx + \int_n^0 \frac{x}{e^{2x}+1}dx = \int_n^{n+1} \frac{x}{e^{2x}+1}dx$$

Et puisque : $(\forall x \in [n;n+1]); \frac{x}{e^{2x}+1} \geq 0$

alors : $\int_n^{n+1} \frac{x}{e^{2x}+1}dx > 0$ ainsi : $u_{n+1} \geq u_n$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n \leq u_{n+1}$, d'où la suite (u_n) est croissante.

* La suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{\pi}{4}$; donc elle est convergente.

d) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$; montrons que : $\frac{1}{4} \leqslant \lim_{n\to+\infty} a_n \leqslant \frac{\pi}{2}$

on a la fonction $x \mapsto x - f(x)$ est continue et positive $[0;n]$; donc a_n l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droites d'équations : $y = x$, $x = 0$ et $x = n$ est :

$a_n = \int_0^n (x - f(x))dx = 2\int_0^n \frac{x}{e^{2x}+1}dx = 2u_n$ (car $f(x) \leq x$

et on a : $(\forall n \in \mathbb{N}); w_n \leq u_n \leq v_n \leq \frac{\pi}{4}$

d'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); 2w_n \leq a_n \leq \frac{\pi}{2}$ et $2w_n = -\frac{1}{4}.e^{-2n} - \frac{1}{2}.ne^{-2n} + \frac{1}{4}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; -\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)e^{-2n}+\frac{1}{4} \leq a_n \leq \frac{\pi}{2}$

et puisque $\lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{4}e^{-2n} = 0$ et $\lim_{n \to +\infty}\left(-\frac{1}{2}ne^{-2n}\right) = \lim_{n \to +\infty}\frac{1}{4}(-2n)e^{-2n} = 0$

alors $\lim_{n \to +\infty} 2w_n = \frac{1}{4}$; donc : $\frac{1}{4} \leq \lim_{n \to +\infty} a_n \leq \frac{\pi}{2}$

Exercice 64

Partie 1 :

1) * Tableau de variations de h.

• On a : $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{X \to +\infty} Arc\tan X = \frac{\pi}{2}$; $\lim_{X \to -\infty} Arc\tan X = -\frac{\pi}{2}$

Donc : $\lim_{x \to +\infty} h(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\frac{\pi}{2}$

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x de $\mathbb{R}$ on a:

$$h'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1-x^2-1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

Ainsi : $h'(x) \leq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$

Donc : le tableau de variations de h est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$	|	$-$	0	$-$	
h	$\frac{\pi}{2}$	↘		↘	$-\frac{\pi}{2}$

* Déduction :

on a : $h(0) = 0 \iff x = 0$ et : $h(x) > 0 \iff x \in]-\infty; 0[$

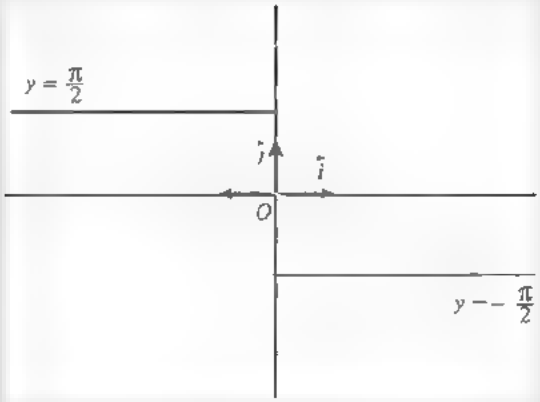
$h(x) < 0 \iff x \in]0, +\infty[$

2) Le tracé :

* On a : $\lim_{x \to -\infty} h(x) = \frac{\pi}{2}$ donc la courbe (C) admet une asymptote d'équation $y = \frac{\pi}{2}$ au voisinage de $-\infty$.

* et : $\lim_{x \to +\infty} h(x) = -\frac{\pi}{2}$ donc la courbe (C) admet une asymptote d'équation

$y = -\frac{\pi}{2}$ au voisinage de $+\infty$.



3)Soit S l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équation : $x = 0$; $x = 1$ et $y = 0$

On a : $(\forall x \in [0;1])$; $h(x) \leq 0$

donc : $S = \int_0^1 -h(x)\,dx = \int_0^1 Arc\tan(x)\,dx - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$

•Calculons : $\int_0^1 Arc\tan(x)\,dx$

on pose : $\begin{cases} u(x) = Arc\tan(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ v(x) = x \end{cases}$

Donc : $\int_0 Arc\tan(x)\,dx = \left[xArc\tan(x)\right]_0 - \int_0 \frac{x}{1+x^2}\,dx$

Ainsi : $S = \left[xArc\tan(x)\right]_0^1 \quad \frac{1}{2}\int_0 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} \quad \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \frac{\pi}{4} \quad \frac{1}{2}\ln(2)$

Donc : $S = \left(\frac{\pi}{4} - \ln(2)\right) cm^2$

Partie 2 :

1) a Montrons l'inégalité: $(\forall t \in \mathbb{R}); 0 \leq 1 - \frac{1}{1+t^2} \leq t^2$

Soit t un élément de $\mathbb{R}$ on a : $1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{1+t^2-1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$

d'où : $1 - \frac{1}{1+t^2} \geq 0$ (car $t^2 \geq 0$ et $1 + t^2 > 0$)

et on a : $t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^4 - 1 + 1}{1+t^2} = \frac{t^4}{1+t^2}$

Donc : $t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2} \geq 0$; d'où : $t^2 \geq 1 - \frac{1}{1+t^2}$ (car $t^4 \geq 0$)

Par suite : $(\forall t \in \mathbb{R}); 0 \leq 1 - \frac{1}{1+t^2} < t^2$

b) Déduction:

Soit x un élément de $\mathbb{R}^+$, on a d'après la double inégalité précédente :

$\forall t \in [0;x]$; $0 < 1 - \frac{1}{1+t^2} \leq t^2$ donc : $0 \leq \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt \leq \int_0^x t^2 dt$

D'où : $0 \leq \left[t - Arc\tan(t)\right]_0^x \leq \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x$ par suite : $0 \leq x - Arc\tan(x) \leq \frac{x^3}{3}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$, $0 \leq x - Arc\tan(x) \leq \frac{x^3}{3}$

2) a - Continuité de g sur $\mathbb{R}$.

La fonction $Arc\tan$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$, et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$, donc g est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

On a : $\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{Arc\tan(x)}{x} = (Arc\tan)'(0) = 1 = g(0)$

Donc la fonction g est continue en 0. Par suite g est continue sur $\mathbb{R}$.

b- Dérivabilité de g en 0:

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{1}{x}\left(\frac{Arc\tan(x)}{x} - 1\right) = \frac{Arc\tan(x) - x}{x^2}$$

On a d'après la question précédente : $0 < x - Arc\tan(x) \leq \frac{x^3}{3}$

donc : $-\frac{x}{3} \leq \frac{Arc\tan(x) - x}{x^2} \leq 0$

d'où : $(\forall x \in]0; +\infty[)$; $-\frac{x}{3} \leq \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \leq 0$

Puisque : $\lim_{x \to 0}\left(-\frac{x}{3}\right) = 0$ donc : $\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0$

• Déterminons $\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$;

On pose : $t = -x$, on a alors : $x \to 0^- \Leftrightarrow t \to 0^+$

et remarquons que g est paire on a alors:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{t \to 0^+} \frac{g(-t) - g(0)}{-t} = -\lim_{t \to 0^+} \frac{g(t) - g(0)}{t} = 0$$

Donc : $\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0$; ainsi la fonction g est dérivable en 0 et on a :

$g'(0) = 0$

c- Montrons que $(\forall x \in [1;+\infty[)\ ;\ 0 \leq \int_1^x g(t)\,dt \leq \frac{\pi}{2}.\ln(x)$

on a : $(\forall t \in [1;x])\ ;\ 0 \leq Arc\tan(t) \leq \frac{\pi}{2}$

d'où : $(\forall t \in [1;x])\ ;\ 0 \leq \frac{Arc\tan(t)}{t} \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{t}$

ainsi : $0 \leq \int_1^x \frac{Arc\tan(t)}{t}\,dt \leq \frac{\pi}{2}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

Et puisque : $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = [\ln(t)]_1^x = \ln(x)$ alors : $0 \leq \int_1^x g(t)\,dt \leq \frac{\pi}{2}.\ln(x)$

Donc : $(\forall x \in [1;+\infty[)\ ;\ 0 \leq \int_1^x g(t)\,dt \leq \frac{\pi}{2}.\ln(x)$

Partie 3 :

1) Etudions de la parité de f

Soit x un élément de $\mathbb{R}^*$, on a : $-x \in \mathbb{R}^*$ et $f(-x) = -\frac{1}{x}\int_1^{-x} g(t)\,dt$

On pose : $t = -u$, on a : $dt = -du$

et $\begin{cases} t = 0 \\ t = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = x \end{cases}$

$f(-x) = -\frac{1}{x}\int_0^x g(-u)(-du) = \frac{1}{x}\int_0^x g(u)\,du = f(x)$ (car g est paire)

et on a : $g(-0) = g(0) = 1$; donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f(-x) = f(x)$

c'est-à-dire f est une fonction paire.

2) a- Montrons que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ,\ 0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{9}$

Soit x un élément de $]0;+\infty[$;

on a : $1 - f(x) = 1 - \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt = \frac{1}{x}\left(x - \int_0^x g(t)\,dt\right)$

$= \frac{1}{x}\left(\int_0^x 1.dt - \int_0^x g(t)\,dt\right) = \frac{1}{x}\int_0^x (1 - g(t))\,dt$

et on a : $0 \leq x - Arc\tan(x) \leq \frac{x^3}{3}$

c'est-à-dire : $0 < 1 - \frac{Arc\tan(x)}{x} \leq \frac{x^2}{3}$ d'où : $0 < 1 - g(x) < \frac{x^2}{3}$

Et puisque la fonction $t \mapsto 1 - g(t)$ est continue sur $[0;x]$

et $(\forall t \in [0;x])\ ;\ 0 \leq \quad g(t) \leq \frac{t^2}{3}$ alors : $0 < \int_0^x (1 - g(t))\,dt \leq \int_0^x \frac{t^2}{3}\,dt$

et on a : $\int_0^x \frac{t^2}{3}\,dt = \frac{1}{3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{1}{9}x^3$ donc : $0 \leq \int_0^x (1 \quad g(t))\,dt < \frac{x^3}{9}$

d'où : $0 \leq \frac{1}{x}\int_0^x (1 - g(t))\,dt \leq \frac{x^2}{9}$

Par conséquent : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ;\ 0 \leq 1-f(x) \leq \frac{x^2}{9}$

b- Montrons que f est continue en 0.

On a : $\begin{cases} (\forall x \in]0;+\infty[)\ ;\ 0 \leq 1-f(x) \leq \frac{x^2}{9} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^2}{9} = 0 \end{cases}$

d'où : $\lim\limits_{x \to 0^+} 1-f(x) = 0$; c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

Et on a : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{t \to 0^+} f(-t) = \lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = 1$

(en posant : $t = -x$ et sachant que f est une fonction paire).

Par suite ; on a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$; Donc la fonction f est continue en 0.

c- Dérivabilité de f en 0.

Soit x un élément de $]0;+\infty[$.

on a : $0 \leq 1-f(x) \leq \frac{x^2}{9}$; d'où : $-\frac{x}{9} \leq \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq 0$

Donc : $\begin{cases} (\forall x \in]0;+\infty[)\ ;\ -\frac{x}{9} \leq \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(-\frac{x}{9}\right) = 0 \end{cases}$

Par suite : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

et on a : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{f(-t)-f(0)}{-t} = -\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{t} = 0$

(en posant : $t = -x$, et sachant que f est paire).

Donc : $\lim\limits_{x} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$; ainsi la fonction f est dérivable en 0 et on a :

$f'(0) = 0$

3) Déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Soit x un élément de l'intervalle $[1;+\infty[$

on a : $f(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 g(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_1^x g(t)\,dt$

Et puisque : $0 < \int_1^x g(t)\,dt \leq \frac{\pi}{2}.\ln(x)$ alors : $0 < \frac{1}{x}\int_1^x g(t)\,dt \leq \frac{\pi}{2}\ \frac{\ln(x)}{x}$

Donc : $\begin{cases} (\forall x \in [1;+\infty[)\ ;\ 0 \leq \frac{1}{x}\int_1^x g(t)\,dt \leq \frac{\pi}{2}\ \frac{\ln(x)}{x} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\pi}{2}.\frac{\ln(x)}{x} = 0 \end{cases}$

Par conséquent : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x g(t)\,dt = 0$

et on a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt - \left(\int_1^x g(t)\,dt\right).\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$; donc : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Et on a : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, (car f est une fonction paire)

4) a- Vérifions l'égalité proposée:

La fonction g est continue sur $]0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$.

Donc la fonction $x \mapsto \int g(t)\,dt$ est dérivable sur les deux intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

Ansi la fonction f est dérivable en chaque point de $\mathbb{R}^*$ (comme produit de deux fonctions dérivables) et pour tout x de $\mathbb{R}^*$, on a :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.\int_0^x g(t)\,dt + \frac{1}{x}g(x)$$
$$= -\frac{1}{x^2}.\int_0^x g(t)\,dt + \frac{Arc\tan(x)}{x^2}$$

c'est-à-dire : $x^2 f'(x) = Arctanx - \int_0^x g(t)\,dt$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ ;\ x^2 f'(x) - Arctanx - \int_0^x g(t)dt$

b- La fonction φ est définie sur $\mathbb{R}$;

Vérifions que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\,; x\varphi'(x) = h(x)$ et on a :

$$\begin{cases}\varphi(x) = Arc\tan(x) - \int_0^x g(t)dt\ ;\ x \neq 0\\ \varphi(0) = 0\end{cases}$$

La fonction φ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$;

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ ;\ \varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - g(x)$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{Arc\tan(x)}{x} = h(x)$$

c- Dressons le tableau de variations de f

Si $x > 0$ alors $h(x) < 0$; donc $\varphi'(x) < 0$.

Donc la fonction φ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

Et on a : $\lim_{x \to 0} \varphi(x) = \lim_{x \to 0} x^2 f'(x) = 0 = \varphi(0)$

Donc : φ est continue en 0.

Ainsi on a : $(\forall x \in]0; +\infty[) \; ; \; \varphi(x) < \varphi(0)$

— $(\forall x \in]0; +\infty[) \; ; \; \varphi(x) < 0$

Et puisque le signe de $f'(x)$ est celui $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}^+$;

alors : $(\forall x \in]0; +\infty[) \; ; \; f'(x) < 0$

Si $x < 0$ alors $h(x) > 0$; d'où : $\varphi'(x) < 0$

(car $x < 0$ et $x\varphi'(x) = h(x)$)

Donc la fonction φ est str ctement décroissante sur $]-\infty, 0[$

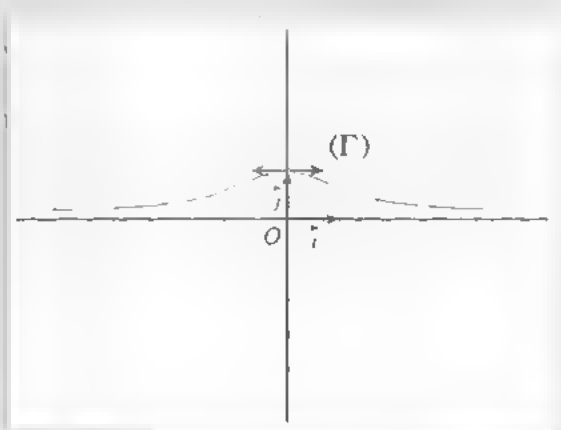
c'est-à-dire : $(\forall x \in]-\infty; 0[) \; ; \; \varphi(x) > \varphi(0)$

Par conséquent : $(\forall x \in]-\infty; 0[) \; ; \; f'(x) > 0$

Donc le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	1	↘	0

5) La courbe (Γ)



3 Équations différentielles

Résumé

1 Équation différentielle $y' = ay + b$

Propriété 1

Soit a un réel non nul l'équation $y' = ay$ est appelée équation différentielle de premier ordre, dont l'inconnue est une fonction y définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de l'équation différentielle: $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $x \mapsto ke^{ax}$; $k \in \mathbb{R}$ (ou encore: $y = ke^{ax}$)

Propriété 2

Soit a et b deux réels non nuls ;

Les solutions de l'équation différentielle: $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$; $k \in \mathbb{R}$. On peut écrire $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$.

Propriété 3

Soit a et b deux réels tels que , a non nul

L'équation différentielle $y' = ay + b$ admet une unique solutions y qui vérifie $y(x_0) = y_0$, où x_0 et y_0 sont deux réels données.

2 Equation du type: $y'' + ay' + by = 0$

Propriété

L'équation du type: $y'' + ay' + by = 0$ (où a et b sont deux réels est appelée équation différentielle du second degré; l'inconnue est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivables.

Une solution de l'équation différentielle: $y'' + ay' + by = 0$ est toute fonction f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, et vérifiant:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; \; f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$$

Pour résoudre : $y'' + ay' + by = 0$

↓

On écrit dans $\mathbb{C}$ son équation caractéristique: $r^2 + ar + b = 0$

↓

On calcule le discriminant: Δ

↓

Si: $\Delta < 0$	Si: $\Delta = 0$	Si: $\Delta > 0$
↓	↓	↓
L'équation caractéristique admet 2 solutions complexes conjuguée: $r_1 = p + iq$ et $r_2 = r_1 = p - iq$	L'équation caractéristique admet une seule solution r_0	L'équation caractéristique admet 2 solutions réelles r_1 et r_2
↓	↓	↓
$y = (\alpha\cos(qx) + \beta\sin(qx))e^{px}$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$	$y = (\alpha x + \beta)e^{r_0 x}$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$	$y = \alpha e^{r_1 x}$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

Ces particuliers

Solutions	Equation
$(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \quad x \mapsto \alpha e^{\omega x} + \beta e^{-\omega x}$	$y'' - \omega^2 y = 0$
$(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2 \quad x \mapsto \alpha\cos\omega x + \beta\sin\omega x$ $(\lambda;\varphi) \in \mathbb{R}^2 \quad x \mapsto \lambda\cos(\omega x + \varphi)$	$y'' + \omega^2 y = 0$
$(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2 \quad x \mapsto \alpha + \beta e^{-\omega x}$	$y'' + \omega y' = 0$

Exercices d'application

Résoudre les équations différentielles suivantes:

1) $(\cos\theta)y' - 5(\sin\theta)y = 0$; où et $y\left(\frac{1}{\tan\theta}\right) = 1$

2) $2y' + \ln(9)y - \ln 3$ et $y(0) - 1$

3) $y' + \cos x = 1 + \sin x$ et $y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}$

4) $x^2y' - 1 - y'$ et $y(1) = -\frac{\pi}{4}$

Résoudre les équations différentielles suivantes:

1) $2y'' - 3y' + y = 0$; avec: $y(0) = -2$ et $y'(0) = 0$

2) $y'' - y' + y = 0$; avec: $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

3) $3y'' + 2\sqrt{3}y' + y = 0$; avec : $y(0) = -1$ et $y'(0) = 1$

4) $\sqrt{2}y'' + 2y' = 0$

5) $-2y'' + 3y = 0$

6) $y'' = 0$

7) $y'' - e^{-x} + 1 = x - \sin x$

Résoudre chaque équation différentielle suivante, en discutant suivant le paramètre réel m

$(E_1): (m-1)y' + my = m$

$(E_2): m(y' + my) + 3(y' - 3y) + 2 = m$

$(E_3): \frac{1}{4}my'' + (m+2)y' + (m+1)y = 0$

$(E_4): (m-2)2y'' + (m-1)(m-2)y' + y = 0$

On considère l'équation différentielle $(E_1): y' - y = 4\cos x$

1) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $(E_0): y' - y = 0$

2) Déterminer deux réels a et b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = a\cos x + b\sin x$, soit une solution de 'équation différentielle (E_1)

3) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que f est solution de l'équation différentielle (E_1) s et seulement si $f - g$ est solution de l'équation (E_0)

4) En déduire les solutions de l'équation différentielle (E_1)

Exercice 5

On considéré l'équation différentielle: $(E_1)y' + y = x + 1$

1) On pose: $z = y - x$; écrire une équation différentielle (E_2) vérifiée par z.

2) Résoudre les équations différentielles (E_2) et (E_1)

3) Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E_1) qui vérifie: $f(0) = 1$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On considère l'équation $(E_1): y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$

1) Déterminer une fonction polynôme du second degré (trinôme) g qui vérifie (E_1).

2) a- soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

Montrer que f est solution de l'équation différentielle (E_1) si et seulement si $(f-g)$ est une solution de l'équation $(E_0): y'' + 2y' + y = 0$

b) Résoudre l'équation différentielle (E_0)

c) Donner la solutions générale de l'équation (E_1).

3) a) Déterminer la fonction φ solution de l'équation différentielle (E_1), tel que la droite$(O;\vec{i})$ est la tangente à la courbe de φ au point O.

b) Déterminer une fonction h solution de l'équation (E_1) tel que: $h(0) = 0$ et $\int_0^1 h(x)\,dx = \frac{1}{3} - \frac{2}{e}$

Exercice 7

On considère l'équation différentielle suivante:

$$(E_1)\quad y'' + 2y' + 2y = 3\cos x - \sin x$$

1)Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = \cos x + \sin x$ est une solution de l'équation (E_1).

2) Résoudre l'équation différentielle: $(E_0): y'' + 2y' + 2y = 0$

3) Sont f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

Montrer f est une solution de (E_1) si et seulement si : $f-g$ est solution de (E_0).

4) a) Déterminer la fonction φ solution de (E_1) tel que:

$\varphi(0) = 0$ et $\varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$

b) Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $|\varphi(x)| \leq 2\sqrt{2}$

Exercice 8

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i};\vec{j})$.

On considère l'équation différentielle: $(E_1): y' - 2y = \frac{-2}{1-e^{2x}}$

1) Résoudre l'équation différentielle $(E_0): y' - 2y = 0$; puis déterminer la solution de (E_0) dont la courbe passe par le point $A(0;1)$.

2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = e^{2x} g(x)$$

a) Calculer $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et $g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

b) Montrer que f est solution de (E_1) si et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{2x}}{1+e^{2x}}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

c) Et déduire la solution générale de l'équation différentielle (E_1).

On considère l'équation différentielle:

$$(E_1): y'' + n^2 y = n(n-1)\sin^{n-2}(x) \; ; \; n \in \mathbb{N}^*$$

1) Déterminer en fonction de n les solutions de l'équation différentielle: $(E_2): y'' + n^2 y = 0$

2) a) Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $u(x) = \sin^n(x)$

Montrer que u est solution de l'équation (E_1).

b) Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

Montrer que f est solution de (E_1) si seulement si $(f-u)$ est solution de (E_2)

3) Déterminer g solution de l'équation (E_1) qui vérifie: $g(0) = 1$ et $g'(0) = -n$

Soit S l'ensemble des fonctions f définies $\mathbb{R}$, et vérifiant :

$(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) - \int_0^x (x-t) f(t)\,dt = x$ (1)

1) On considère l'équation différentielle: $(E): y'' - y = 0$

a) Déterminons la fonction h solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe passe par le point $A\left(\ln 2; \frac{3}{4}\right)$, et admet en A une tangente de coefficient directeur $\frac{5}{4}$.

b) Soit x un élément de $\mathbb{R}$, calculer en utilisant une intégration par parties $I = \int_0^x t(e^t - e^{-t})\,dt$; puis, déduire que $h \in S$.

2) Soit f un élément de S

a) Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = 1 + \int_0^x f(t)\,dt$

b) Montrer que f est solution de l'équation (E)

c) Calculer $f(0)$ et $f'(0)$ puis déduire l'ensemble (S)

Exercice

L'objectif de cet exercice et de montrer qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant deux conditions:

$$\begin{cases} f(0) = -4 & (1) \\ (\forall x \in \mathbb{R}) \ ; \ f(-x) \times f'(x) = 1 & (2) \end{cases}$$

1)On suppose qu'il existe une seule fonction f qui vérifie les deux conditions (1) et (2)

on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(-x)f(x)$

a) Montrer que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

b) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

c) On déduire l'expression de la fonction g

d) Montrer que f est une solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{16}y$.

2) En déduire qu'il existe une seule fonction f qui vérifie les deux conditions (1) et (2)

Exercice

Soit f une fonction numérique qui vérifie les deux cond tions:

f est continue deux fois dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, (1)

$(\forall x \in]0; +\infty[\ ; \ f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ (2)

1) Montrer que: $(\forall x \in]0; +\infty[) \ ; \ x^2 f''(x) + f(x) = 0$

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$, par $g(x) = f(e^x)$

a) Montrer que la fonction g est solution de l'équation différentielle:

$$(E): y'' - y' + y = 0$$

b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E)

3) Déterminer l'ensemble des fonctions définies sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui vérifient les deux conditions (1) et (2).

Solutions

Exercice 1

Résolvons chaque équation différentielle, en considérant la condition initiale.

1) Soit θ un élément de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

On a: $(E_1): \cos\theta y' - 5\sin\theta y = 0 \iff y' = (5\tan\theta)y$

Les solutions de l'équation différentielle (E_1) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $x \mapsto ke^{(5\tan\theta)x}$; où $k \in \mathbb{R}$

Soit f une solution de (E_1), tel que: $f\left(\frac{1}{\tan\theta}\right) = 1$

On a: $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = ke^{5\tan\theta x}$

Donc: $f\left(\frac{1}{\tan\theta}\right) = 1 \iff ke^5 =$

$\iff k = e^{\ldots}$

Ainsi: $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = e^{5(-1+x\tan\theta)}$

2) On a: $(E_2): 2y' + (\ln 9)y = \ln 3 \iff y' = -\ln(3)y + \ln\sqrt{3}$

La solution générale de cette équation différentielle est les fonctions définies sur $\mathbb{R}$; par: $x \mapsto ke^{-\ln 3)x} + \frac{1}{2}$ où $k \in IR$.

Soit f une solution de (E_2) qui vérifie: $f(0) = 1$

On a: $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = ke^{-(\ln 3)x} + \frac{1}{2}$. Donc: $f(0) = 1 \iff k = \frac{1}{2}$

Ainsi: $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = \frac{1}{2}e^{-(\ln 3)x} + \frac{1}{2}$

Et puisque : $(\forall x \in \mathbb{R}); e^{-(\ln 3)x} = (e^{\ln\frac{1}{3}})^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Alors, l'expression de $f(x)$ peut s'écrire : $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^x + 1\right)$

3) On a: $(E_3): y' + \cos x = 1 + \sin x \iff y' = 1 + \sin x - \cos x$

Et puisque la fonction $x \mapsto x - \cos x - \sin x$ est une primitive $x \mapsto 1 + \sin x - \cos x$ Alors, les solutions de l'équation différentielle (E_3) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $x \mapsto x - \cos x - \sin x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Soit f une solutions de (E_3) vérifiant $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}$

On a: $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = x - \cos x - \sin x + k$

D'où: $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} \iff -\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + k = -\frac{\pi}{6}$

$$\iff k = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Donc: $(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) = x - \cos x - \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}$ 1

4) Résolvons l'équation $(E_4): x^2 y' = 1 - y'$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$

On a: $x^2 y = 1 - y' \iff (1 + x^2) y' = 1$

$$\iff y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

Et puisque la fonction: $Arc\tan$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, alors les solutions de l'équation différentielle (E_4) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $x \mapsto Arc\tan x + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

• Soit f une solution de l'équation différentielle, (E_4) et qui vérifie $f(1) = -\frac{\pi}{4}$

On a: $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = Arc\tan x + k$

D'où: $f(1) = -\frac{\pi}{4} \iff Arc\tan(1) + k = -\frac{\pi}{4}$

$$\iff k = -\frac{\pi}{2}$$

Ainsi: $(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) = Arc\tan x - \frac{\pi}{2}$

Exercice 2.

1) Résolvons l'équation: $(F_1). 2y'' - 3y' + y = 0$ avec $y(0) = -2$ et $y'(0) = 0$

On a: $2y'' - 3y' + y = 0 \iff y'' - \frac{3}{2}y' + \frac{1}{2}y = 0$

Son équation caractéristique est:

$r - \frac{3}{2}r + \frac{1}{2} = 0$, son discriminant est $\Delta = \frac{1}{4}$ et ses solutions sont 1 et $\frac{1}{2}$

Donc: les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions $x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{\frac{1}{2}x}$; avec α et β de $\mathbb{R}$

Déterminons la so ution g qui vérifie: $g(0) = -2$ et $g'(0) = 0$

On a: $g(x) = \alpha e^x + \beta e^{\frac{1}{2}x}$ et $g'(x) = \alpha e^x + \frac{1}{2}\beta e^{\frac{1}{2}x}$

Ainsi: $g(0) = -2 \Rightarrow \alpha + \beta = -2$

Et $g'(0) = 0 \Rightarrow \alpha + \frac{1}{2}\beta = 0$

On a: le système $\begin{cases} \alpha + \beta = -2 \\ \alpha + \frac{1}{2}\beta = 0 \end{cases}$ on trouve $\alpha = 2$ et $\beta = -4$

Donc: $(\forall x \in \mathbb{R}); g(x) = 2e^{x} - 4e^{\frac{1}{2}x}$

2)Résolvons l'équation différentielle: $(E_2): y'' - y' + y = 0$; vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

L'équation caractéristique de l'équation (E_2) est $r^2 - r + 1 = 0$; son discriminant $\Delta = -3$ et ses solutions complexes sont: $r_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ on prend $p = \frac{1}{2}$ et $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc: les solutions de l'équation différentielles (E_2) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par:

$x \mapsto \left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{\frac{1}{2}x}$; avec α et β deux réels.

Déterminons la solution g qui vérifie $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$

On a: $g(x) = \left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{\frac{1}{2}x}$

Donc:

$g'(x) \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)e^{\frac{1}{2}x} + \left(\frac{1}{2}\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{2}\beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{\frac{1}{2}x}$

D'où: $\begin{cases} g(0) = 0 \\ g'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\beta + \frac{1}{2}\alpha = 1 \end{cases}$

Ainsi: $\alpha = 0 \quad \beta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Par conséquent: $(\forall x \in \mathbb{R}); g(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x}$

3) Résolvons l'équation: $(E_3): 3y'' + 2\sqrt{3}y' + y = 0$

On a: $3y'' + 2\sqrt{3}y' + y = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{2\sqrt{3}}{3}y' + \frac{1}{3}y = 0$

L'équation caractéristique de cette équation différentielle est:

$r^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}r + \frac{1}{3} = 0$ son discriminant $\Delta = 0$ et sa solution est $r = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Donc les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions définies par:

$x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}x}$; où α et β sont les réels.

• Déterminons la solution qui vérifie : $g(0) = 1$ et $g'(0) = 1$

On a: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g(x) = (\alpha x + \beta)e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}x}$

Ainsi: $g'(x) = \alpha e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}x} - \frac{\sqrt{3}}{3}(\alpha x + \beta)e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}x}$

Donc: $\begin{cases} g(0) = -1 \\ g'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha - \frac{\sqrt{3}}{3}\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

Par conséquent: $(\forall x \in \mathbb{R}); g(x) = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}x - 1\right)e^{\frac{\sqrt{3}}{3}x}$

4) Résolvons l'équation: $(E_4): \sqrt{2}y'' + 2y' = 0$

On a: $\sqrt{2}y'' + 2y' = 0 \Leftrightarrow y'' + \sqrt{2}y' = 0$

Méthode 1:

L'équation caractéristique de cette équation est $r^2 + \sqrt{2}r - 0$; et ses solutions sont: $r = 0$ et $r_2 = -\sqrt{2}$ Ainsi les solutions de l'équation différentielle (E_4) sont les fonctions définies par: $x \mapsto \alpha + \beta e^{\sqrt{2}x}$; avec α et β de $\mathbb{R}$

Méthode 2: On a: $(E_4) \Leftrightarrow y'' + \sqrt{2}y' = 0$

$\Leftrightarrow (y' + \sqrt{2}y)' = 0$

$\Leftrightarrow y' + \sqrt{2}y = b \quad ; \quad b \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y' = -\sqrt{2}y + b \quad ; \quad b \in \mathbb{R}$

Donc les solutions de l'équation différentielle (E_4) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par:

$x \mapsto ke^{-\sqrt{2}x} + \frac{b\sqrt{2}}{2} \quad (k;b) \in \mathbb{R}^2$.

5) Réso vons l'équation différentielles: $(E_5): -2y'' + 3y = 0$

On a: $-y'' + 3y = 0 \Leftrightarrow y'' - \frac{3}{2}y = 0$

Son équation caractéristique est: $r^2 - \frac{3}{2} = 0$ et ses solutions sont: $r_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}$ et $r_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

Donc les solutions de équation différentielle (E_5) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $x \mapsto \alpha e^{-\frac{\sqrt{6}}{2}x} + \beta e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x}$; avec: $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

6) Résolvons l'équation $(E_6): y'' = 0$

Méthode 1: $y'' = 0 \Leftrightarrow y'' + 0y' + 0y = 0$

Son équation caractéristique est: $r^2 = 0$, et sa solution est $r = 0$

Donc: les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par:

$x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{ax}$ c'est à dire $x \mapsto \alpha x + \beta$ avec $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

Méthode 2:

On a: $y'' = 0 \Longleftrightarrow y' = a; a \in \mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow y = ax + b \ ; \ (a;b) \in \mathbb{R}^2$

Donc les solutions de l'équation (E_6) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ax + b$ où $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ (fonctions affines)

7) Résolvons l'équation différentielle $(E_7): y'' - e^x + 1 = x - \sin x$

On a: $y'' - e^x + 1 = x - \sin x \Longleftrightarrow y'' = -1 + x + e^{-x} - \sin x$

$\Longleftrightarrow y' = -x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} + \cos x + b; b \in \mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + e^{-x} + \sin x + bx + c; (b;c) \in \mathbb{R}^2$

Donc les solutions de l'équations différentielles sont les fonctions définies par:

$x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + e^{-x} - \sin x + bx + c$ avec $(b;c) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3

Résolvons l'équation différentielle. $(E_1): (m-1)y' + my - m$

- Si $m = 1$, alors: l'équation (E_1) devient $y = 1$, donc la solution de l'équation (E_1) est la fonction constante définie par: $x \mapsto 1$
- Si $m \neq 1$ alors: $(E_1) \Leftrightarrow y' = -\frac{m}{m-1}y + \frac{m}{m-1}$

Donc : les solutions de l'équation différentielle (E_1) sont les fonctions:

$x \mapsto ke^{\frac{m}{1-m}x} + 1$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un paramètre réel.

- Résolvons l'équation différentielle $(E_1): m(y' + my) + 3(y' - 3y) + 2 - m$

On a: $(E_2) \Longleftrightarrow (m+3)y' + (m^2 - 9)y = m - 2$

- Si $m = -3$ alors, l'équation (E_2) devient $0y = -5$, ce qui est impossible

Donc : l'équation (E_2), n'a pas de solutions

- Si $m \neq -3$, alors : (E_2) $y' = (3-m)y + \frac{m-2}{m+3}$

Donc : les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$:

par: $x \mapsto ke^{3-m} + \frac{2-m}{9-m^2}$

- Résolvons l'équation différentielle (E_3): $\frac{1}{4}my'' + (m+2)y' + (m+1)y = 0$

• Si $m = 0$ alors: $(E_3) \Leftrightarrow 2y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{2}y$

Donc les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ke^{-\frac{x}{2}}$; $k \in \mathbb{R}$

• Si $m \neq 0$, alors (E_3) . $y'' + \frac{4(m+2)}{m}y' + \frac{4(m+1)}{m}y = 0$

L'équation caractéristique associée à (E_3) est:

$r^2 + \frac{4(m+2)}{m}r + \frac{4(m+1)}{m} = 0$ (F) ; son discriminant est $\Delta = \frac{16(3m+4)}{m^2}$

Etudions le signe de Δ :

m	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		0		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$		$+$	

• Si $m = -\frac{4}{3}$, alors $\Delta = 0$ et l'équation caractéristique (F) admet $r = 1$ comme solution

Donc, les solutions de (E_3) sont les fonctions: $x \mapsto (\alpha x + \beta)e^x$ où α et β de $\mathbb{R}$

• Si $m \in \left]-\frac{4}{3}; 0\right[\cup]0; +\infty[$ alors, l'équation (F) admet deux solutions réelles

$r_1 = -2\left(1 + \frac{2}{m}\right) + 2\sqrt{\frac{3}{m} + \frac{4}{m^2}}$ et $r_2 = -2\left(1 + \frac{2}{m}\right) - 2\sqrt{\frac{3}{m} + \frac{4}{m^2}}$

Donc les solutions de (E_3) sont les fonctions $x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ où α et β des réels,

• Si $m \in \left]-\infty; -\frac{4}{3}\right[$, alors l'équation caractéristique (F) admet deux solutions complexes:

$r_1 = -2\left(1 + \frac{2}{m}\right) - 2i\sqrt{-\frac{3}{m} - \frac{4}{m^2}}$ et $r_2 = -2\left(1 + \frac{2}{m}\right) + 2i\sqrt{-\frac{3}{m} - \frac{4}{m^2}}$

Soit $p = \mathcal{R}e(r_2)$ et $q = \mathrm{Im}(r_2)$

Donc, les solutions de l'équation (E_3) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par:

$x \mapsto \left[\alpha \cos\left(2x\sqrt{-\frac{3}{m} - \frac{4}{m^2}}\right) + \beta \sin\left(2x\sqrt{-\frac{3}{m} - \frac{4}{m^2}}\right)\right]e^{-2\left(1+\frac{2}{m}\right)x}$ avec α et β des $\mathbb{R}$

- Résolvons l'équation différentielle:

$(E_4): (m-2)^2 y'' + (m-1)(m-2)y' + y = 0$

• Si $m = 2$, alors l'équation: (E_4) devient: $y = 0$

Donc: la solution de l'équation (E_4) est la fonction nulle: $x \mapsto 0$.

• Si $m \neq 2$, alors l'équation (E_4) est équivaut à:

$y'' + \frac{m-1}{m-2}y' + \frac{1}{(m-2)^2}y = 0$

Son équation caractéristique est: (F') : $r^2 + \frac{m-1}{m-2}r + \frac{1}{(m-2)^2} = 0$

Son discriminant est: $\Delta = \frac{(m-3)(m+1)}{(m-2)^2}$

Le signe de Δ est comme su t:

m	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

• S $m \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$, alors l'équation (F') admet deux solutions réelles:

$r_1 = \frac{1-m}{2(m-2)} - \frac{\sqrt{(m-3)(m+1)}}{2|m-2|}$ et $r_2 = \frac{1-m}{2(m-2)} + \frac{\sqrt{(m-3)(m+1)}}{2|m-2|}$

Ainsi, les solutions de l'équation différentielle (E_4) sont les fonctions

$x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ où α et β sont des réels

• Si $m \in \{-1; 3\}$, alors l'équation caractéristique (F') admet une seul solution réelle $r = \frac{1-m}{2(m-2)}$

(On a: $m = -1 \Rightarrow r = -\frac{1}{3}$ et $m = 3 \Rightarrow r = -1$)

• Si $m = -1$, alors : les solutions de l'équation différentielle (E_4) sont les fonctions $x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{-\frac{1}{3}x}$, avec $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

• Si $m = 3$, alors: les solutions de l'équation différentielle (E_4) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{-x}$; où $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

• Si $m \in]-1; 3[- \{2\}$, alors l'équation (F') admet deux solutions complexes conjuguées

$r_1 = \frac{1-m}{2(m-2)} - i\frac{\sqrt{(-m+3)(m+1)}}{2|m-2|}$ et $r_2 = \frac{1-m}{2(m-2)} + i\frac{\sqrt{(-m+3)(m+1)}}{2|m-2|}$

Ainsi : les solutions de l'équation d fférentielle (E_4) sont les fonctions:

$x \mapsto \left[\alpha \cos\left(\frac{\sqrt{(-m+3)(m+1)}}{2|m-2|}x\right) + \beta \sin\left(\frac{\sqrt{(-m+3)(m+1)}}{2|m-2|}x\right)\right] e^{\frac{1-m}{2(m-2)}x}$

avec α et β sont deux réels.

Exercice 4

1) Déterminons les solutions de l'équation différentielle (E_1)

On a: $y' - y = 0 \iff y' = y$

Donc: les solutions de l'équation différentielle (E_1) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $x \mapsto ke^x$; où $k \in \mathbb{R}$

2) Déterminons a et b tels que g est solution de (E)

Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$; on a: $(\forall x \in \mathbb{R}); g'(x) = -a\sin x + b\cos x$

(g est solution de (E_1)) $\iff (\forall x \in \mathbb{R}); g'(x) - g(x) = 4\cos x$

$$\iff (\forall x \in \mathbb{R}), (b+a)\cos x + (b-a)\sin x = 4\cos x$$

• Pour : $x = 0$, on a: $b + a = 4$

• Pour : $x = \frac{\pi}{2}$, on a: $b - a = 0$

Donc: $a = b - 2$

Par suite: $(\forall x \in \mathbb{R}); g(x) = 2\cos x + 2\sin x$

3) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

$$[(f-g) \text{ est solution de } (E_2)] \iff (f-g)' - (f-g) = 0$$
$$\iff f - g' - f + g = 0$$
$$\iff f' - f = g' - g$$
$$\iff f' - f = 4\cos x$$
$$\iff f \text{ est solution de} (E_1)$$

Donc: [$(f-g)$ est solution de (E_2)] $\iff$ [f est solutions de (E_1)]

4) Déterminons le solution générale de l'équation (E_1)

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$

On a: [$(f-g)$ est solution de (E_2)] $\iff$ [f est so ution de (E_1)]

$\iff f - g = ke^x$; $k \in \mathbb{R}$

$\iff f = g + ke^x$; $k \in \mathbb{R}$

Donc : la solution générale de l'équation différentielle (E_1) est ;

$f: x \mapsto 2\cos x + 2\sin x + ke^x$; où k est un réel.

De façon générale: (La solution générale de l'équation $y' + ay = f(x)$) = la solution générale de l'équation $y' + ay = 0$) + (une solution particulière de l'équation: $y' + ay = f(x)$)

Exercice 5

1) Déterm nons une équation différentielle vérifieé par z.

On a: $z = y - x$; donc $y = z + x$

On a: $y' + y = x + 1 \iff (z + x)' + (z + x) = x + 1$

$\iff z' + 1 + z + x = x + 1$

$\iff z' + z = 0$

Donc z vérifie l'équation différentielle : $(E_2): y' + y = 0$

2) Résolvons l'équation (E_2)

On a: $y' + y = 0 \iff y' = -y$

Donc les solutions de (E_2) sont les fonctions. $x \mapsto ke^{-x}$, où $k \in \mathbb{R}$

-Résolvons (E_1)

On a: $y' + y = x + 1 \iff z' = z$

$\iff z = ke^{x}$; $k \in \mathbb{R}$

$\iff y - x = ke^{x}$; $k \in \mathbb{R}$

$\iff y = x + ke^{x}$; $k \in \mathbb{R}$

Donc, les solutions de l'équation d fférentielle (E_1) sont les fonctions définies su

$\mathbb{R}$ par: $x \mapsto x + ke^{-x}$; où $k \in \mathbb{R}$

3) Déterminons la solution f

f est solution de l'équation (E_1) donc: $(\exists k \in \mathbb{R}); (\forall x \in \mathbb{R}); f(x) \quad x + ke^{x}$

Et puisque: $f(0) = 1$; alors $k - 1$; d'où $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = x + e^{x}$

Exercice 6

1) Déterminons une fonction polynôme du second degré (trinôme) qui vérifie l'équation (E_1)

Soit g un trinôme, donc :

$(\exists (a;b;c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$; $(\forall x \in \mathbb{R})$: $g(x) = ax^2 + bx + c$

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a: $g'(x) = 2ax + b$ et $g''(x) = 2a$

On a:

g est solution de $(E_1) \iff (\forall x \in \mathbb{R})$; $g'' + 2g' + g = x^2 + 2x - 2$

$\iff (\forall x \in \mathbb{R})$; $2a + 2(2ax + b) + ax^2 + bx + c = x^2 + 2x - 2$

$\iff (\forall x \in \mathbb{R})$; $ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b + c = x^2 + 2x - 2$

$\iff \begin{cases} a = 1 \\ 4a + b = 2 \\ 2a + 2b + c = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow c = 0$ et $b = -2$ et $\Leftrightarrow a = 1$

Donc: $g: x \mapsto x^2 - 2x$ est solutions de l'équation (E_1).

2) a) Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

Montrons que f est solution de (E_1) si et seulement si $(f - g)$ est solution de (E_0)

On a. $((f-g)$ est solution de $(E_0) \hookrightarrow (f-g)'' + 2(f-g)' + (f-g) \quad 0$

$\Leftrightarrow f'' \quad g'' + 2f' \quad 2g' + f \quad g = 0$

$\Leftrightarrow f'' + 2f' + f = g'' + 2g' + g$

$\Leftrightarrow f'' + 2f' + f = x^2 + 2x - 2$

car g est solution de $(E_1))$

Donc f solution de (E_1) si et seulement si $(f - g)$ est solution de (E_0).

b) Résolvons l'équation différentielle $(E_0): y'' + 2y' + y - 0$

Son équation caractéristique est : $r^2 + 2r + 1 = 0$

On a: $r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow r = -1$

Donc, les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont les fonctions $x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{-x}$ où $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$.

c) Déduisons la solution générale de l'équation différentielle (E_1).

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

On a. $(f-g)$ et solutions de $(E_0) \Leftrightarrow (f$ est solutions de $(E_1))$

$\Leftrightarrow f - g = (\alpha x + \beta)e^{-x}$

$\Leftrightarrow f = g + (\alpha x + \beta)e^{-x}$

Donc, la solution générale de (E_1) est : $f: x \to x^2 - 2x + (\alpha x + \beta)e^{-x}$ avec $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

3) Déterminons la fonctions φ

-La fonction φ est solution de (E_1), donc:

$\exists(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2)$; $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\varphi(x) = x^2 - 2x + (\alpha x + \beta)e^{-x}$

-La droite $(O, \vec{i})$ est la tangente à la φ au point O ; donc: $\varphi(0) - 0$ et $\varphi'(0) = 0$

On a: $\varphi(0) = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$

Et on a: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\varphi'(x) = 2x - 2 + (\alpha - \alpha x - \beta)e^{-x}$

Donc: $\varphi'(0) = 0 \Leftrightarrow \quad 2 + \alpha - \beta = 0$

On a: $\begin{cases}\beta = 0 \\ -2 + \alpha - \beta = 0\end{cases}$; donc: $\beta = 0$ et $\alpha = 2$

Ainsi: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\varphi(x) = x^2 - 2x + 2xe^{-x}$

b) Déterminons la fonctions h

h est solution de l'équation (E_1)

Donc: $(\exists(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2)$; $(\forall x \in \mathbb{R})$; $h(x) = x^2 - 2x + (\alpha x + \beta)e^{-x}$

- On a: $h(0) = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$

- Et, on a: $\int_0^1 h(x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^1 + \int_0^1 (\alpha x + \beta)e^{-x}dx$

Calculons l'intégrale: $I = \int_0^1 (\alpha x + \beta)e^{-x}dx$; en utilisant une intégration par parties.

On pose: $\begin{cases}u = \alpha x + \beta \\ v' = e^{-x}\end{cases}$; donc: $\begin{cases}u' = \alpha \\ v = -e^{-x}\end{cases}$

Les deux fonctions u et v sont dérivable $[0;1]$ et u' et v' sont continues son $[0;1]$ d'après la propriété de l'intégration par parties, on a:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\alpha x + \beta)e^{-x}dx &= \left[-(\alpha x + \beta)e^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -\alpha e^{-x}dx \\ &= -(\alpha + \beta)e^{-1} + \beta - \left[\alpha e^{-x}\right]_0^1 \\ &= \beta - \frac{\alpha + \beta}{e} - \frac{\alpha}{e} + \alpha\end{aligned}$$

Donc: $\int_0^1 h(x)dx = -\frac{2}{3} + \beta - \frac{2\alpha + \beta}{e} + \alpha$

Et puisque: $\int_0^1 h(x)dx = \frac{1}{3} - \frac{2}{e}$ et $\beta = 0$

Alors: $-\frac{2}{3} - \frac{2\alpha}{e} + \alpha = \frac{1}{3} - \frac{2}{e}$

D'où: $\left(\frac{e-2}{e}\right)\alpha = \frac{e-2}{e}$. Ainsi: $\alpha = 1$

Par conséquent: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $h(x) = x^2 - 2x + xe^{-x}$

Exercice 3

1) Vérifions que la fonction g est solution de l'équation différentielle (E_1)

On a: La fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})$;

$g'(x) = -\sin x + \cos x$ et $g''(x) = -\cos x - \sin x$

$g''(x) + 2g'(x) + 2g(x) = -\cos x - \sin x - 2\sin x + 2\cos x + 2\sin x + 2\cos x - 3\cos x - \sin x$

Donc: la fonction g est solution de l'équation différentielle (E_1)

2) Résolvons l'équation différentielle (E_0) : $y'' + 2y' + 2y = 0$

Son l'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 2 = 0$

Le discriminant de cette équation est: $\Delta = -4$ et ses solutions sont $r_1 = -1 + i$ et $r_2 = -1 - i$

Donc, les solutions de l'équation (E_0) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto (\alpha \cos x + \beta \sin x)e^{-x}$; où $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

3) Montrons l'équation demandé soit f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$;

$(f-g)$ est solution $E_2 \iff (f-g)'' + 2(f-g)' + 2(f-g) = 0$

$\iff f'' - g'' + 2f' - 2g' + 2f - 2g = 0$

$\iff f'' + 2f' + 2f = g'' + 2g' + 2g$

$\iff f'' + 2f' + 2f = 3\cos x - \sin x$

$\iff f$ est solution de (E_1)

Donc f est solution de (E_1) si et seulement si $f-g$ est solution de (E_0).

4)a) Déterminons la solution φ

• Déterminons la solution générale de (E_1).

Soit f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

D'après ce qui précède: f est solution de $(E_1) \Leftrightarrow (f-g)$ est solution de (E_1)

$\Leftrightarrow f - g = (\alpha \cos x + \beta \sin x)e^{-x}$; $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

$\Leftrightarrow f = g + (\alpha \cos x + \beta \sin x)e^{-x}$; $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

Donc la solution générale de l'équation (E_1) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par:

$x \mapsto \cos x + \sin x + (\alpha \cos x + \beta \sin x)e^{-x}$ où $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

• Déterminons la solution φ qui vérifie $\varphi(0) = 0$ et $\varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$

φ est solution de (E_1), donc:

$\exists (\alpha;\beta \in \mathbb{R}^2)$; $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\varphi(x) = \cos x + \sin x + (\alpha \cos x + \beta \sin x)e^{-x}$

Puisque: $\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0 \end{cases}$ alors: $\begin{cases} 1 + \alpha = 0 \\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\beta\right)e^{-\frac{3\pi}{4}} = 0 \end{cases}$

Ainsi: $\alpha = -1$ et $\beta = -1$ Donc: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\varphi(x) = (\cos x + \sin x)(1 - e^{-x})$

b) Montrons que: $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $|\varphi(x)| \leq 2\sqrt{2}$

On a: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\varphi(x) = (\cos x + \sin x)(1 - e^{-x})$

Donc: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $|\varphi(x)| = |\cos x + \sin x| \times |1 - e^{-x}|$

Et puisque: $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$

$= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Alors: $|\cos x + \sin x| = \sqrt{2}\left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$

Et puisque $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| \leq 1$

$(\forall x \in \mathbb{R})$; $|\cos x + \sin x| \leq \sqrt{2}$ (1)

Si : $x \geq 0$, alors: $-x \leq 0$ d'où $e^{-x} \leq 1$

Et on a: $|1 - e^{-x}| < 1 + e^{-x}$, donc: $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $|1 - e^{-x}| \leq 2$ (2)

D'après (1) et (2), on en déduit que: $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $|\varphi(x)| < 2\sqrt{2}$

1) Résolvons l'équation différentielle (E_0)

On a: $y' - 2y = 0 \iff y' = 2y$

Donc, les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont les fonctions définés sur

par $\mathbb{R} : x \mapsto ke^{2x}$ $k \in \mathbb{R}$.

Soit φ une solution de (E_0) dont la courbe passe par le point $A(0;1)$.

On a: $(\exists k \in \mathbb{R})$; $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\varphi(x) = ke^{2x}$

Donc: $A(0;1) \in (C_f) \iff \varphi(0) = 1$

$\iff k = 1$

D'où: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\varphi(x) = e^{2x}$

2) a) Calculons $f'(x)$

On a: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) = e^{2x}g(x)$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto e^{2x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc

la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit de deux fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$)

On a: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = 2e^{2x}g(x) + e^{2x}g'(x)$

b) (f est solution de (E_1)) $\iff f' - 2f = \frac{-2}{1 + e^{-2x}}$

$\iff 2e^{2x}g(x) + e^{2x}g'(x) - 2e^{2x}g(x) = \frac{-2}{1 + e^{-2x}}$

$\iff g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

Donc . f est solution de (E_1) si et seulement si: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g'(x) - \frac{-2e^{2x}}{1+e^{2x}}$

c) Déduisons la solution générale de l'équation différentielle (E_1)

On a, d'après la question 2) b): f est solution de (E_1) si est seulement

si $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g'(x) = \frac{-2e^{2x}}{1+e^{2x}}$

Et on a: $(\forall x \in \mathbb{R})$, $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \Leftrightarrow g(x) = \ln|1+e^{-2x}| + k$; $k \in \mathbb{R}$

Et puisque : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) = e^{2x} g(x)$

Alors: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) = e^{2x} \ln|1+e^{-2x}| + ke^{2x}$ $k \in \mathbb{R}$

Conclusion: La solution générale de l'équation différentielle (E_1) est les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par:

$x \mapsto e^{2x}\ln(1+e^{-2x}) + ke^{2x}$; avec $k \in \mathbb{R}$

Exercice 9

1) Déterminons en fonction de n les solutions de l'équation différentielle $(E_1) y'' + n^2 y = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; l'équation $y'' + n^2 y = 0$ est dans la forme $y'' + \omega^2 y = 0$ où $\omega = n$.

Donc les solutions de (E_1) sont les fonctions: $x \mapsto \alpha\cos(nx) + \beta\sin(nx)$ avec $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

2) a) Montrons que la fonction u est solution de (E)

On a. u $x \mapsto \sin^n(x)$; la fonction u est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Et pour tout x de $\mathbb{R}$; $u'(x) = n\sin^{n-1}(x)\cos x$

et $u''(x) = n(n-1)\sin^{n-2}(x).\cos^2 x - n\sin^{n-1}(x)\sin x$

Soit x de $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u'' + n^2 u &= n(n-1)\sin^{n-2}(x)\cos^2 x - n\sin^n(x) + n^2\sin^n(x) \\ &= n(n-1)\sin^{n-2}(x)(1-\sin^2 x) + (n^2-1)\sin^n(x) \\ &= n(n-1)\sin^{n-2}(x) - n(n-1)\sin^n(x) + n(n-1)\sin^n(x) \\ &= n(n-1)\sin^{n-2}(x) \end{aligned}$$

Donc u est solution de l'équation différentielle (E_1)

b) Montrons que f est solution de (E_1) si et seulement si $(f-u)$ est solution de (E_2).

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$; donc $(f-u)$ est deux fo dérivable sur $\mathbb{R}$

On a: $((f-u)$ est solution $(E_2)) \iff (f-u)'' + n^2(f \quad u) = 0$

$\iff f'' - u'' + n^2 f - n^2 u = 0$

(car u est solution de (E_1)) $\iff f'' + n^2 f = u'' + n^2 u$

$\iff f'' + n^2 f = n(n-1)\sin^{n-2}(x)$

$\iff f$ est solution de (E_1)

Donc: f est solution de (E) si et seu ement si $(f-u)$ est solution de $(E_2$

3) Déterminons la solution g

• Déterminons tout d'abord la solution générale de l'équation (E_1)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a: d'après ce qui précède:

(f est solution de $(E_1)) \iff (f-u$ est solution de (E_2)

$\iff f-u = \alpha\cos(nx) + \beta\sin(nx)\ ;\ (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

$\iff f = u + \alpha\cos(nx) + \beta\sin(nx)\ ;\ (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

$\iff f = \sin^n(x) + \alpha\cos(nx) + \beta\sin(nx)\ ;\ (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

Donc: la solution général de l'équation différentielle (E) sont les fonctions;

$x \mapsto \sin^n(x) + \alpha\cos(nx) + \beta\sin(nx)$; où $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

La fonction g est solution de (E_1) ; donc:

$(\exists(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2)\ ;\ (\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ g(x) - \sin^n(x) + \alpha\cos(nx) + \beta\sin(nx)$

D'où: $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ g'(x) \quad n\sin^{n-1}(x)\cos x - n\alpha\sin(nx) + n\beta\cos(nx)$

Et puisque: $\begin{cases} g(0) = 1 \\ g'(0) = -n \end{cases}$; alors: $\begin{cases} \alpha = 1 \\ n\beta = -n \end{cases}$

Ainsi: $\alpha = 1$ et $\beta = -1$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ g(x) = \sin^n(x) + \cos(nx) - \sin(nx)$

Exercice 10

1) a) Déterminons la fonction h

Résolvons l'équation différentielle $(E): y'' - y = 0$

Son équation caractéristique est: $r^2 \quad 1 = 0$, et les solutions sont 1 et 1

Donc, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{-x}$, où $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$.

La fonction h est solution de (E), donc:

$(\exists(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2)$; $(\forall x \in \mathbb{R})$; $h(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$

On a: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $h'(x) = \alpha e^x - \beta e^{-x}$

Et puisque: $A\left(\ln 2; \frac{3}{4}\right)$ est un point de la courbe de h, donc: $h(\ln 2) = \frac{3}{4}$

d'où: $2\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{3}{4}$

Et on a de plus : la tangente à la courbe de h admet en A ; $\frac{5}{4}$ comme coefficient directeur, donc: $h'(\ln 2) = \frac{5}{4}$; ainsi $2\alpha - \frac{1}{2}\beta = \frac{5}{4}$

On a: le système $\begin{cases} 2\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{3}{4} \\ 2\alpha - \frac{1}{2}\beta = \frac{5}{4} \end{cases}$ d'où: $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = -\frac{1}{2}$

Donc: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $h(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$

b) Calculons par parties l'intégrale I

On a: $I = \int_0^x t(e^t - e^{-t})\,dt$

Posons : $\begin{cases} u = t \\ v' = e^t - e^{-t} \end{cases}$; donc: $\begin{cases} u' = 1 \\ v = e^t + e^{-t} \end{cases}$

Les deux fonctions u et v dérivables sur $\mathbb{R}$ et u', v' sont continues sur $\mathbb{R}$ d'après la propriété de l'intégration par parties ; on a:

$I = \int_0^x t(e^t - e^{-t})\,dt = \left[t(e^t + e^{-t})\right]_0^x - \int_0^x (e^t + e^{-t})\,dt$

$= x(e^x + e^{-x}) - \left[e^t - e^{-t}\right]_0^x$

$= x(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})$

Donc: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $I = (x-1)e^x + (x+1)e^{-x}$

• Déduisons que: $h \in S$

On a: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $h(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$

• La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$

• Soit x élément de $\mathbb{R}$;

On a:

$$h(x) - \int_0^x (x-t)h(t)\,dt = h(x) - \int_0^x xh(t)\,dt + \int_0^x th(t)\,dt$$

$$= h(x) - x\int_0^x \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})\,dt + \frac{1}{2}\int_0^x t(e^t - e^{-t})\,dt$$

$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - \frac{1}{2}x[e^t + e^{-t}]_0^x + \frac{1}{2}I$$

$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - \frac{1}{2}x(e^x + e^{-x} - 2) + \frac{1}{2}(x-1)e^x + \frac{1}{2}(x+1)e^{-x}$$

$$- \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}xe^{-x} + x + \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}xe^{-x} + \frac{1}{2}e^{-x}$$

Donc: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $h(x) - \int_0^x (x-t)h(t)\,dt = x$

Ainsi: la fonction h vérifie les deux conditions ; d'où : $h \in S$.

2) a) Montrons que: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = 1 + \int_0^x f(t)\,dt$

Puisque f est un élément de S ; alors: f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Et on a: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) - \int_0^x (x-t)f(t)\,dt = x$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$; on a:

$$f(x) - x\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x tf(t)\,dt - x$$

On pose: $F_1(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ et $F_2(x) = \int_0^x tf(t)\,dt$

Les deux fonctions ; $t \mapsto tf(t)$ et f sont continues sur $\mathbb{R}$;

Donc ; la fonction F_1 est la primitive de f sur $\mathbb{R}$, qui s'annule en 0 ; d'où $(\forall x \in \mathbb{R})$; $F_1'(x) = f(x)$

- La primitive de la fonction $t \mapsto tf(t)$ sur $\mathbb{R}$; qui s'annule en 0

Donc: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $F_2'(x) = xf(x)$

Et puisque. $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) - xF_1(x) + F_2(x) = x$

Alors: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) - F_1(x) - xF_1'(x) + F_2'(x) = 1$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) - F_1(x) - xf(x) + xf(x) = 1$

Par conséquent: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = 1 + \int_0^x f(t)\,dt$

b) Montrons que f est une solution de l'équation différentielle (E)

Soit x un élément de $\mathbb{R}$

On a: $f'(x) = 1 + \int_0^x f(t)\,dt$

D'où $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f'(x) - f(x) = 0$; par conséquent f est une solution de (E)

c) Calculons $f(0)$ et $f'(0)$

Puisque f est un élément de S, alors:

$(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) - \int_0^x (x-t)f(t)dt = x$ d'où : $f(0) = 0$

·On a d'après 2) a) ; $(\forall x \in \mathbb{R})$. $f'(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt$ donc: $f'(0) = 1$

• Déduisons l'ensemble S

·Soit f un élément de S on a d'après 2) b) f est solution de l'équation (E)

D'où . d'après la question 1) « $(\exists(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2)$; $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) = \alpha e^x + \beta e$

Et puisque· $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$, alors: $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$; d'où· $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = -\frac{1}{2}$

Par suite: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$

D'où : $f = h$

Réciproquement la fonction h est un élément S (d'après 1) b))

Conclusion:

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$

$(f \in S) \Leftrightarrow ((\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x})$

Donc · l'ensemble S contient une seu e fonction· $x \mapsto \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$

Exercice 11

1) a) Montrons que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

On suppose que f s'annule sur $\mathbb{R}$; c'est à dire: $(\exists x_0 \in \mathbb{R})$; $f(x_0) = 0$

On pose: $x_1 = -x_0$, donc: $x_0 = -x_1$

Et puisque f vérifie la condition (2); alors: $f(-x_1)f'(x_1) = 1$

C'est à d re: $f(x_0)f'(-x_0) = 1$; d'où $1 = 0$ ce qui est absourde ; donc $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) \neq 0$

b) Calculons $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

La fonction $u: x \mapsto -x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction f est dérivable sur $u(\mathbb{R})$

(car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$).

Donc, la fonction: $v: x \mapsto f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; $(v = fou)$

Par conséquent la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de deux fonctions dérivables $g = v \times f$

-Soit $x \in \mathbb{R}$; on a: $g'(x) = -f'(-x) \times f(x) + f(-x) \times f'(x)$

Et puisque: $g'(x) = -f'(-x).f(x) + f(-x).f'(x)$

Et puisque: $f(-x).f'(x) = 1$ et f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors: $f'(x) = \frac{1}{f(-x)}$

D'où: $f'(-x) = \frac{1}{f(x)}$; ainsi $f'(-x).f(x) = 1$

Remarque: On peut démonter ce résultats : autrement:

$(\forall t \in \mathbb{R})$; $f(t) \times f'(t) = 1$; $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) \times f(-x) = 1$ (en posant $t = -x$)

Donc: $g'(x) = -1 + 1 = 0$ par conséquent: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g'(x) = 0$

c) Déduison l'expression de la fonction g.

On a: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g'(x) = 0$, donc: $(\exists k \in \mathbb{R})$; $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g(x) = k$

Et puisque: $f(0) = -4$; alors: $g(0) = (-4)^2 = 16$;

donc: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g(x) = 16$

d) Montrons f est solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{16}y$:

Soit x un élément de $\mathbb{R}$

On a: $f(-x) \times f(x) = 1$; donc: $f'(x) = \frac{1}{f(-x)}$

Et puisque: $f(-x)f(x) = g(x) = 16$; alors $\frac{1}{f(-x)} = \frac{1}{16}f(x)$

D'où: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = \frac{1}{16}f(x)$

Par conséquent f et solution de l'équation différentielle: $y' = \frac{1}{16}y$

On a: les solutions de l'équation différentielle $(E): y' = \frac{1}{16}y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $x \mapsto ke^{\frac{1}{16}x}$, où $k \in \mathbb{R}$. Et puisque f est une solution de l'équation différentielle (E), d'après 1) d) alors:

$(\exists k \in \mathbb{R})$; $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) = ke^{\frac{1}{16}x}$

On a: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) = 4e^{\frac{1}{16}x}$ et $f(0) = -4$ donc $k = -4$ ainsi la fonction $f: x \mapsto -4e^{\frac{1}{16}x}$ vérifie les deux conditions (1) et (2)

Et toute fonction qui vérifie les deux conditions (1) et (2) est une solution de l'équation (E) qui vérifie $y(0) = -4$

Donc la fonction $f: x \mapsto -4e^{\frac{1}{16}x}$ est la seule fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie les deux contions (1) et (2)

Exercice 12

1) Montrons que: $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ;\ x^2f''(x)+f(x)=0$

Soit x un élément de $]0;+\infty[$

On a: $f'(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$, d'où: $f''(x)=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$

Et puisque: $f'\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)=f(x)$; alors $f''(x)=-\frac{1}{x^2}f(x)$

Ainsi: $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ;\ x^2f''(x)+f(x)=0$

2) a) Montrons que la fonction g est solution de l'équation (E)

On a: $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ g(x)=f(e^x)$; donc $g=fo\exp$

- La fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$; car la fonction exp est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et f est dérivable sur $\exp(\mathbb{R})$ (car $\exp(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$).

- Soit x un élément de $\mathbb{R}$

On a: $g'(x)=e^xf'(e^x)$ et $g''(x)=e^xf'(e^x)+e^{2x}f''(e^x)$

$$\begin{aligned} g''(x)\quad g'(x)+g(x) &= e^xf'(e^x)+e^{2x}f''(e^x)-e^xf'(e^x)+f(e^x)\\ &= (e^x)^2f''(e^x)+f(e^x) \qquad (\text{car } x^2f''(x)=-f(x))\\ &= -f(e^x)+f(e^x)\\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc:

Ainsi: $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ g''(x)-g'(x)+g(x)=0$

Par conséquent g est solution de l'équation différentielle: $(E): y''-y'+y=0$

b) Déterminons l'ensemble des solutions de l'équation: (E)

L'équation caractéristique de l'équation (E) est : $r^2-r+1=0$

Son discriminant est: $\Delta=-3$ et ses solutions sont: $r_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

et $r_2=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

Donc les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par:

$x\mapsto\left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{\frac{x}{2}}$ avec $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

3) Déterminons l'ensemble des fonctions qui vérifient (1) et (2)

Soit f une fonction (1) et (2)

D'après la question 2) a) la fonction $g: x \mapsto f(e^x)$ est une solution de l'équation différentielle (E)

Donc: $(\exists(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2)$, $\forall(x \in \mathbb{R}\ ;\ f(e^x) = \left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{\frac{x}{2}}$

On pose $t = e^x$; donc $x = \ln t$ et $e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{t}$

D'où:$(\exists(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2)$; $(\forall t \in]0,+\infty[)$, $f(t) = \left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln t\right) + \beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln t\right)\right)\sqrt{t}$

Réciproquement, est ce que toute fonction de la forme

$x \mapsto \left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + \beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)\sqrt{x}$; où $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ vérifie les deux conditions (1) et (2)

Soit α et β deux réels.

On pose: $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$, $f(x) = \left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + \beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)\sqrt{x}$

• La fonction f est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ (à vérifier)

Soit x un élément de $]0,+\infty[$; on a:

$$f'(x) = \left(-\alpha\frac{\sqrt{3}}{2x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + \beta\frac{\sqrt{3}}{2x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)\sqrt{x} + \left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + \beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{x}\left[\frac{1}{2}(\sqrt{3}\alpha + \beta)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + \frac{1}{2}(\sqrt{3}\beta + \alpha)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right]$$

Et on a: $f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$= \left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) - \beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)\frac{\sqrt{x}}{x}$$

Pour $x = 1$; on a $\ln 1 = 0$; $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$

Donc: $f'(1) = f(1) \iff \frac{1}{2}(\sqrt{3}\beta + \alpha) = \alpha$

$$\iff \alpha = \sqrt{3}\beta$$

Et dans ce cas: $f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}\left[-\beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + \sqrt{3}\beta\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right]$

Et: $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sqrt{x}}{x}\left[\sqrt{3}\beta\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) - \beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right]$

D'où: $(\forall x \in]0,+\infty[)$, $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$; ainsi, la fonction f vérifie les deux conditions (1) et (2) dans le cas où $\alpha = \sqrt{3}\beta$

Et résumé: Les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ et qui vérifient les deux conditions (1) et (2) sont les fonctions définies par:

$x \mapsto \beta\left[\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}\ln\sqrt{x}) + \sin(\sqrt{3}\ln\sqrt{x})\right]\sqrt{x}$ où $\beta \in \mathbb{R}$.

4 Structures algébriques

Résumé

I Lois de composition interne

1) Définition et propriétés

Définition:

Soit E un ensemble non vide:

Toute application définie de $E \times E$ vers E est appelée loi de composition interne sur E.

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$

a) Commutativité:

On dit que la loi $*$ est commutative si:

$$(\forall (x;y) \in E^2) \ ; \ x * y = y * x$$

b) Associativité:

On dit que la loi $*$ est associative si:

$$(\forall (x;y;z) \in E^3) \ ; \ x * (y * z) = (x * y) * z$$

c) Élement neutre:

On dit qu'un élément e de E est un élément neutre de $(E;*)$ si;

$(\forall x \in E) \ ; \ x * e = x$ et $e * x = x$

Si a loi $*$ admet un élément neutre dans E alors cet élément est unique.

d) Éléments symétrisables

On suppose que la loi $*$ admet un élément neutre e dans E.

On dit qu'un élément x est symétrisable dans $(E;*)$ s'il existe un élément x' de E tel que: $x * x' = e$ et $x' * x = e$

x' est appelé le symétrique de x dans $(E;*)$

Propriétés:

- Si la loi $*$ est associative et si un élément de E est symétrisable dans $(E;*)$ alors son symétrique est unique.
- Si x et y sont deux éléments symétrisables dans $(E;*)$ alors $x * y$ est

symétrisable et on a: $(x*y)'=y'*x'$

3) Élément régulier

Définition:

On dit qu'un élément a de E est un élément régul er dans $(E;*)$ si:

$(\forall(x;y)\in E^2)\ ;\ \begin{cases} a*x=a*y\Rightarrow x=y \\ x*a=y*a\Rightarrow x=y \end{cases}$

4) Partie stable

Définit on:

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$ et S une partie de $E;(S\subset E)$

On dit que S est une partie stable de $(E;*)$ si: $(\forall(x;y)\in S^2)\ ;\ x*y\in S$

Exercices d'application

Exercice 1

On considère la loi de composition interne $*$ définie sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ par

$\forall(x;y)\in\mathbb{Z}^2\ ;\ x*y=xy(x+y)$

1) Montrer que la loi $*$ est commutative

2) a) Calculer: $1*((-1)*2)$ et $(1*(-1))*2$

b) La loi $*$ est-elle associative?

3) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, l'équation : $x*1=0$

Exercice 2

On considère la loi de composition interne $*$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par:

$\forall(a;b)\in(\mathbb{R}^{+2})\ ;\ a*b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

1) a) Calculer $(1*4)*9$ et $1*(4*9)$

b) La loi $*$ est-elle associative?

2) Montrer que la loi $*$ est commutative

3) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre

4) Déterminer les éléments symétrisables dans $(\mathbb{R}^+;*)$

On considère la loi de composition interne définie $*$ sur $\mathbb{R}$ par:

$$\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ x*y=xy-2(x+y)+6$$

1) a) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative

b) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre.

2) a) Déterminer les éléments symétrisables dans $(\mathbb{R};*)$

b) On pose: $E=]2;+\infty[$

Montrer que E est une partie stable dans $(\mathbb{R};*)$

On considère la loi de composition interne $*$ définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par:

$$\forall (x;y)\in(\mathbb{R}^{*+})^2\ ;\ x*y=\frac{xy}{x+y}$$

1) Montrer que la loi $*$ est associative

2) La loi $*$ admet-elle un élément neutre ?

3) Déterminer les éléments réguliers dans $(\mathbb{R}^{*+};*)$

Exercice 5

On considère sur l'intervalle $]-1;1[$, la loi T définie par:

$$\forall (x;y)\in(]-1;1[)^2\ ;\ xTy=\frac{x+y}{1+xy}$$

1) Montrer que T est une loi de composition interne dans $]-1;1[$

2) Montrer que T est associative

3) Déterminer l'élément neutre e dans $(]-1;1[;T)$

4) Montrer que tout élément x de $]-1;1[$ admet un symétrique dans $(]-1;1[;T)$

Soit $a\in\mathbb{R}^{*+}$ et $G=]-a;a[$

On considère la loi T définie sur G par: $\forall (x;y)\in G^2\ ;\ xTy=\dfrac{x+y}{1+\dfrac{xy}{a^2}}$

1) Montrer que T est une loi de composition interne dans G

2) Montrer que T est commutative et associative

3) Montrer que T admet un élément neutre.

4) Déterminer les éléments symétrisables dans $(G;T)$

Exercice 7

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ la loi de composition interne $*$ définie par:

$$\forall (z;z') \in \mathbb{C}^2 \ ; \ z * z' = zz' + i(z+z') - (1+i)$$

1) Montrer que la lo $*$ est commutative et associative

2) Déterminer l'élément neutre e de la loi $*$

3) Déterminer les éléments symétrisables dans $(\mathbb{C}; *)$

Exercice 8

On considère dans $\mathbb{R}$ la loi de composition interne T définie par:

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ xTy = axy + b(x+y) + c$$

où a,b et c sont des nombres réels tels que: $ab \neq 0$

1) Déterminer une relation liant les nombres réels a,b et c pour que la loi T so t associative

2) On suppose que la loi T est associative dans $\mathbb{R}$

a) Montrer que la loi T admet un élément neutre e que l'on déterminera en fonction de a et b

b) Soit x un nombre réel.

Étudier l'existence de x' le symétrique de x dans $(\mathbb{R};T)$

Solutions

Exercice 1

1) Montrons que la loi $*$ est commutative

Soit x et y deux éléments de $\mathbb{Z}$, on a:

$x * y = xy(x+y) - yx(y+x) - y * x$ (car l'addition et la multiplication sont commutatives dans $\mathbb{Z}$)

Donc: $(\forall (x;y) \in \mathbb{Z}^2) \ ; \ x * y = y * x$

D'où: la loi $*$ est commutative

2) a) Calculons $1 * ((-1) * 2)$ et $(1 * (-1)) * 2$

On a: $1*((-1)*2)=1*((-1)\times 2((-1)+2))$

$=1*(-2)=-2(1-2)=2$

et $(1*(-1))*2=(1\times(-1)\times(1+(-1)))*2$

$=0*2=0$

b)$*$ est-elle associative?

D'après la question précédente, on a: $1*((-1)*2)\neq(1*(-1))*2$

cela signifie que la loi $*$ n'est pas associative.

3) Résolvons dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ l'équation: $x*1=0$

Soit x un élément de $\mathbb{Z}$, on a: $x*1=0 \Leftrightarrow x(x+1)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=-1$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est: $S=\{0;-1\}$

1) a) Calculons $(1*4)*9$ et $1*(4*9)$

on a: $(1*4)*9=(\sqrt{1}-\sqrt{4})^2*9=1*9=(\sqrt{1}-\sqrt{9})^2=4$

et $1*(4*9)=1*(\sqrt{4}-\sqrt{9})^2=1*1=0$

b) $*$ est-elle associative?

D'après la question précédente , on a: $(1*4)*9\neq 1*(4*9)$, donc la loi $*$ n'est pas associative.

2) Montrons que la loi $*$ est commutative.

Soit a et b deux éléments de $\mathbb{R}^*$, on a:

$a*b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2=b*a$ (car $\forall X\in\mathbb{R};X^2=(-X)^2$)

donc: $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^{*2}$; $a*b=b*a$, d'où la loi $*$ est commutative.

3) Montrons que la loi $*$ admet un élément neutre.

On a la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{R}$ donc e est l'élément neutre dans $(\mathbb{R}^*,*)$ si et seulement si: $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$; $x*e=x$

On a: $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$; $x*e=x\Leftrightarrow(\forall x\in\mathbb{R}^*)$; $(\sqrt{x}-\sqrt{e})^2=x$

$\Leftrightarrow(\forall x\in\mathbb{R}^*);e-2\sqrt{x}\sqrt{e}-0$

$\Leftrightarrow(\forall x\in\mathbb{R}^*);\sqrt{e}(\sqrt{e}-2\sqrt{x})=0$

$\Leftrightarrow e=0$ car la proposition: "$(\forall x\in\mathbb{R}^*)$, $\sqrt{e}-2\sqrt{x}=0$" est fausse

Donc: $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ ;\ x * e = x \Leftrightarrow e = 0$, d'où 0 est l'élément neutre dans $(\mathbb{R}^*; *)$

4) Déterminons les éléments symétrisables dans $(\mathbb{R}^*; *)$

Soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}^*$, tels que y est le symétrique de x dans $(\mathbb{R}^*; *)$ s'il existe,

on a: $x * y = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y}$

$\Leftrightarrow x = y$

Donc tout élément de $\mathbb{R}^*$ admet un symétrique qui est lui même.

1) a) • Montrons que la loi $*$ est commutative

Soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}$, on a:

$x * y = xy - 2(x+y) + 6 = yx - 2(y+x) + 6 = y * x$

(car l'addition et la multiplication sont commutatives dans $\mathbb{R}$).

Donc $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x * y = y * x$, d'où la loi $*$ est commutative

• Montrons que la loi * est associative.

Soit x, y et z des éléments de $\mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (xy - 2(x+y) + 6) * z \\ &= (xy - 2(x+y) + 6)z - 2(xy - 2(x+y) + 6 + z) + 6 \\ &= xyz - 2xz - 2yz + 6z - 2xy + 4x + 4y - 12 - 2z + 6 \\ &= xyz - 2xz - 2yz - 2xy + 4x + 4y + 4z - 6\end{aligned}$$

D'autre part on a:

$$\begin{aligned}x * (y * z) &= x * (yz - 2(y+z) + 6) \\ &= x(yz - 2(y+z) + 6) - 2(x + yz - 2(y+z) + 6) + 6 \\ &= xyz - 2xy - 2xz + 6x - 2x - 2yz + 4y + 4z - 12 + 6 \\ &= xyz - 2xy - 2xz - 2yz + 4x + 4y + 4z - 6\end{aligned}$$

Donc: $\forall (x;y;z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ (x * y) * z = x * (y * z)$

D'où la loi $*$ est associative.

b) Montrons que la loi $*$ admet un élément neutre.

La loi * est commutative donc e est l'élément neutre dans $(\mathbb{R};*)$

si et seulement si: $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ x*e=x$

On a: $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ x*e=x \Leftrightarrow (\forall x\in\mathbb{R});xe-2(x+e)+6=x$

$$\Leftrightarrow (\forall x\in\mathbb{R});(e-3)x+6-2e=0$$
$$\Leftrightarrow (\forall x\in\mathbb{R});(e-3)(x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow e=3\ ou\ (\forall x\in\mathbb{R});x-2=0$$

Puisque la proposition: "$(\forall x\in\mathbb{R});x-2=0)$" est fausse alors $e=3$

Donc 3 est l'élément neutre dans $(\mathbb{R};*)$

2) a) Déterminons les éléments symétrisables dans $(\mathbb{R};*)$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$ et x' son symétrique (s'il existe) dans $(\mathbb{R};*)$,

on a: $x*x'=3 \Leftrightarrow xx'-2(x+x')+6=3$

$$\Leftrightarrow x'(x\quad 2)-2x-3$$

- Si $x\neq 2$ alors: $x*x'=3 \Leftrightarrow x'-\dfrac{2x-3}{x-2}$

Puisque $*$ est commutative alors $x'*x=3 \Leftrightarrow x'=\dfrac{2x-3}{x\quad 2}$

- Si $x=2$ alors x' n'existe pas.

Donc tout élément x de $\mathbb{R}-\{2\}$ admet un symétrique x' dans $(\mathbb{R};*)$

qui est: $\dfrac{2x-3}{x-2}$

b) Montrons que la partie E est stable dans $(\mathbb{R};*)$

Soit x et y deux élément S de $]2;+\infty[$, on a:

$$(x*y)-2=xy-2(x+y)+4=xy-2x-2y+4$$
$$=x(y-2)-2(y-2)=(x-2)(y-2)$$

On a: $\begin{cases}x\in]2;+\infty[\\ y\in]2;+\infty[\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-2>0\\ y-2>0\end{cases}$

$$\Rightarrow (x-2)(y-2)>0$$
$$\Rightarrow (x*y)-2>0$$
$$\Rightarrow x*y\in]2;+\infty[$$

Donc : $\forall(x;y)\in E^2\ ;\ x*y\in E$, d'où E est une partie stable de $(\mathbb{R};*)$

1) Montrons que la loi $*$ est associative

Soit x, y et z des éléments de $\mathbb{R}^{*+}$, on a:

$$(x*y)*z=\left(\frac{xy}{x+y}\right)*z=\frac{\frac{xyz}{x+y}}{\frac{xy}{x+y}+z}=\frac{xyz}{xy+xz+yz}$$

et $x*(y*z)=x*\left(\frac{yz}{y+z}\right)=\frac{\frac{xyz}{y+z}}{\frac{yz}{y+z}+x}=\frac{xyz}{yz+xy+xz}$

donc: $(x*y)*z=x*(y*z)$

d'où $\forall(x;y;z)\in(\mathbb{R}^{*+})^3\ ;\ (x*y)*z=x*(y*z)$

Par suite la loi $*$ est associative

2) Cherchons si la loi $*$ admet un élément neutre e

Si la loi $*$ admet un élément neutre e dans $(\mathbb{R}^{*+};*)$ alors on doit avoir: $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+})\ ;\ x*e=x$ (Remarquer que la loi * est commutative).

On a: $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+})\ ;\ x*e=x\Leftrightarrow(\forall x\in\mathbb{R}^{*+})\ ;\ \frac{ex}{e+x}=x$

$\Leftrightarrow(\forall x\in\mathbb{R}^{*+})\ ;\ ex=ex+x^2$

$\Leftrightarrow(\forall x\in\mathbb{R}^{*+})\ ;\ x=0$

Puisque la dernière proposition est fausse , alors la loi * n'admet pas d'élément neutre dans $\mathbb{R}^{*+}$.

3) Déterminons les éléments réguliers dans $(\mathbb{R}^{*+};*)$

Soit a un élément de $\mathbb{R}^{*+}$

On suppose que: $(\forall x;y\in\mathbb{R}^{*+})\ ;\ a*x=a*y$, alors on a:

$$a*x=a*y\Leftrightarrow\frac{ax}{a+x}=\frac{ay}{a+y}$$

$\Leftrightarrow x(a+y)=y(a+x)$ (car $a\neq 0$)

$\Leftrightarrow ax=ay$

$\Leftrightarrow x=y$

Donc: $\forall(x;y)\in(\mathbb{R}^{*+})^2\ ;\ a*x=a*y\Rightarrow x=y$ et $x*a=y*a\Rightarrow x=y$ (car la loi $*$ est commutative)

D'où tout élément est régulier dans $(\mathbb{R}^{*+};*)$

Exercice 5

1) Montrons que T est une loi de composition interne dans $]-1;1[$

Soit x et y deux éléments de $]-1;1[$, montrons que: $xTy \in]-1;1[$

On a: $(xTy)-1 = \dfrac{x+y}{1+xy} - 1 = \dfrac{x+y-xy-1}{1+xy} = \dfrac{x(1-y)-(1-y)}{1+xy}$

$$= \frac{(x-1)(1-y)}{1+xy}$$

et $(xTy)+1 = \dfrac{x+y}{1+xy}+1 = \dfrac{x+y+xy+1}{1+xy} = \dfrac{(x+1)(y+1)}{1+xy}$

Puisque $|x|<1$ et $|y|<1$ alors $|xy|<1$ c'est à dire: $-1<xy<1$

donc: $1+xy>0$

On a: $x-1<0$ et $1-y>0$ donc $(x-1)(1-y)<0$

d'où : $\dfrac{(x-1)(1-y)}{1+xy} < 0$ c'est à dire : $(xTy)<1$

On a: $x+1>0$ et $y+1>0$ donc $(x+1)(y+1)>0$

d'où: $\dfrac{(x+1)(y+1)}{1+xy} > 0$ c'est à dire: $(xTy)>-1$

Donc: $\forall (x;y)\in(]-1;1[)^2$; $xTy \in]-1;1[$ signifie que

T est une loi de composition interne dans $]-1;1[$

2) Montrons que la loi T est associative dans $]-1;1[$

Soit x,y et z de $]-1;1[$, on a:

$$xT(yTz) = xT\frac{y+z}{1+yz} = \frac{x+\dfrac{y+z}{1+yz}}{1+x.\dfrac{y+z}{1+yz}} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$

et $(xTy)Tz = \dfrac{x+y}{1+xy}Tz = \dfrac{\dfrac{x+y}{1+xy}+z}{1+z.\dfrac{x+y}{1+xy}} = \dfrac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$

Donc $xT(yTz)=(xTy)Tz$ d'où: $(\forall (x,y,z)\in(]-1;1[)^3)\ (xTy)Tz = xT(yTz)$

Par suite la loi T est associative dans $(]-1;1[;T)$

3) Déterminons e l'élément neutre dans $(]-1;1[;T)$

On remarque que T est commutative dans $]-1;1[$, donc e est l'élément neutre dans $(]-1,1[;T)$ si et seulement si: $(\forall x\in]-1;1[)\ ;\ xTe = x$

On a: $(\forall x \in]-1;1[)\ ;\ xTe = x \Leftrightarrow (\forall x \in]-1;1[); \frac{x+e}{1+xe} = x$

$\Leftrightarrow (\forall x \in]-1;1[)\ ; x + e\ \text{-}\ x + x\ e$

$\Leftrightarrow (\forall x \in]-1;1[)\ ; (x^2-1)e = 0$

$\Leftrightarrow (\forall x \in]-1;1[); x^2 - 1 = 0\ ou\ e = 0$

Puisque la proposition « $(\forall x \in]-1;1[)\ ;\ x^2 - 1 = 0$ » est fausse

alors : $(\forall x \in]-1;1[)\ ;\ xTe = x \Leftrightarrow e = 0$

Donc 0 est l'élément neutre dans $(]-1;1[;T)$

4) Montrons que tout élément de $]-1;1[$ admet un symétrique dans $(]-1;1[;T)$

Soit x et y deux éléments de $]-1;1[$, on a: $xTy = 0 \Leftrightarrow \frac{x+y}{1+xy} = 0$

$\Leftrightarrow x + y = 0$

$\Leftrightarrow y = -x$

D'autre part on a: $-xTx = 0$

Donc tout élément x de $]-1;1[$ admet un symétrique qui est $-x$

dans $(]-1;1[;T)$

1) Montrons que T est une loi de composition interne dans G

On doit montrer que: $(\forall (x;y) \in G^2)\ ;\ xTy \in G$

Soit x et y deux éléments de G, on a:

$$xTy = \frac{x+y}{1+\frac{xy}{a^2}} = \frac{a^2|x+y|}{a^2+xy}$$

$xTy \in G \Leftrightarrow \frac{a^2|x+y|}{a^2+xy} \in]-a;a[$ (car $a \neq 0$)

$\Leftrightarrow \left|\frac{a^2(x+y)}{a^2+xy}\right| < a$

$\Leftrightarrow |a(x+y)| < |a^2+xy|$

$\Leftrightarrow a^2(x^2+2xy+y^2) < a^2\left(a^2+2xy+\frac{x^2y^2}{a^2}\right)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 < a^2+\frac{x^2y^2}{a^2}$

$\Leftrightarrow (x^2-a^2)-\frac{y^2}{a^2}(x^2-a^2) < 0$

$\Leftrightarrow (x^2-a^2)(a^2-y^2) < 0$

Puisque: $x \in]-a;a[$ et $y \in]-a;a[$ alors: $x^2 < a^2$ et $y^2 < a^2$

signifie que la proposition: $(x^2-a^2)(a^2-y^2)<0$ est vraie

donc: $\forall (x;y)\in G^2 \quad xTy\in G$, d'où T est une loi de composition interne dans G

2) • Montrons la loi T est commutative.

Soit x et y deux éléments de G , on a:

$xTy=\dfrac{x+y}{1+\dfrac{xy}{a^2}}=\dfrac{y+x}{1+\dfrac{yx}{a^2}}=yTx$ (car l'addition et la multiplication sont commutatives dans $\mathbb{R}$)

donc $\forall (x;y)\in G^2$; $xTy=yTx$ d'où la lo T est commutative

• Montrons que la loi T est associative

Soit x,y et z des éléments de G , on a:

$$(xTy)Tz \quad \left(\frac{x+y}{1+\frac{xy}{a^2}}\right)Tz-\left(\frac{a^2(x+y)}{a^2+xy}\right)Tz$$

$$=\frac{\frac{a^2(x+y)}{a^2+xy}+z}{1+\frac{(x+y)z}{a^2+xy}}=\frac{a^2(x+y+z)+xyz}{a^2+xy+xz+yz} \qquad (1)$$

D'autre part, on a.

$$xT(yTz)=xT\left(\frac{y+z}{1+\frac{yz}{a^2}}\right)=xT\left(\frac{a^2(y+z)}{a^2+yz}\right)$$

$$=\frac{x+\frac{a^2(y+z)}{a^2+yz}}{1+\frac{x(y+z)}{a^2+yz}}=\frac{a^2(x+y+z)+xyz}{a^2+xy+yz+xz} \qquad (2)$$

De (1) et (2) , on déduit que: $(xTy)Tz=xT(yTz)$

Donc: $\forall (x;y;z)\in G^2$; $(xTz)Tz=xT(yTz)$

D'où la loi T est associative

3) Montrons que la loi T admet un élément neutre e .

La loi T est commutative donc e est l'élément neutre dans $(G;T)$ si et seulement si. $(\forall x\in G)$; $xTe=x$

On a: $(\forall x \in G)$; $xTe = x \Leftrightarrow (\forall x \in]-a;a[); \dfrac{x+e}{1+\dfrac{ex}{a^2}} = x$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in]-a;a[) ; a^2(x+e) = x(a^2+ex)$$
$$\Leftrightarrow (\forall x \in]-a;a[); e(a^2-x^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow e = 0$$

Car la proposition « $(\forall x \in]-a;a[) ; a^2 - x^2 = 0$ » est fausse

donc 0 est l'élément neutre dans $(G;T)$

4) Déterminons les éléments symétrisables dans $(G;T)$

Soit x un élément de G et x' son symétrique dans $(G;T)$,

on a: $xTx' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+x'}{1+\dfrac{xx'}{a^2}} = 0$

$$\Leftrightarrow x + x' = 0$$
$$\Leftrightarrow x' = -x$$

Puisque T est commutative alors: $x'Tx = 0 \Leftrightarrow x' = -x$

Donc tout élément x de G admet $-x$ comme symétrique par rapport à la loi T

Exercice

1) • Montrons que la loi * est commutative

Soit z et z' deux nombres complexes , on a:

$$z * z' = zz' + i(z+z') - (1+i)$$
$$= z'z + i(z'+z) - (1+i)$$
$$= z' * z$$

(car l'addition et la multiplication sont commutatives dans $\mathbb{C}$)

Donc: $\forall (z;z') \in \mathbb{C}^2 \quad z * z' = z' * z$, d'où la loi * est commutative dans $\mathbb{C}$

• Montrons que la loi* est associative

Soit z,z' et z'' des nombres complexes, on a:

$$(z * z') * z'' = (zz' + i(z+z') - (1+i)) * z''$$
$$= (zz' + i(z+z') - (1+i))z'' + i(zz' + i(z+z') - (1+i) + z'') - (1+i)$$
$$= zz'z'' + i(zz'' + z'z'') - (1+i)z'' + izz' - (z+z') + 1 - i + iz'' - 1 - i$$
$$= zz'z'' + i(zz'' + z'z'' + zz') - (z+z'+z'') \quad 2i \quad (1)$$

D'autre part on a:

$$\begin{aligned} z*(z'*z'') &= z*(z'z''+i(z'+z'')-(1+i)) \\ &= z(z'z''+i(z'+z'')-(1+i))+i(z+z'z''+i(z'+z'')-(1+i))-(1+i) \\ &= zz'z''+i(zz'+zz'')-(1+i)z+iz+iz'z''-z'-z''-i+1-i-1 \\ &= zz'z''+i(zz'+zz''+z'z'')-(z+z'+z'')-2i \quad (2) \end{aligned}$$

De (1) et (2) , on déduit que: $(z*z')*z'' = z*(z'*z'')$

Donc: $\forall (z;z';z'') \in \mathbb{C}^3 \ ; (z*z')*z'' = z*(z'*z'')$

D'où la loi * est associative dans $\mathbb{C}$

2) Déterminons l'élément neutre e dans $(\mathbb{C};*)$

La loi $*$ est commutative , donc e est l'élément neutre dans $(\mathbb{C},*)$ si et seulement si: $(\forall z \in \mathbb{C})\ ; z*e = z$

On a: $(\forall z \in \mathbb{C}); z*e = z \Leftrightarrow (\forall z \in \mathbb{C}); ze+i(z+e)-(1+i) = z$

$$\Leftrightarrow (\forall z \in \mathbb{C}); (e+i-1)z+(ie-1-i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e+i-1=0 \\ ie-1-i=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e = 1-i \\ e = \dfrac{1+i}{i} = 1-i \end{cases}$$

Donc $e = 1-i$ est l'élément neutre dans $(\mathbb{C};*)$

3) Déterminons les éléments symétrisables dans $(\mathbb{C},*)$

Soit $z \in \mathbb{C}$ et z' son symétrique dans $(\mathbb{C};*)$

On a: $z*z' = e \Leftrightarrow zz'+i(z+z')-(1+i) = 1-i$

$$\Leftrightarrow z'(z+i) = -iz+2$$

-Si $z \neq -i$ alors: $z*z' = e \Leftrightarrow z' = \dfrac{-iz+2}{z+i}$

Puisque $*$ est commutative alors: $z'*z = e \Leftrightarrow z' = \dfrac{-iz+2}{z+i}$

-Si $z = -i$ alors z' n'existe pas.

Donc tout élément z de $\mathbb{C}-\{-i\}$, admet un symétrique z' qui est: $\dfrac{-iz+2}{z+i}$ dans $(\mathbb{C};*)$

Exercice

1) Determinons une relation entre a,b et c pour que la loi T soit associative.

La loi T est associative dans $\mathbb{R}$ si et seulement si:

$$\forall(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ (xTy)Tz = xT(yTz)$$

Soit x, y et z des éléments de $\mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned}(xTy)Tz &= (axy+b(x+y)+c)Tz\\ &= a(axy+b(x+y)+c)z+b(axy+b(x+y)+c+z)+c\\ &= a^2xyz+ab(xy+xz+yz)+b^2(x+y)+acz+bz+bc+c\end{aligned}$$

et $$\begin{aligned}xT(yTz) &= xT(ayz+b(y+z)+c)\\ &= ax(ayz+b(y+z)+c)+b(x+ayz+b(y+z)+c)+c\\ &= a^2xyz+ab(xy+xz+yz)+b^2(y+z)+acx+bc+bx+c\end{aligned}$$

Donc: $(xTy)Tz - xT(yTz) \Leftrightarrow b^2x+bz+acz-b^2z-bx-acx$

$$\Leftrightarrow b^2(x-z)-b(x-z)-ac(x-z)=0$$

$$\Leftrightarrow (b^2-b-ac)(x-z)=0$$

D'où la loi T est associative dans $\mathbb{R}$ si et seulement si:

$$(\forall(x;y;z)\in\mathbb{R}^3)\ ;\ (b^2-b-ac)(x-z)=0$$

Cela signifie que: $b^2-b-ac=0$

Ainsi T est associative dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $b^2 - b - ac = 0$

2) On suppose que: $b^2=b+ac$

a) Montrons que la loi T admet un élément neutre dans $\mathbb{R}$

La loi T est commutative dans $\mathbb{R}$, donc l'élément neutre e s'il existe, il vérifie $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ xTe=x$

On a: $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ xTe = x \Leftrightarrow (\forall x\in\mathbb{R}); axe+b(x+e)+c=x$

$$\Leftrightarrow (\forall x\in\mathbb{R}); (ae+b-1)x+be+c=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ae+b-1=0\\ be+c=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e=\dfrac{1-b}{a}\\ e=-\dfrac{c}{b}\end{cases} \qquad (ab\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 0 \text{ et } b\neq 0)$$

et on a: $b^2 = b + ac \Leftrightarrow b(b-1) = ac$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a}\cdot\frac{b-1}{b}=\frac{c}{b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-b}{a}=\frac{c}{b}$$

Donc la loi T admet un élément neutre qui est : $e = -\frac{b}{a}$ $= -\frac{c}{b}$

b) Déterminons les éléments symétrisables dans $(\mathbb{R};T)$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$ et x' son symétrique s'il existe dans $(\mathbb{R};T)$, on a:

$$\begin{aligned} xTx' = -\frac{c}{b} &\Leftrightarrow axx' + b(x+x') + c = -\frac{c}{b} \\ &\Leftrightarrow abxx' + b^2(x+x') + bc = -c \\ &\Leftrightarrow x'(abx + b^2) = -c - bc - b^2x \end{aligned}$$

• Si $x \neq -\frac{b}{a}$ alors $xTx' = -\frac{c}{b} \Leftrightarrow x' = -\frac{c+bc+b^2x}{b(ax+b)}$

• Si $x = -\frac{b}{a}$ alors x n'a pas de symétrique dans $(\mathbb{R};T)$

Donc tout élément x de $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{b}{a}\right\}$, admet un symétrique x' dans $\mathbb{R}$ qui est: $-\frac{c+bc+b^2x}{b(ax+b)}$

II Homomorphisme

Soit E et F deux ensembles munis respectivement des lois de composition interne $*$ et T.

On dit qu'une application f de E dans F est un homomorphisme de $(E;*)$ vers $(F;T)$ si: $(\forall (x;y)\in E^2)$; $f(x*y) = f(x)Tf(y)$

Soit f un homomorphisme de $(E;*)$ vers $(F;T)$

• $f(E)$ est une partie stable de $(F;T)$.

• Si $*$ est commutative dans E, alors T est commutative dans $f(E)$

• Si $*$ est associative dans E, alors T est associative dans $f(E)$

• Si e est l'élément de $*$ dans E, alors $f(e)$ est l'élément neutre de T dans $(f(E);T)$

• Si x' est le symétrique de x dans $(E;*)$, alors $f(x')$ est le symétrique de $f(x)$ dans $(f(E);T)$

Remarque:

Si f est bijective et f est un homomorphisme de $(E;*)$ vers $(F;T)$ alors f est appelé isomorphisme de $(E;*)$ sur $(F;T)$ et dans ce cas ; f transmet toutes les propriétés de $(E;*)$ à $(F;T)$

Exercices d'application

Exercice 1

Soit f un homomorphisme de $(E;*)$ vers $(F;T)$

1) Soit B une partie stable dans $(F;T)$

Montrer que $f^{-1}(B)$ est une partie stable dans $(E;*)$

2) Soit A une partie stable dans $(E;*)$

Montrer que $f(A)$ est une partie stable dans $(F;T)$

Exercice 2

On pose: $I=\mathbb{R}^+$

On définit sur I la loi de composition interne T par:

$$(\forall (x;y)\in I^2)\ ;\ xTy=\sqrt{x^2+y^2}$$

1) Montrer que l'application: $\varphi: I \longrightarrow I$

$$x \longrightarrow x^2$$

est un isomorphisme de $(I;T)$ dans $(I;+)$

2) En déduire les propriétés de T dans I

3) Calculer: $\underbrace{aTaT....Ta}_{n\text{ fois}}$ pour $n\in(\mathbb{N}^*-\{1\})$

Exercice 3

On définit dans $\mathbb{R}$, la loi de composition interne $*$ par:

$$(\forall (x;y)\in \mathbb{R}^2)\ ;\ x*y=x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}$$

On considère l'application: $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

1) Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ dans $(\mathbb{R};*)$

2) En déduire les propriétés de la loi $*$ dans $\mathbb{R}$

Exercice 12

On considère la loi de compos tion interne $*$ définie par:

$(\forall (x;y)\in \mathbb{R}^2)$; $x*y=x+y-xy$ et l'application

f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par: $f(x)=1-x$

1) Montrer que si g est un isomorphisme de $(E;*)$ vers $(F;T)$ alors g est un isomorphisme de $(F;T)$ vers $(E;*)$

2) a) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R};*)$ vers $(\mathbb{R};\times)$ puis en déduire les propriétés de la loi * dans $\mathbb{R}$

b) Soit $a\in\mathbb{R}$, on pose : $\begin{cases} a_1=a \\ a_2=a_1*a=a*a \\ a_{n+1}=a_n*a \end{cases}$; pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

En utilisant l'homomorphisme f , déterminer a_n en fonction de a et n

Solutions

Exercice 9

1) Montrons que $f^{-1}(B)$ est une partie stable de $(E,*)$

Rappel:

- $(\forall B\in\mathcal{P}(F))$; $f^{-1}(B)\subset E$
- $x\in f^{-1}(B)\Leftrightarrow f(x)\in B$

Soit x_1 et x_2 deux éléments de $f^{-1}(B)$

Montrons que: $x_1*x_2\in f^{-1}(B)$

On a: $\begin{cases} x_1\in f^{-1}(B)\Leftrightarrow f(x_1)\in B \\ x_2\in f^{-1}(B)\Leftrightarrow f(x_2)\in B \end{cases}$

Puisque B est une partie stable de (F,T) alors : $f(x_1)\,T\,f(x_2)\in B$

Puisque f est un homomorphisme de $(E;*)$ dans (F,T)

alors: $f(x_1)\,T\,f(x_2)=f(x_1*x_2)$

Donc: $f(x_1*x_2)\in B$ d'où: $x_1*x_2\in f^{-1}(B)$

Par suite: $\left(\forall (x_1;x_2)\in\left(f^{-1}(B)\right)^2\right)$; $x_1*x_2\in f^{-1}(B)$

Cela signifie que $f^{-1}(B)$ est une partie stable de $(E;*)$

2) Montrons que $f(A)$ est une partie stable de $(F;T)$

Rappel:

• $(\forall A \in \mathcal{P}(E))\ ; f(A) \subset F$

• $y \in f(A) \Leftrightarrow (\exists x \in A) / f(x) = y$

Soit y_1 et y_2 deux éléments de $f(A)$

Montrons que : $y_1 T y_2 \in f(A)$

On a $\begin{cases} y_1 \in f(A) \Leftrightarrow (\exists x_1 \in A) / f(x_1) = y_1 \\ y_2 \in f(A) \Leftrightarrow (\exists x_2 \in A) / f(x_2) = y_2 \end{cases}$

Donc: $y_1 T y_2 = f(x) T f(x_2) = f(x_1 * x_2)$ (car f est un homomorphisme de $(E;*)$ dans $(F;T)$)

Puisque A est une partie stable de $(E;*)$ alors : $x_1 * x_2 \subset A$

donc: $f(x_1 * x_2) \in f(A)$ c'est-à-dire $y_1 T y_2 \in f(A)$

d'où: $\forall (y_1;y_2) \in (f(A))^2$; $y_1 T\, y_2 \in f(A)$

par suite , $f(A)$ est une partie stable de $(F;T)$

1) * Montrons que l'application φ est un homorphisme de $(I;T)$ dans $(I;+)$

Soit x et y deux éléments de I , on a:

$\varphi(xTy) - \varphi(\sqrt{x^2+y^2}) - (\sqrt{x^2+y^2})^2 - x^2 + y^2 - \varphi(x) + \varphi(y)$

Donc: $\forall (x;y) \in I^2$; $\varphi(xTy) - \varphi(x) + \varphi(y)$

D'où: φ est un homorphisme de $(I;T)$ dans $(I;+)$

* Montrons que φ est bijective de I sur I

La fonction $\varphi : x \mapsto x^2$ est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$, donc φ est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\varphi(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$

d'où φ est un isomorphisme de $(I;T)$ dans $(I;+)$

2) Déduisons les propriétés de T dans I ;

φ est un isomorphisme de $(I;T)$ sur $(I,+)$, donc les proprietés de T dans I se déduisent des propriétés de + dans I

On a • + est associative dans $\mathbb{R}$ donc T est associative dans I

• La loi + est commutative dans $\mathbb{R}'$ donc T est commutative dans I

• 0 est l'élément neutre dans $(\mathbb{R}';+)$ donc $\varphi(0)=0$ est l'élément neutre dans $(I;T)$

3) Soit $a\in I$ calculons: $\underbrace{aTaTa\ldots Ta}_{n\text{fois}}$ où $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

On a: $aTa=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$

et $aTaTa=(aTa)Ta=(a\sqrt{2})Ta=\sqrt{2a^2+a^2}=a\sqrt{3}$

Montrons par récurrence que: $(\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\});\underbrace{aTaT\ldots Ta}_{n\text{fois}}=a\sqrt{n}$

• Initialisation : Pour $n=2$, on a: $aTa=a\sqrt{2}$

• Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$;

Supposons que: $\underbrace{aTaT\ldots\ldots Ta}_{n\text{fois}}=a\sqrt{n}$ et montrons que.

$$\underbrace{aTaT\ldots\ldots Ta}_{(n+1)\text{fois}}=a\sqrt{n+1}$$

On a: $\underbrace{aTaT\ldots\ldots Ta}_{(n+1)\text{fois}}=\left(\underbrace{aTaT\ldots Ta}_{n\text{fois}}\right)Ta$ (D'après l'hypothèse de récurrence)

$$=(a\sqrt{n})Ta$$
$$=\sqrt{na^2+a^2}$$
$$=a\sqrt{n+1}$$

Donc la propriété est vraie pour $n+1$

Conclusion: $(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\});\underbrace{aTaT\ldots Ta}_{n\text{fois}}=a\sqrt{n}$

Exercice 11

1) Montrons que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ sur $(\mathbb{R},*)$

• Soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}$, on a: $\varphi(x+y)=\frac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{2}$

et $\varphi(x)*\varphi(y)\quad\varphi(x)\sqrt{1+(\varphi(y))^2}+\varphi(y)\sqrt{1+(\varphi(x))^2}$

$$=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\sqrt{1+\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)^2}+\frac{e^y-e^{-y}}{2}\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{e^x-e^{-x}}{4}\sqrt{4+e^{2y}-2+e^{-2y}}+\frac{e^y-e^{-y}}{4}\sqrt{4+e^{2x}-2+e^{-2x}}$$

$$= \frac{e^{x}}{4}\frac{e^{y}}{\sqrt{(e^{x}+e^{-x})^{2}}} + \frac{e^{y}}{4}\frac{e^{-x}}{\sqrt{(e^{x}+e^{-x})^{2}}}$$

$$= \frac{(e^{x}-e^{-x})(e^{y}+e^{-y})}{4} + \frac{(e^{y}-e^{-y})(e^{x}+e^{-x})}{4}$$

$$= \frac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{y-x}-e^{-x-y}+e^{x+y}+e^{y-x}-e^{x-y}-e^{-x-y}}{4}$$

$$= \frac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{2} = \varphi(x+y)$$

Donc: $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)$; $\varphi(x+y) = \varphi(x) * \varphi(y)$, d'où φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ dans $(\mathbb{R};*)$

* Montrons que φ est bijective

- La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est la somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto \frac{1}{2}e^{x}$ et $\mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{2}e^{-x}$

- La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\varphi'(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$.

donc: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\varphi'(x) > 0$ d'où φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc, φ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\varphi(\mathbb{R})$ et puisque $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, alors φ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Donc: φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ sur $(\mathbb{R};*)$

2) Déduisons les propriétés de $*$ dans $\mathbb{R}$

On a: $(\mathbb{R},+)$ est un groupe commutatif et φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ sur $(\mathbb{R};*)$ alors $(\mathbb{R};*)$ est un groupe commutatif tel que:

• $\varphi(0) = 0$ est l'élément neutre dans $(\mathbb{R};*)$

• $-x$ est le symétrique de x dans $(\mathbb{R},+)$, donc: $\varphi(-x) = \varphi(x)$ est le symétrique de $\varphi(x)$ dans $(\mathbb{R};*)$

Exercice 12

1) Montrons que si g est un isomorphisme de $(E;*)$ sur $(F;T)$

alors g^{-1} est un isomorphisme de $(F;T)$ dans $(E;*)$

• g^{-1} est bijective de F sur E

• Soit y_1 et y_2 deux éléments de F , montrons que:

$g^{-1}(y_1 T y_2) = g^{-1}(y_1) * g^{-1}(y_2)$

On a: $\begin{cases} y_1 \in F \Leftrightarrow \exists! x_1 \in E / g(x) = y \\ y_2 \in F \Leftrightarrow \exists! x_2 \in E / g(x_2) = y_2 \end{cases}$

Donc: $g^{-1}(y_1 T y_2) = g^{-1}(g(x_1) T g(x_2))$

$= g^{-1}(g(x_1 * x_2))$

$= x_1 * x_2$

$= g_1^{-1}(y_1) * g^{-1}(y_2)$

D'où: $\forall (y_1, y_2) \in F^2$; $g^{-1}(y_1 T y_2) = g^{-1}(y_1) * g^{-1}(y_2)$

Par suite g^{-1} est un isomorphisme de $(F;T)$ sur $(E;*)$

2) a) Montrons que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*;*)$ sur $(\mathbb{R}^*;\times)$

• Montrons que f est un homomorphisme

Soit x et y deux nombres réels, on a:

$f(x*y) = f(x+y-xy) = 1-(x+y-xy) = xy-x-y+1$

et on a: $f(x) \times f(y) = (1-x)(1 \quad y) = 1 \quad x \quad y + xy$

donc: $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$; $f(x*y) = f(x) \times f(y)$

D'ou f est un homomorphisme de $(\mathbb{R};*)$ dans $(\mathbb{R}^*;\times)$

• Montrons que f est bijective

Methode 1. On a f est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (car dans ce cas on a: $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$)

Méthode 2: Soit $y \in \mathbb{R}$, existe t-il un unique x de $\mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$?

On a: $f(x) = y \Leftrightarrow 1 - x - y$

$\Leftrightarrow x = 1 - y$

Donc pour tout y de $\mathbb{R}$, il existe un unique x de $\mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$, d'où f est bijective.

Dédu sons les propriétés de $*$ dans $\mathbb{R}$:

On a f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*;*)$ sur $(\mathbb{R};\times)$ et d'après la question 1), on a f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*;\times)$ sur $(\mathbb{R}^*,*)$, donc les propriétés de

la loi $*$ dans $\mathbb{R}^*$ sont déduites comme suit:

On a: • la loi $\times$ est associative dans $\mathbb{R}^*$, donc $*$ est associative dans $\mathbb{R}^*$

• la loi $\times$ est commutative dans $\mathbb{R}^*$, donc $*$ est commutative dans $\mathbb{R}^*$

• 1 est l'élément neutre dans $(\mathbb{R}^*, \times)$, donc $f(1)$ 0 est l'élément neutre dans $(\mathbb{R}^*; *)$.

• Tout élément non nul admet un symétrique dans $(\mathbb{R}^*; \times)$

donc tout élement différent de $f(0) = 1$ admet un symétrique dans $(\mathbb{R}^*; *)$

b) Déterminons a_n en fonction de a et n

On a f^{-1} est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*; \times)$ sur $(\mathbb{R}^*; *)$

donc : $(\exists! b \in \mathbb{R}) / f^{-1}(b) = a$ c'est-à-dire: $b = 1 - a$

On a: $a_2 = a * a = f^{-1}(b) * f^{-1}(b) = f^{-1}(b \times b) = f^{-1}(b^2)$

$1 \quad b^2 \quad 1 \quad (1 \quad a)^2$

Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $a_n - 1 - (1 - a)^n$

• Initialisation: Pour $n - 1$, on a: $a_1 - a$ et $1 - (1 - a)^1 - a$

donc $a_1 = 1 - (1 - a)^1$

• Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que: $a_n = 1 - (1 - a)^n$ et montrons que $a_{n+1} = 1 - (1 - a)^{n+1}$

On a: $a_{n+1} = a_n * a = (1 - (1 - a)^n) * a$

$$= 1 - (1 - a)^n + a - a(1 - (1 - a)^n)$$
$$= 1 - (1 - a)^n + a(1 - a)^n$$
$$= 1 - (1 - a)^n (1 - a) = 1 - (1 - a)^{n+1}$$

Donc la propriété est vraie pour $n + 1$

• Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $a_n = 1 - (1 - a)^n$

III Groupes, Anneaux, Corps

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$ et H une partie non vide de G

1) Groupe:

Définition:

On dit que $(G;*)$ est un groupe si:

- La loi $*$ est associative
- La loi $*$ admet un élément neutre
- Tout élément de G est symétrisable dans $(G;*)$

Si de plus, la loi $*$ est commutative , on dit que le groupe $(G;*)$ est commutatif.

Remarque:

Groupes usuels

- $(\mathbb{Z};+)$; $(\mathbb{Q};+)$; $(\mathbb{R};+)$; $(\mathbb{C};+)$ sont des groupes commutatifs
- $(\mathbb{R}^*;\times)$; $(\mathbb{R}^{+*};\times)$; $(\mathbb{C}^*;\times)$ sont des groupes commutatifs
- $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$; $(\mathcal{A}(\mathbb{R});+)$; $(\mathcal{A}(\mathbb{R};\mathbb{R});+)$ sont des groupes commutatifs.

2) Sous-groupe

Définition:

Soit $(G;*)$ un groupe et H une partie stable de $(G;*)$

On dit que H est un sous-groupe de $(G;*)$ si $(H;*)$ est un groupe.

Propriété caractéristique:

Soit G un groupe et H une partie de G

- H est un sous-groupe de $(G;*)$ si et seulement si:

$$\begin{cases} \bullet\ H \neq \phi \\ \bullet\ \forall (x;y) \in H^2 ; x * y' \in H \end{cases}$$

où y' est le symétrique de y dans $(G;*)$

ou encore: - H est un sous-groupe de $(G;*)$ si et seulement si:

$$\begin{cases} \bullet\ H \neq \phi \\ \bullet\ \forall (x;y) \in H^2 ; x * y \in H \\ \bullet\ (\forall x \in H); x' \in H \end{cases}$$

où x' est le symétrique de x dans $(G;*)$

Image d'un groupe par un isomorphisme:

Si f est un isomomorphisme de $(G;*)$ dans (F,T) et si $(G;*)$ est un groupe alors $(F;T)$ est un groupe.

B) Anneau - Corps

1) Distributivité:

Soit A un ensemble muni de deux lois de composition interne $*$ et T.

On dit que la loi T est distributive par rapport à la loi $*$ si:

$$(\forall (x;y;z)\in A^3)\ ;\ \begin{cases}(x*y)Tz=(xTz)*(yTz)\\ zT(x*y)=(zTx)*(zTy)\end{cases}$$

2) Anneau

Définition:

Soit A un ensemble muni de deux lois de composition interne $*$ et T

On dit que $(A;*;T)$ est un anneau si:

- $(A;*)$ est un groupe commutatif
- La loi T est associative
- La loi T est distributive par rapport à la loi $*$
- Si de plus, la loi T est commutative, on dit que l'anneau $(A;*;T)$ est commutatif
- Si de plus, la loi T admet un élément neutre, on dit que l'anneau $(A;*;T)$ est unitaire.

Règles de calcul dans un anneau

Soit $(A;*;T)$ un anneau et 0_A est l'élément neutre de $(A;*)$

On note par x' le symétrique d'un élément x de A dans $(A;*)$

On a: - $(\forall a\in A)\ ;\ aT0_A=0_A$ et $0_ATa=0_A$

- $\forall (a;b)\in A^2\ ;\ aTb'=a'Tb=(aTb)'$
- $\forall (a;b)\in A^2\ ;\ a'Tb'=aTb$

Diviseurs de zero dans un anneau

Définition :

Soit $(A;*;T)$ un anneau et soit 0_A l'élément neutre de $(A;*)$

On dit qu'un élément a de $A-\{0_A\}$ est un diviseur de zéro dans l'anneau $(A;*;T)$ si : $(\exists b \in A-\{0_A\})$; $aTb=0_A$ et $bTa=0_A$.

L'élément b est aussi appelé un diviseur de zéro dans l'anneau $(A;*;T)$

Anneau intègre :

Définition :

On dit que l'anneau $(A;*;T)$ est intègre s'il n'admet pas de diviseurs de zéro.

Autrement dit : $(A;*;T)$ est intègre si :

$(\forall (a;b) \in A^2)$; $aTb=0_A \Longrightarrow a=0_A$ ou $b=0_A$

Anneaux usuels

- $(\mathbb{Z};+;\times)$; $(\mathbb{Q};+;\times)$; $(\mathbb{C};+;\times)$ sont des anneaux commutatifs, unitaires et intégres.
- $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$; $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});+;\times)$ sont des anneaux unitaires, non commutatifs et non intégres.

3) Corps:

Soit K un ensemble non vide muni de deux lois de composition interne $*$ et T

Définition 1:

On dit que $(K;*;T)$ est un corps si :

$$\begin{cases} - (K;*;T) \text{ est un anneau unitaire} \\ - \text{Tout élément de } K \quad \{0_k\} \text{ est symétrisable dans } (K;T) \end{cases}$$

Définition 2:

On dit que $(K;*;T)$ est un corps si :

$$\begin{cases} - (K;*) \text{ est un groupe commutatif} \\ - (K-\{O_k\};T) \text{ est un groupe} \\ - \text{La loi } T \text{ est distributive par rapport à la loi } * \end{cases}$$

Remarque

Si de plus, la loi T est commutative alors le corps $(K;*;T)$ est commutatif.

Propriété

Tout corps est un anneau intègre

Exercices d'application

Exercice 13

On considère les deux ensembles: $A = \{2^n \times 3^m / (n;m) \in \mathbb{Z}^2\}$

et $B = \{2^{3p} \times 3^{2q} / (p;q) \in \mathbb{Z}^2\}$

1) Montrer que $(A;\times)$ est un groupe.

2) Montrer que B est un sous-groupe de $(A;\times)$

Exercice 14

On considère l'ensemble: $E = \left\{\frac{1+2p}{1+2q} / (p;q) \in \mathbb{Z}^2\right\}$

Montrer que $(E;\times)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{Q}^*;\times)$

Exercice 15

On considère la loi de composition interne $*$ définie sur $\mathbb{R}$ par:

$\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ a * b = a + b + ab$

1) a) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative dans $\mathbb{R}$

b) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre dans $\mathbb{R}$

c) $(\mathbb{R};*)$ est-il un groupe ?

2) Soit $a \in \mathbb{R}$, on pose: $a_1 = a$ et $a_{n+1} = a_n * a$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

a) Calculer a_2 et a_3

b) Calculer a_n en fonction de n

Exercice 16

On considère la loi de composition interne T définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ xTy = x + y + mxy$$

où m est un nombre réel non nul.

1) Montrer que la loi T est commutative et associative

2) On pose: $G = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{m}\right\}$

a) Montrer que G est une partie stable de $(\mathbb{R};T)$

b) Montrer que $(G;T)$ est un groupe commutatif.

On pose : $I =]0;+\infty[$

1) Montrer que: $\forall (x;y) \in I^2$; $e^{x+y} - e^x - e^y + 2 > 1$

2) On définit sur I la loi de composition interne T par:

$\forall (x;y) \in I^2$; $xTy = \ln(e^{x+y} - e^x - e^y + 2)$ et l'application f définie de I vers I par: $f(x) = \ln(x+1)$

a) Montrer que f est un isomorphisme de $(I;\times)$ dans $(I;T)$

b) En déduire la structure de $(I;T)$

Soit $(G;*)$ un groupe d'élément neutre e.

On pose: $a^0 = e$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $a^n = \underbrace{a * a * .... * a}_{n\ fois}$

et $(\forall n \in \mathbb{Z}\ ^*)$; $a^n = \underbrace{a^{-1} * a^{-1} * ..... * a^{-1}}_{n\ fois}$

On pose: $H = \{a^n / n \in \mathbb{Z}\}$

1) Montrer que H est un sous-groupe de $(G;*)$

2) Montrer que H est le plus petit sous-groupe du groupe $(G;*)$ qui contient a

On définit sur l'ensemble $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, la loi de composition interne $*$ par:

$\forall (x,y) \in G$; $\forall (x';y') \in G$; $(x;y) * (x';y') = \left(xx';xy' + \frac{y}{x'}\right)$

1) Monter que $(G;*)$ est un groupe non commutatif.

2) Déterminer l'ensemble C définie par:

$C = \{(x;y) \in G / \forall (a;b) \in G; (x;y) * (a;b) = (a;b) * (x;y)\}$

3) Montrer que: $\mathbb{R}^* \times \{0\}$; $\{1\} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}$ sont des sous-groupes du groupe $(G;*)$

4) On considère l'ensemble: $H = \left\{\left(x;k\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) / x \in \mathbb{R}^*\right\}$ tel que $k \in \mathbb{R}$

Montrer que $(H;*)$ est un sous-groupe commutatif du groupe $(G;*)$

Soit E l'ensemble defini par: $E = \left\{M(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x\ln x & x \end{pmatrix} / x \in]0;+\infty[\right\}$

On considère l'application φ définie par:

$$\varphi:]0;+\infty[\longrightarrow E$$
$$x \longrightarrow M(x)$$

1) Montrer que φ est un isomorphisme de $(]0;+\infty[;\times)$ vers $(E;\times)$

2) En déduire la structure de $(E;\times)$

3) Déterminer $(M(x))^{-}$ et $(M(x))^{n}$ tels que $x \in \mathbb{R}^{*+}$ et $n \in \mathbb{N}^{*}$

Exercice 3

On considère l'ensemble: $E = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} 2^a & 0 \\ a2^a & 2^a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{Z} \right\}$

1) Montrer que $(E;\times)$ est un groupe commutatif isomorphe au groupe $(\mathbb{Z};+)$

2) Montrer que: $(\forall p \in \mathbb{Z})$; $(M_a)^p = M_{ap}$

3) Soit F l'ensemble défini par $F_{(a;b)} = \{(M_a)^p \times (M_b)^q / (p;q) \in \mathbb{Z}^2\}$ tel que $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$

a) Montrer que $F_{(a;b)}$ est un sous-groupe de $(E;\times)$

b) Soit $c \in \mathbb{Z}$, montrer que: $a \wedge b | c \Leftrightarrow M_c \in F_{(a;b)}$

c) En déduire que: $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow F_{(a;b)} = E$

Exercice 4

Soit A l'ensemble défini par: $A = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & -\frac{x^2}{2} & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$

1) Montrer que A est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R});\times)$

2) On considère l'application f définie par: $f: \mathbb{R} \to A$
$$x \longrightarrow M(x)$$

a) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ vers $(A;\times)$

b) En déduire la structure de $(A;\times)$

c) Soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}$.

Déterminer la matrice $(M(x) \times M(y))^{-1}$

d) Résoudre dans l'ensemble A l'équation: $X^2 = K$ où X est l'inconnue

et $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 23

On considère l'ensemble $E = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ ae^a & e^a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R} \right\}$

1) Montrer que $\times$ est une loi de composition interne dans E

2) Soit φ l'application définie par: φ: $\mathbb{R} \longrightarrow E$

$a \longmapsto M_a$

a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}; +)$ dans $(E; \times)$

b) En déduire la structure de $(E; \times)$

3) On pose $(M_a)^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Montrer que: $(\forall k \in \mathbb{Z})$; $(M_a)^k = M_{ka}$

Exercice 24

Soit a un nombre réel strictement positif

On considère l'ensemble: $A = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$

et l'application f définie par: f: $\mathbb{R} \longrightarrow A$

$x \longmapsto M(x)$

1) a) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(A, \times)$

b) En déduire la structure de $(A; \times)$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$; déterminer $(M(x))^{-1}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $x \in \mathbb{R}$

Déterminer $(M(x))^n$ en fonction de n , x et a

On considère l'ensemble G défini par:

$$G=\left\{M=\begin{pmatrix}1 & x & y\\ 0 & 1 & z\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}/(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\right\}$$

1) Montrer que G est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R});\times)$

2) Montrer que $(G;\times)$ est un groupe non commutatif

Partie 1:

Pour tous x et y de l'ensemble $G=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$, on pose: $x*y=x+y-2xy$

1) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans G

2) Montrer que $(G;*)$ est un groupe commutatif

3) Montrer que: $(\forall x\in G)\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}):\underbrace{x*x*\ldots*x}_{n\text{fois}}=\frac{1}{2}\left(1-(1-2x)^n\right)$

Partie 2:

Soit A l'ensemble défini par: $A=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1-x & 0 & x\\ 0 & 1 & 0\\ x & 0 & 1-x\end{pmatrix}/x\in G\right\}$

1) Montrer que A est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R});\times)$

2) On considère l'application φ définie de G dans A par:

$$(\forall x\in G)\ ;\ \varphi(x)=M(x)$$

a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(G;*)$ vers $(A;\times)$

b) Quelle est la structure de $(A;\times)$?

c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $K=M\left(-\frac{1}{2}\right)$

Montrer que: $K^n=M\left(\frac{1-2^n}{2}\right)$ et $(K^n)^{-1}=M\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

Exercice 27

On considère l'ensemble E défini par: $E=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 5b & a\end{pmatrix}/(a;b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

1) Montrer que $(E;+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire

2) a) Montrer que $(\forall(a;b)\in\mathbb{Z}^2)\ ;\ a^2-5b^2=0\Leftrightarrow a=b=0$

b) Montrer que l'anneau $(E;+;\times)$ est intègre.

3) On considère l'ensemble F défini par: $F=\left\{\begin{pmatrix}2x-y & y\\ 5y & 2x-y\end{pmatrix}/(x;y)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

a) Montrer que $(F;+)$ est un sous-groupe du groupe $(E;+)$

b) Montrer que $(\forall X\in E)$; $(\forall M\in F)$; $X\times M\in F$

Exercice 2

On considère l'ensemble A défini par:

$$A=\left\{M(a;b)=\begin{pmatrix}a & b\\ -2b & a+2b\end{pmatrix}/(a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

1) Montrer que A est un sous-groupe du groupe $(M_2(\mathbb{R});+)$

2) Montrer que $\forall(M;M')\in A^2$; $M\times M'\in A$

3) Soit f l'application définie par: $f:A\longrightarrow\mathbb{C}$

$$M(a;b)\longrightarrow a+b+ib$$

a) Montrer que f est un isomorphisme de $(A^*;\times)$ vers $(\mathbb{C}^*;\times)$

où $A^*=A-\{\theta\}$ (θ est la matrice nulle)

b) Quelle est la structure de $(A;+;\times)$?

Exercice 3

On considère l'ensemble F défini par: $F=\left\{\begin{pmatrix}x+y & y\\ 0 & x+y\end{pmatrix}/(x;y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

1) Montrer que $(F;+)$ est un sous-groupe du groupe $(M_2(\mathbb{R});+)$

2) Montrer que $(F,+,\times)$ est un anneau commutatif et unitaire

3) Déterminer les éléments inversibles dans $(F;\times)$

Exercice 4

On considère l'ensemble F défini par: $F=\left\{\begin{pmatrix}x & 2y\\ y & x\end{pmatrix}/(x;y)\in\mathbb{Q}^2\right\}$

1) Montrer que $(F;+)$ est un groupe commutatif

2) Montrer que $(F;+;\times)$ est un anneau commutatif unitaire

3) a) Montrer que $(\forall(x;y)\in\mathbb{Q}^2)$; $x^2=2y^2\Leftrightarrow x=y=0$

b) Montrer que $(F;+;\times)$ est un corps commutatif

c) Résoudre dans F l'équation : $X^2-4X+3I_2=O_2$

où I_2 est la matrice unité et O_2 est la matrice nulle.

Exercice 31

On considère l'ensemble E défini par. $E=\left\{\begin{pmatrix}x+y & 3y\\ -y & x-y\end{pmatrix}/(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

1) Montrer que $(E;+;\times)$ est un corps commutatif.

2) On considère l'application f définie de E dans $\mathbb{C}$ par:

$(\forall M(x;y)\in E)\ ;\ f(M(x;y))=x+iy\sqrt{2}$

a) Montrer que f est un isomorphisme de $(E;\times)$ sur $(\mathbb{C};\times)$

b) Soit $K=M\left(1;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ un élément de E

Montrer qu'il existe deux suites (α_n) et (β_n) telles que:

$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ K^n=M(\alpha_n;\beta_n)$

Solutions

Exercice 31

1) Montrons que $(A;\times)$ est un groupe

On a: $A=\{2^n\times 3^m/(n;m)\in\mathbb{Z}^2\}$

On a: $A\subset\mathbb{Q}^*$ et $(\mathbb{Q}^*;\times)$ est un groupe commutatif donc il suffit de montrer que $(A;\times)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{Q}^*;\times)$

- Puisque $1\in A$ pour $n=m=0$ alors $A\neq\phi$
- Soit x et y deux éléments de A

On a: $\begin{cases}\exists(n;m)\in\mathbb{Z}^2, x=2^n\times 3^m\\ \exists(n';m')\in\mathbb{Z}^2; y=2^{n'}\times 3^{m'}\end{cases}$.

Puisque $(\mathbb{Q}^*;\times)$ est un groupe commutatif alors: $y^{-1}=2^{-n'}\times 3^{-m'}$

Donc: $xy^{-1}=(2^n\times 3^m)\times(2^{-n'}\times 3^{-m'})=2^{n-n'}\times 3^{m-m'}$

On pose: $p=n-n'$ et $q=m-m'$, on a: $\exists(p;q)\in\mathbb{Z}^2\ ;\ xy^{-1}=2^p\times 3^q$

donc: $xy^{-1}\in A$ par suite on a: $\begin{cases}A\neq\phi\\ \forall(x;y)\in A^2; x\times y^{-1}\in A\end{cases}$

d'où: $(A;\times)$ est un sous groupe du groupe $(\mathbb{Q}^*;\times)$, donc $(A;\times)$ est un groupe commutatif.

2) Montrons que B est un sous-groupe de $(A;\times)$

En posant $n=3p$ et $m=3q$, on a: $(\forall x\in B)\ ;\ \exists(n;m)\in\mathbb{Z}^2\ ;\ x=2^n\times 3^m$

Donc: $B \subset A$

On a: $1 \in B$ donc: $B \neq \phi$ et on a: $\forall (x;y) \in B^2$; $x \times y^{-1} \in B$ (vérifier le)

Donc: $(B;\times)$ est un sous-groupe du groupe $(A;\times)$

Exercice 04

Montrons que $(E;\times)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{Q}^*;\times)$

• On a: $E \neq \phi$ car $1 \in E$ pour $p = q = 0$

• Soit x et y deux éléments de E , on a:

$$\begin{cases} x \in E \Leftrightarrow \exists (a;b) \in \mathbb{Z}^2 ; x = \dfrac{1+2a}{1+2b} \\ y \in E \Leftrightarrow \exists (c;d) \in \mathbb{Z}^2 ; y = \dfrac{1+2c}{1+2d} \end{cases}$$

(Remarquer que: $(\forall x \in E)$; $x \neq 0$)

On a: $xy^{-1} = \dfrac{(1+2a)(1+2d)}{(1+2b)(1+2c)} = \dfrac{1+2(a+d+2ad)}{1+2(b+c+2bc)}$

On pose: $p = a+d+2ad$ et $q = b+c+2bc$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$

On a: $\exists (p;q) \in \mathbb{Z}^2$; $xy^{-1} = \dfrac{1+2p}{1+2q}$ donc $xy^{-1} \in E$

D'où $\begin{cases} E \neq \phi \\ \forall (x;y) \in E^2 ; xy^{-1} \in E \end{cases}$;

Par suite $(E;\times)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{Q}^*;\times)$

Exercice 05

1) a) • Montrons que la loi $*$ est commutative

Soit a,b deux éléments de $\mathbb{R}$, on a:

$$a*b = a+b+ab = b+a+ba = b*a$$

Donc la loi $*$ est commutative

• Montrons que la loi $*$ est associative

Soit a,b et c des éléments de $\mathbb{R}$, on a:

$$(a*b)*c = (a+b+ab)*c = a+b+ab+c+c(a+b+ab)$$
$$= a+b+c+ab+ac+bc+abc$$

et $a*(b*c) = a*(b+c+bc) = a+(b+c+bc)+a\times(b+c+bc)$
$$= a+b+c+ab+ac+bc+abc$$

donc : $\forall (a;b;c) \in \mathbb{R}^3$; $(a*b)*c = a*(b*c)$

d'où la loi $*$ est associative

b) Montrons que la loi $*$ admet un élément neutre dans $\mathbb{R}$

Soit e l'élément neutre dans $(\mathbb{R};*)$ s'il existe

On a: $(\forall a\in\mathbb{R})\ ;\ a*e=a\Leftrightarrow(\forall a\in\mathbb{R});a+e+ae=a$

$\Leftrightarrow(\forall a\in\mathbb{R});e(a+1)=0$

$\Leftrightarrow e=0\ ou\ (\forall a\in\mathbb{R});a+1=0$

Puisque la proposition : « $(\forall a\in\mathbb{R})\ ;\ a+1-0$ » est fausse

alors: $(\forall a\in\mathbb{R})\ ;\ a*e=a\Leftrightarrow e=0$, et on a:

$(\forall a\in\mathbb{R})\ ;\ 0*a=a$, donc 0 est l'élément neutre de la loi $*$ dans $\mathbb{R}$

c) Cherchons les éléments symétrisables dans $(\mathbb{R};*)$

Soit a un élément de $\mathbb{R}$ et a' son symétrique pour la loi $*$ s'il existe.

On a: $a'*a=0\Leftrightarrow a'+a+aa'=0$

$\Leftrightarrow a'(a+1)=-a$

- Si $a\neq-1$ alors: $a'=-\frac{a}{a+1}$

- Si $a-1$ alors : on a: $a'*(-1)=-1\neq0$, donc -1 n'a pas de symétrique dans $(\mathbb{R};*)$ et par suite $(\mathbb{R};*)$ n'est pas un groupe car -1 n'a pas de symétrique dans $(\mathbb{R};*)$

2) a) Calculons a_2 et a_3

Soit $a\in\mathbb{R}$, on a: $a_2=a*a-a+a+a^2-2a+a^2-(a+1)^2-1$

et $a_3=a_2*a=(a+1)^2-1+a+a((a+1)^2-1)=(a+1)^2-1+a+a(a+1)^2-a$

$=(a+1)^2(1+a)-1=(a+1)^3-1$

b) Calculons a_n en fonction de n

D'après la question a) , montrons par récurrence que:

$\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}\ ,\ a_n=(a+1)^n-1$

• Initialisation: Pour $n=2$, on a: $a_2=(a+1)^2-1$

• Hérédité: Soit $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$

Supposons que: $a_n=(a+1)^n-1$ et montrons que: $a_{n+1}=(a+1)^{n+1}-1$

On a: $a_{n+1}-a_n*a-((a+1)^n-1)\times a=(a+1)^n-1+a+((a+1)^n-1)\times a$

$=(a+1)^n-1+a+a(a+1)^n-a=(a+1)^n(1+a)-1$

$=(a+1)^{n+1}-1$

Donc la propriété est vraie pour $n+1$

• Conclusion: d'après le principe de la récurrence , on conclut que.

$$(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}) \ ; \ a_n = (a+1)^n - 1$$

Exercice 16

1) • Montrons que T est commutative dans $\mathbb{R}$

Soit x et y deux nombres réels , on a:

$xTy = x + y + mxy = y + x + myx = yTx$

donc. $\forall (x;y) \in \mathbb{R}$, $xTy = yTx$, d'où la loi T est commutative dans $\mathbb{R}$

• Montrons que T est associative dans $\mathbb{R}$

Soit x,y et z des éléments de $\mathbb{R}$, on a:

$$(xTy)Tz = (x + y + mxy)Tz = x + y + mxy + z + m(x + y + mxy)z$$
$$= x + y + z + m(xy + xz + yz) + m^2xyz$$

et $xT(yTz) = xT(y + z + myz) = x + y + z + myz + mx(y + z + myz)$
$$= x + y + z + m(xy + xz + yz) + m^2xyz$$

Donc: $(xTy)Tz = xT(yTz)$

D'où: $\forall (x;y;z) \in \mathbb{R}^3$, $(xTy)Tz = xT(yTz)$

Ainsi la loi T est associative dans $\mathbb{R}$

2) a) Montrons que G est une partie stable de $(\mathbb{R};T)$

Soit x et y deux éléments de G , on a:

$$(xTy) + \frac{1}{m} = x + y + mxy + \frac{1}{m} = mx\left(\frac{1}{m} + y\right) + \left(y + \frac{1}{m}\right)$$
$$\left(y + \frac{1}{m}\right)(mx + 1) = m\left(x + \frac{1}{m}\right)\left(y + \frac{1}{m}\right)$$

Puisque: $x \neq -\frac{1}{m}$ et $y \neq -\frac{1}{m}$ c'est- à- dire: $x + \frac{1}{m} \neq 0$ et $y + \frac{1}{m} \neq 0$

alors $m\left(x+\frac{1}{m}\right)\left(y+\frac{1}{m}\right) \neq 0$

donc: $(xTy)+\frac{1}{m} \neq 0$ c'est-à-dire $xTy \neq -\frac{1}{m}$

cela signifie que: $xTy \in G$

D'où: $\forall (x;y) \in G^2$; $xTy \in G$, ainsi G est une partie stable dans $(\mathbb{R},T)$

b) Montrons que $(G;T)$ est un groupe commutatif

• G est une partie stable dans $(\mathbb{R};T)$ donc T est commutative et associative

dans G

• On a: $(\forall x \in G)$, $xT0 = x$, donc 0 est l'élément neutre de T dans G

• Soit a un élément de G et a' son symétrique s'il existe dans G , on a

$$aTa' = 0 \Leftrightarrow a' + a + maa' = 0$$
$$\Leftrightarrow a'(1+ma) = -a$$
$$\Leftrightarrow a' = \frac{-a}{1+ma} \qquad \text{(car } a \in G \text{ donc: } a \neq -\frac{1}{m}\text{)}$$

D'autre part, on a: $a' + \frac{1}{m} = \frac{1}{m} - \frac{a}{1+ma}$

$$= \frac{1}{m(1+ma)}$$

Donc: $a' + \frac{1}{m} \neq 0$, c'est-à-dire: $a' \neq -\frac{1}{m}$ d'où: $a' \in G$

Ainsi: $(\forall a \in G)(\exists! a' \in G)$; $aTa' = 0$ et $a'Ta = 0$

Donc: tout élément a de G admet un symétrique a' dans $(G;T)$ et par suite $(G;T)$ est un groupe commutatif.

Exercice 17

1) Montrons que: $\forall (x;y) \in I^2$; $e^{x+y} - e^x - e^y + 2 > 1$

Soit x et y deux éléments de l'intervalle I , on a:

$$(e^{x+y} - e^x - e^y + 2) - 1 = e^x e^y - e^x - e^y + 1 = e^x(e^y - 1) - (e^y - 1)$$
$$= (e^x - 1)(e^y - 1)$$

Puisque $x > 0$ et $y > 0$ alors $e^x > 1$ et $e^y > 1$ c'est-à-dire:

$e^x - 1 > 0$ et $e^y - 1 > 0$ donc $(e^x - 1)(e^y - 1) > 0$

Signifie que: $(e^{x+y} - e^x - e^y + 2) > 1$

D'où: $\forall (x;y) \in I^2$; $e^{x+y} - e^x - e^y + 2 > 1$

2) a) Montrons que f est un isomorphisme de $(I;\times)$ dans $(I;T)$

• Soit x et y deux éléments de I , on a:

$f(xy) = \ln(xy+1)$ et $f(x)Tf(y) = \ln(e^{f(x)+f(y)} - e^{f(x)} - e^{f(y)} + 2)$

Puisque: $e^{f(x)+f(y)} - e^{f(x)} - e^{f(y)} + 2 = e^{\ln(1+x)+\ln(1+y)} - e^{\ln(1+x)} - e^{\ln(1+y)} + 2$

$$= e^{\ln((1+x)(1+y))} - (1+x) - (1+y) + 2$$
$$= (x+1)(y+1) - x - y = 1 + xy$$

Alors: $f(x)Tf(y) = \ln(1+xy)$ donc $f(xy) = f(x)Tf(y)$

d'où: $\forall (x;y) \in I^2$; $f(xy) - f(x)Tf(y)$ par suite f est un homomorphisme de $(I;\times)$ dans $(I;T)$

• Montrons f est bijective de I sur I .

Soit $y \in I$, existe t-il un unique x de I tel que $f(x) = y$

On a: $f(x) = y \Leftrightarrow \ln(1+x) = y$

$\Leftrightarrow e^y = 1 + x$

$\Leftrightarrow x = e^y - 1$

Puisque $y > 0$ alors $e^y > 1$ c'est-à-dire: $x > 0$

donc: $(\forall y \in I)\ (\exists! x \in I)/f(x) = y$, d'où f est bijective de I sur I et par conséquent f est un isomorphisme de $(I;\times)$ vers $(I;T)$.

b) Déduction:

f est un isomorphisme de $(I;\times)$ sur $(I;T)$ et $(I;\times)$ est un groupe commutatif donc $(I;T)$ est un groupe commutatif.

Exercice 18

1) Montrons que H est un sous-groupe de $(G;*)$

• On a: $H \neq \phi$ car $e \in H \quad (e = a^0)$

• Soit x et y deux éléments de H , on a: $\begin{cases} x \in H \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z});\ x = a^n \\ y \in H \Leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{Z});\ y = a^m \end{cases}$

On a $x * y^{-1} = a^n * a^{-m} = a^{n-m}$

Puisque $n - m \in \mathbb{Z}$ alors $a^{n-m} \in H$ c'est-à-dire: $x * y \in H$

donc: $\forall (x;y) \in H^2$; $x * y^{-1} \in H$, d'où H est un sous groupe du groupe $(G;*)$

2) Montrons que H est le plus petit sous-groupe de $(G;*)$ qui contient a

Soit K un sous-groupe du groupe $(G;*)$ tel que $a \in K$

Soit $x \in H$, donc: $(\exists n \in \mathbb{Z})$; $x = a^n$

-Si $n \in \mathbb{N}$ alors: $x = a^n = \underbrace{a * a * .... * a}_{n\text{fois}}$

Puisque $(K;*)$ est un groupe alors $x \in K$

- Si $n \in \mathbb{Z}^-$ alors $x = a^n = \underbrace{a^{-1} * a^{-1} * \ldots * a^{-1}}_{-n \text{ fois}}$

On a: $a \in K$ donc $a^{-1} \in K$ d'où: $x \in K$

Par suite : $(\forall x \in H)$, $x \in K$ c'est-à-dire: $H \subset K$

Ainsi H est le plus petit sous-groupe du groupe $(G;*)$ contenant a

Exercice 19

1) Montrons que $(G;*)$ est un groupe non commutatif

• Montrons que $*$ n'est pas commutative

On a: $(1;1)*(3;0) = \left(3;\frac{1}{3}\right)$ et $(3;0)*(1;1) = (3;3)$

donc: $(1;1)*(3;0) \neq (3;0)*(1;1)$ d'où la loi $*$ n'est pas commutative.

• Associativité de la loi $*$

Soit $(a;b)$; $(c;d)$ et $(e;f)$ des éléments de G , on a:

$(a;b)*[(c;d)*(e;f)] \quad (a;b)*\left(ce;cf+\frac{d}{e}\right) \quad \left(ace;acf+\frac{ad}{e}+\frac{b}{ce}\right)$

et $[(a;b)*(c;d)]*(e;f) = \left(ac;ad+\frac{b}{c}\right)*(e;f) \quad \left(ace;acf+\frac{ad}{e}+\frac{b}{ce}\right)$

Donc: $\forall((a;b);(c;d);(e;f)) \in G^3$

$(a;b)*[(c;d)*(e;f)] = [(a;b)*(c;d)]*(e;f)$

D'où la loi $*$ est associative.

• Cherchons l'élément neutre $(a;b)$ dans $(G;*)$

On a $\forall(x;y) \subset G$, $(x;y)*(a;b) = (x,y) \Leftrightarrow \forall(x;y) \in G$; $\left(ax;bx+\frac{y}{a}\right) = (x;y)$

$$\Leftrightarrow \forall(x;y) \in G; \begin{cases} ax = x \\ bx + \frac{y}{a} = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall(x;y) \in G; \begin{cases} x(a-1) = 0 \\ xab + y(1-a) = 0 \end{cases}$$

donc: $a - 1 = 0$ et $ab = 0$ c'est-à-dire: $a = 1$ et $b = 0$

et on a: $(1;0)*(x,y) \quad (x,y)$, d'où $(1;0)$ est l'élément neutre dans $(G;*)$

• Cherchons les éléments symétrisables dans $(G;*)$

Soit (a,b) un élément de G, existe t-il un élément $(x;y)$ de G ?

tel que: $(a;b)*(x;y) = (1;0)$ et $(x;y)*(a;b) = (1;0)$

On a: $(x;y)*(a;b)-(1;0)\Leftrightarrow\left(ax;bx+\frac{y}{a}\right)-(1;0)$

et on a: $(a;b)*\left(\frac{1}{a};-b\right)=(1;0)\Leftrightarrow\begin{cases}ax=1\\bx+\frac{y}{a}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{a}\ \ car\ a\neq 0\\y=-b\end{cases}$

Donc tout élément $(a;b)$ de G admet un symétrique dans G qui est $\left(\frac{1}{a};\ \ b\right)$; par suite $(G;*)$ est un groupe non commutatif.

2) Déterminons l'ensemble C:

Soit $(x;y)$ et $(a;b)$ deux éléments de G, on a:

$(a;b)*(x;y)=\left(ax;ay+\frac{b}{x}\right)$ et $(x;y)*(a;b)=\left(xa;xb+\frac{y}{a}\right)$

Donc: $(a;b)\in C\Leftrightarrow(\forall(x;y)\in G);xb+\frac{y}{a}=ay+\frac{b}{x}$

$\Leftrightarrow(\forall(x;y)\in G);x^2ab+xy=a^2xy+ab$

$\Leftrightarrow(\forall(x;y)\in G);ab(x^2-1)+xy(1-a^2)=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}ab=0\\1-a^2=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow(a=1$ et $b=0)$ ou $(a=-1$ et $b=0)$

Donc: $C=\{(1;0),(-1;0)\}$

3) a) Montrons que: $H_1=\mathbb{R}^*\times\{0\}$ est un sous-groupe du groupe $(G;*)$

- On a: $H_1\neq\phi$ car $(1;0)\in H_1$

- Soit $X=(x;0)$ et $Y=(y;0)$ deux éléments de H

On a: $Y'=\left(\frac{1}{y};0\right)$ est le symétrique de Y dans $(G;*)$

Donc: $X*Y'=(x;0)*\left(\frac{1}{y};0\right)=\left(\frac{x}{y};0\right)$

d'où: $X*Y'\in H_1$ car $\frac{x}{y}\neq 0$, par suite H_1 est un sous-groupe du groupe $(G;*)$

b) Montrons que: $H_2=\{1\}\times\mathbb{R}$ est un sous-groupe du groupe $(G;*)$

- On a: $H_2\neq\phi$ car $(1;0)\in H_2$

- Soit $X=(1;x)$ et $Y=(1;y)$ deux éléments de H_2

On a: $Y'=(1;-y)$ est le symétrique de Y dans $(G;*)$

Donc: $X*Y'=(1;x)*(1;-y)=(1;x-y)$, d'où $X*Y'\in H_2$

Par suite H_2 est un sous-groupe du groupe $(G;*)$

c) Montrons que: $H_3 = \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}$ est un sous-groupe du groupe $(G;*)$

- On a: $H_3 \neq \phi$ car $(1;0) \in H_3$

- Soit $X=(a;b)$ et $Y=(c;d)$ deux éléments de H_3

On a: $Y' = \left(\frac{1}{c};\quad d\right)$ est le symétrique de Y dans $(G,*)$ (car $c \in \mathbb{Q}^*$)

Donc: $X * Y' = (a;b) * \left(\frac{1}{c};-d\right) = \left(\frac{a}{c};bc-ad\right)$

Puisque: $\frac{a}{c} \in \mathbb{Q}^*$ et $bc-ad \in \mathbb{Q}$ alors $\left(\frac{a}{c};bc-ad\right) \in H_3$

donc: $X * Y' \in H_3$, par suite H_3 est un sous-groupe du groupe $(G;*)$

4) • Montrons que $(H;*)$ est un sous-groupe commutatif du groupe $(G;*)$

- On a: $H \neq \phi$ car $(1;0) \in H$

- Soit $X=\left(x;k\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)$ et $Y=\left(y;k\left(y-\frac{1}{y}\right)\right)$ deux éléments de H ,

$Y' = \left(\frac{1}{y};-k\left(y-\frac{1}{y}\right)\right)$ est le symétrique de Y dans $(G;*)$

Donc: $X * Y' = \left(x;k\left(x-\frac{1}{x}\right)\right) * \left(\frac{1}{y};-k\left(y-\frac{1}{y}\right)\right)$

$$= \left(\frac{x}{y};kx\left(\frac{1}{y}-y\right)+ky\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{x}{y};k\left(\frac{x}{y}-xy+xy-\frac{y}{x}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{x}{y};k\begin{pmatrix}\frac{x}{y} & 1\\ & \frac{x}{y}\end{pmatrix}\right)$$

On a: $\frac{x}{y} \neq 0$ donc $X * Y' \in H$, d'où $(H;*)$ est un sous-groupe du groupe $(G;*)$

• Montrons que $*$ est commutative dans H

Soit $X=\left(x;k\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)$ et $Y\left(y;k\left(y-\frac{1}{y}\right)\right)$ deux éléments de H , on a:

$$X * Y = \left(x;k\left(x-\frac{1}{x}\right)\right) * \left(y;k\left(y-\frac{1}{y}\right)\right)$$

$$= \left(xy;kx\left(y-\frac{1}{y}\right)+k\left(x-\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{y}\right)$$

$$= \left(xy;k\left(xy-\frac{1}{xy}\right)\right)$$

et: $Y*X=\left(y;k\left(y-\frac{1}{y}\right)\right)*\left(x;k\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)$

$$=\left(yx;yk\left(x-\frac{1}{x}\right)+k\left(y-\frac{1}{y}\right)\times\frac{1}{x}\right)$$

$$=\left(yx;k\left(xy-\frac{1}{xy}\right)\right)$$

donc: $X*Y=Y*X$ pour tous X et Y de H

d'où la loi $*$ est commutative dans H, par suite $(H;*)$ est un sous-groupe commutatif du groupe $(G;*)$

1) Montrons que φ est un isomorphisme de $(]0,+\infty[;\times)$ vers $(E,\times)$

Soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}^{*+}$, on a :

$$\varphi(x)\times\varphi(y) \quad M(x)\times M(y)=\begin{pmatrix}x & 0\\ x\ln x & x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}y & 0\\ y\ln y & y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}xy & 0\\ xy\ln x+xy\ln y & xy\end{pmatrix}$$

et puisque : $xy\ln x+xy\ln y=xy(\ln x+\ln y)=xy\ln(xy)$

alors : $\varphi(x)\times\varphi(y)=\begin{pmatrix}xy & 0\\ xy\ln(xy) & xy\end{pmatrix}=M(xy)=\varphi(xy)$

Donc : $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^{*+})^2;\varphi(x\times y)=\varphi(x)\times\varphi(y)$

D'où φ est homomorphisme de $(\mathbb{R}^{*};\times)$ vers $(E;\times)$.

• Montrons que φ est bijective.

On a : $(\forall M\in E);(\exists x\in\mathbb{R}^{*+})/M=\begin{pmatrix}x & 0\\ x\ln x & x\end{pmatrix}$

signifie que : $(\forall M\in E);(\exists x\in\mathbb{R}^{*+})/\varphi(x)=M$

donc φ est une application surjective.

• Soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}^{*}$ tels que : $\varphi(x)=\varphi(y)$

On a : $\varphi(x)=\varphi(y)\Rightarrow\begin{pmatrix}x & 0\\ x\ln x & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y & 0\\ y\ln y & y\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow x=y \text{ et } x\ln x=y\ln y$$

$$\Rightarrow x=y$$

Donc : $\forall(x;y)\in(\mathbb{R}^{*+})^2;\varphi(x)=\varphi(y)\Rightarrow x=y$

D'où φ est une application injective et par suite φ est bijective.

Donc φ est un isomorphisme de $(]0;+\infty[;\times)$ vers $(E;\times)$

2) Déduisons la structure de $(E;\times)$

On a : $(E;\times)$ et $(]0;+\infty[;\times)$ sont isomorphes et on a $(]0;+\infty[;\times)$ est un groupe commutatif donc $(E;\times)$ est un groupe commutatif.

3) • Déterminons $(M(x))^{-1}$ et $(M(x))^n$ ou $x \in]0;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Soit $x \in \mathbb{R}^{*+}$, on a :

$$(M(x))^{-1} = (\varphi(x))^{-1} = \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ -\frac{\ln x}{x} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

et $(M(x))^n = (\varphi(x))^n = \varphi(x^n) = \begin{pmatrix} x^n & 0 \\ nx^n \ln x & x^n \end{pmatrix}$

Exercice 31

1) Montrons que $(E;\times)$ et $(\mathbb{Z};+)$ sont isomorphes.

On considère l'application : $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow E$

$$a \longmapsto M_a$$

Montrons que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{Z};+)$ vers $(E;\times)$

• D'après la définition de l'ensemble E, on a :

$(\forall A \in E);(\exists a \in \mathbb{Z})/A = M_a - \varphi(a)$ donc f est surjective.

• Soit a et b deux éléments de $\mathbb{Z}$ tels que : $\varphi(a) - \varphi(b)$

On a : $\varphi(a) = \varphi(b) \rightarrow M_a = M_b$

$$\Rightarrow 2^a = 2^b \text{ et } a2^a = b2^b$$

$$\Rightarrow 2^{a-b} = 1 \text{ et } a2^a = b2^b$$

$$\Rightarrow a - b = 0 \text{ et } a2^a = b2^b$$

$$\Rightarrow a = b$$

Donc φ est injective d'où φ est bijective

• Soit a et b deux éléments de $\mathbb{Z}$, on a :

$$\varphi(a+b) = M_{a+b} = \begin{pmatrix} 2^{a+b} & 0 \\ (a+b)2^{a+b} & 2^{a+b} \end{pmatrix}$$

et $\varphi(a) \times \varphi(b) - M_a \times M_b - \begin{pmatrix} 2^a & 0 \\ a2^a & 2^a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^b & 0 \\ b2^b & 2^b \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2^{a+b} & 0 \\ a2^{a+b} + b2^{a+b} & 2^{a+b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{a+b} & 0 \\ (a+b)2^{a+b} & 2^{a+b} \end{pmatrix}$$

Donc : $\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2$, $\varphi(a+b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$, d'où φ est un isomorphisme de $(\mathbb{Z};+)$ vers $(E;\times)$.

Puisque $(\mathbb{Z},+)$ est un groupe commutatif alors $(E;\times)$ est aussi un groupe commutatif.

2) Montrons que : $(\forall p \in \mathbb{Z})\,;(M_a)^p = M_{ap}$

• Montrons par récurrence que : $(\forall p \in \mathbb{N}) : (M_a)^p = M_{ap}$

Initialisation : On a : $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ et $(M_a)^0 = I$ donc : $(M_a)^0 = M_0$

• Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$, on suppose que : $(M_a)^p = M_{ap}$ et on montre que : $(M_a)^{p+1} = M_{a(p+1)}$

On a : $M_{a(p+1)} = \varphi((p+1)a) = \varphi(pa+a) = \varphi(pa) \times \varphi(a)$

$= M_{pa} \times M_a = (M_a)^p \times M_a = (M_a)^{p+1}$

Donc la propriété est vraie pour $p+1$, d'où $(\forall p \in \mathbb{N}) : (M_a)^p = M_{pa}$

• Soit $p \in \mathbb{Z}$, montrons que : $(M_a)^p = M_{ap}$

On a : $(M_a)^p = (M_a^{-1})^{-p} = (\varphi(-a))^{-p} = \varphi((-p)(-a)) = \varphi(pa) = M_{pa}$

φ est un isomrphisme de $(\mathbb{Z};+)$ vers $(E;\times)$

on a : $\varphi(-a) = (\varphi(a))^{-1}$ c'est-à-dire : $M_{-a} = (M_a)^{-1}$

D'où : $(\forall p \in \mathbb{Z})\,;(M_a)^p = M_{pa}$

3) a) Montrons que $F_{(a;b)}$ est un sous-groupe de $(E;\times)$

• On a : $(M_a)^0 \times (M_b)^0 = I \times I = I$ donc $I \in F_{(a;b)}$, d'où $F_{(a;b)} \neq \phi$

• Soit X et Y deux éléments de $F_{(a;b)}$:

On a : $\begin{cases} X \in F_{(a;b)} \Leftrightarrow \exists (p;q) \in \mathbb{Z}^2 ; X = (M_a)^p \times (M_b)^q \\ Y \in F_{(a;b)} \Leftrightarrow \exists (m;n) \in \mathbb{Z}^2 ; Y = (M_a)^m \times (M_b)^n \end{cases}$

. . . Si $(E;\times)$ est un groupe commutatif alors le symétrique de $a*b$ et $b'*a'$ c'est à dire : $(a*b)' = b'*a'$

Puisque $(E;\times)$ est un groupe commutatif alors :

$$\begin{aligned} XY^{-1} &= ((M_a)^p \times (M_b)^q)((M_a)^m \times (M_b)^n)^{-1} \\ &= ((M_a)^p \times (M_b)^q)((M_b)^{-n} \times (M_a)^{-m}) \\ &= (M_a)^{p-m} \times (M_b)^{q-n} \end{aligned}$$

donc : $XY^{-1} \in F_{(a;b)}$, d'où $F_{(a;b)}$ est un sous-groupe du groupe $(E;\times)$

b) Soit $c \in \mathbb{Z}$; montrons que : $a \wedge b | c \iff M_c \in F_{(a;b)}$

$M_c \in F_{(a;b)} \iff \exists (p;q) \in \mathbb{Z}^2 \ ; \ M_c = (M_a)^p \times (M_b)^q$

$\iff \exists (p;q) \in \mathbb{Z}^2 \ ; M_c = M_{ap} \times M_{bq}$

$\iff \exists (p;q) \in \mathbb{Z}^2 \ ; M_c = M_{ap+bq}$

$\iff \exists (p;q) \in \mathbb{Z}^2 \ ; c = pa + qb$ (car φ est injective)

On pose : $d = a \wedge b$, on a : $\begin{cases} d | a \\ d | b \end{cases} \Rightarrow d | pa + qb$

$\Rightarrow d | c$

Donc : $M_c \in F_{(a;b)} \Rightarrow a \wedge b | c$

Réciproquement : $a \wedge b | c \iff (\exists k \in \mathbb{Z}) / c = k(a \wedge b)$

$\Longrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) ; (\exists (p;q) \in \mathbb{Z}^2) ; c = k(pa + qb)$

$\Longrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) ; (\exists (p;q) \in \mathbb{Z}^2) ; M_c = M_{k(pa+qb)}$

$\Longrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) ; (\exists (p;q) \in \mathbb{Z}^2) ; M_c = (M_{pa+qb})^k$

$\Longrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) ; (\exists (p;q) \in \mathbb{Z}^2) ; M_c = (M_a)^{pk} \times (M_b)^{kq}$

$\Longrightarrow M_c \in F_{(a;b)}$

D'où : $M_c \in F_{(a;b)} \iff a \wedge b | c$

c) Déduction :

On a : $a \wedge b = 1 \iff \exists (p;q) \in \mathbb{Z}^2 \ / \ pa + qb = 1$

$\iff \exists (p;q) \in \mathbb{Z}^2 \ / \ M_{pa+qb} = M$

$\iff \exists (p;q) \in \mathbb{Z}^2 \ / (M_a)^p \times (M_b)^q = M_1$

Donc : $E = F_{(a;b)} \Longrightarrow M_1 \in F_{(a;b)}$

$\Longrightarrow \exists (p;q) \in \mathbb{Z}^2 \ / M_1 = (M_a)^p \times (M_b)^q$

$\Longrightarrow a \wedge b = 1$

Réciproquement : Supposons que : $a \wedge b = 1$, on a donc :

$\exists (p;q) \in \mathbb{Z}^2 \ / M_1 = (M_a)^p \times (M_b)^q$

On a : $F_{(a;b)} \subset E$, montrons que $E \subset F_{(a;b)}$

Soit M_c un élément de E , on a : $M_c = M^c = (M_a^p \times M_b^q)^c = M_a^{pc} \times M_b^{qc}$

donc $M_c \in F_{(a;b)}$ d'où $E \subset F_{(a;b)}$ et par suite : $E = F_{(a;b)}$

1) Montrons que A est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\times)$

Soit $M(x)$ et $M(y)$ deux éléments de A tels que :

$M(x)=\begin{pmatrix}1 & -x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ x & -\frac{x^2}{2} & 1\end{pmatrix}$ et $M(y)=\begin{pmatrix}1 & -y & 0\\ 0 & 1 & 0\\ y & -\frac{y^2}{2} & 1\end{pmatrix}$ où x et y sont des nombres réels.

On a : $M(x)\times M(y)=\begin{pmatrix}1 & -x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ x & \frac{x^2}{2} & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & -y & 0\\ 0 & 1 & 0\\ y & -\frac{y^2}{2} & 1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1 & -y-x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ x+y & -xy-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2} & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -(x+y) & 0\\ 0 & 1 & 0\\ x+y & -\frac{(x+y)^2}{2} & 1\end{pmatrix}=M(x+y)$$

Donc : $\forall(M;N)\in A^2$; $M\times N\in A$, d'où A est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\times)$

2) a) Montrons que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(A;\times)$.

• Soit $M(x)$ et $M(y)$ deux éléments de A, on a d'après la question précédente : $M(x)\times M(y)=M(x+y)$ signifie que : $f(x)\times f(y)=f(x+y)$

Donc : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$; $f(x+y)=f(x)\times f(y)$, d'où f est un homomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ vers $(A;\times)$

• On a : $(\forall M\in A);(\exists x\in\mathbb{R});M=M(x)$

signifie que : $(\forall M\in A);(\exists x\in\mathbb{R});M=f(x)$

Donc f est une application surjective.

• Soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que : $f(x)=f(y)$

On a : $f(x)=f(y)\Longrightarrow M(x)=M(y)$

$\Longrightarrow x=y$ et $\frac{x^2}{2}=\frac{y^2}{2}$

$\Longrightarrow x=y$ et $|x|=|y|$

$\Longrightarrow x = y$

Donc f est une application injective et par suite f est une application bijective.

D'où f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}\,;+)$ vers $(A\,;\times)$

b) Déduction :

On a $(\mathbb{R}\,;+)$ et $(A\,;\times)$ sont isomorphes et $(\mathbb{R}\,;+)$ est un groupe commutatif donc $(A\,;\times)$ est un groupe commutatif.

c) Déterminons $(M(x)\times M(y))^{-1}$:

$$\begin{aligned}(M(x)\times M(y))^{-1} &= (f(x)\times f(y))^{-1}\\ &= (f(x+y))^{-1}\\ &= f(-x-y) = M(-x-y)\end{aligned}$$

Donc : $(M(x)\times M(y))^{-1} = M(-x-y)$

d) Résolvons dans A l'équation $X^2 = K$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$ tel que : $X = M(x)$,

on a : $X^2 = K \Longleftrightarrow (M(x))^2 = M(1)$

$\Longleftrightarrow (f(x))^2 = f(1)$

$\Longleftrightarrow f(2x) = f(1)$ (car f est un homomorphisme)

$\Longleftrightarrow 2x = 1$ (car f est bijective)

$\Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est : $S = \left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$

Exercice 23

1) Montrons que $\times$ est une loi de composition interne dans E

Soit M_a et M_b deux éléments de E, on a :

$$\begin{aligned}M_a \times M_b &= \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0\\ ae^a & e^a & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} e^b & 0 & 0\\ be^b & e^b & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{a+b} & 0 & 0\\ (a+b)e^{a+b} & e^{a+b} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= M_{a+b}\end{aligned}$$

donc , $\forall (M, N)\in E^2$; $M\times N\in E$, d'où $\times$ est une loi de composition interne dans E

2) a) Montrons que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ vers $(E;x)$

• Soit a et b deux éléments de $\mathbb{R}$, on a d'après la question précédente :

$M_a \times M_b = M_{a+b}$ signifie que : $\varphi(a)\times\varphi(b)=\varphi(a+b)$

donc : $\forall (a;b)\in\mathbb{R}^2 ; \varphi(a+b) = \varphi(a)\times\varphi(b)$, d'où φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ vers $(E;\times)$.

• D'après la définition de l'ensemble E , on a :

$(\forall M\in E);(\exists a\in\mathbb{R});M=M_a$

c'est-à-dire : $(\forall M\in E);\ (\exists a\in\mathbb{R});M=\varphi(a)$

donc φ est une application surjective

• Soit a et b deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que : $\varphi(a) \neq \varphi(b)$

On a : $\varphi(a)=\varphi(b) \Longrightarrow M_a = M_b$

$\Longrightarrow e^a = e^b$ et $ae^a = be^b$

$\Longrightarrow a=b$

Donc φ est une application injective et par suite φ est une application bijective.

D'où φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ vers $(E;\times)$

b) Déduction :

On a : $(\mathbb{R};+)$ et $(E;\times)$ sont isomorphes et $(\mathbb{R};+)$ est un groupe commutatif donc $(E;\times)$ est un groupe commutatif.

3) Montrons que : $(\forall k\in\mathbb{Z});(M_a)^k = M_{ka}$

- Montrons par récurrence que : $(\forall k\in\mathbb{N});(M_a)^k \quad M_{ka}$

• Initialisation : Pour $k=0$, on a : $(M_a)^0 = I = M_0$

• Hérédité : Soit $k\in\mathbb{N}$, supposons que : $(M_a)^k = M_{ka}$ et montrons que : $M_a^{k+1} = M_{(k+1)a}$

On a : $(M_a)^{k+1} = (M_a)^k \times M_a = M_{ka}\times M_a = f(ka)\times f(a)$

$= f(ka+a) = f((k+1)a) = M_{(k+1)a}$

Donc d'après le principe de la récurrence, on a : $(\forall k\in\mathbb{N});(M_a)^k \quad M_{ka}$

• Soit $k\in\mathbb{Z}$, on a $(E;\times)$ est un groupe commutatif

donc : $(M_a)^k = (M_a^{-1})^{-k} = (M_a)^{-k} = M_{ka}$ (car $-k\in\mathbb{N}$)

D'où : $(\forall k\in\mathbb{Z});(M_a)^k = M_{ka}$

Exercice 24

1) a) Montrons que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ vers $(A;\times)$

• Soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}$, on a :

$$f(x+y)=M(x+y)=\begin{pmatrix} a^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $f(x)\times f(y) = M(x)\times M(y) = \begin{pmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} a^x a^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $f(x+y)=f(x)\times f(y)$

D'où $\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2 ; f(x+y) = f(x)\times f(y)$ ainsi f est un homomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ vers $(A;\times)$

• D'après la définition de l'ensemble A, on a : $(\forall M\subset A);(\exists x\in\mathbb{R}); M = M(x)$

c'est-à-dire : $(\forall M\in A);(\exists x\in\mathbb{R}); M=f(x)$

Donc l'application f est surjective

• Soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que : $f(x)=f(y)$

On a : $f(x)=f(y)\Longrightarrow\begin{pmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow a^x = a^y$ et $x=y$

$\longrightarrow x = y$

Donc : $\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2$; $f(x)=f(y)\Longrightarrow x=y$

D'où l'application f est injective et par suite l'application f est b jective.

Ainsi f est un isomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ vers $(A;\times)$

b) Déduction :

On a $(\mathbb{R}:+)$ et $(A;\times)$ sont isomorphes et $(\mathbb{R};+)$ est un groupe commutatif donc $(A;\times)$ est un groupe commutatif.

c) Déterminons $(M(x))^{-1}$ pour $x\in\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $(M(x))^{-1}=(f(x))^{-1}=f(-x)=M(-x)$

donc : $(M(x))^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Déterminons $(M(x))^n$ en fonction de n, x et a.

Pour $n = 2$, on a $(M(x))^2 = (f(x))^2 = f(2x) = M(2x)$

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}; (M(x))^n = M(nx)$

• Initialisation : Pour $n = 2$ c'est vérifiée

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, supposons que : $(M(x))^n = M(nx)$

et montrons que : $(M(x))^{n+1} = M((n+1)x)$

On a : $(M(x))^{n+1} = (M(x))^n \times M(x) = M(nx) \times M(x)$

$= f(nx) \times f(x) = f(nx + x)$

$= f((n+1)x) = M((n+1)x)$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}; (M(x))^n = M(nx)$ D'où : $(M(x))^n = \begin{pmatrix} a^{nx} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & nx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Montrons que G est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$

Soit M et N deux éléments de G tels que :

$M = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & x' & y' \\ 0 & 1 & z' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où x , y , z , x' , y' et z'

sont des nombres réels.

On a : $M \times N = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x' & y' \\ 0 & 1 & z' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+x' & y'+xz'+y \\ 0 & 1 & z+z' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $M \times N \in G$, d'où $\forall (M;N) \in G^2$; $M \times N \in G$

par suite G est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}); \times)$

2) Montrons que $(G; \times)$ est un groupe commutatif

Soit M et N deux éléments de G tels que :

$M = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & x' & y' \\ 0 & 1 & z' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou x, y, z, x', y' et z' sont des nombres réels.

On a : $M\times N=\begin{pmatrix}1 & x+x' & y'+xz'+y\\ 0 & 1 & z+z'\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ d'après la question 1)

et $N\times M=\begin{pmatrix}1 & x' & y'\\ 0 & 1 & z'\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & x & y\\ 0 & 1 & z\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x'+x & y+x'z+y'\\ 0 & 1 & z+z'\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Donc : $N\times M\neq M\times N$ car $xz'\neq x'z$

Donc : $\times$ est non commutative dans G.

Puisque G est une partie de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\times)$ et la loi $\times$ est associative dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ alors la loi $\times$ est associative dans G.

• Pour $x-y-z-0$, on a : $M-I_3$ ou $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ est l'élément neutre dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$, donc I_3 est l'élément neutre dans $(G;\times)$.

• Soit M un élément de G tel que : $M=\begin{pmatrix}1 & x & y\\ 0 & 1 & z\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

On a : $\det M=\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 0 & 1 & z\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$, donc M est inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Déterminons la matrice inverse N de M

En posant : $N=\begin{pmatrix}1 & x' & y'\\ 0 & 1 & z'\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, on a :

$$M\times N=I\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & x'+x & y+x'z+y'\\ 0 & 1 & z+z'\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x'+x=0\\ z+z'=0\\ y'+x'z+y=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-x\\ z'=z\\ y'=xz-y\end{cases}$$

Donc : $M^{-1}=N=\begin{pmatrix}1 & -x & xz-y\\ 0 & 1 & -z\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ Vérifier que: $M^{-1}\times M=I_3$

D'où : $(\forall M \in G); M^{-1} \in G$

Par suite $(G;\times)$ est un groupe non commutatif.

Exercice 26

Partie 1 :

1) Montrons que $*$ est une loi de composition interne dans G

Soit x et y deux éléments de G, on a :

$$(x*y)-\frac{1}{2}=x+y-2xy-\frac{1}{2}=-2x\left(y-\frac{1}{2}\right)+(y\quad\frac{1}{2})$$

$$=\left(y-\frac{1}{2}\right)(-2x+1)=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)$$

Puisque $x\neq\frac{1}{2}$ et $y\neq\frac{1}{2}$ alors $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)\neq 0$

signifie que : $(x*y)-\frac{1}{2}\neq 0$ donc $x*y\in G$

D'où : $\forall (x;y)\in G; x*y\in G$

Par conséquent $*$ est une loi de composition interne dans G .

2) Montrons que $(G;*)$ est un groupe commutatif

• Commutativ té de la loi $*$:

Soit x et y deux éléments de G, on a :

$x*y=x+y-2xy=y+x-2yx=y*x$

Donc : $\forall (x;y)\subset G^{2}$; $x*y=y*x$, d'où $*$ est commutative dans G.

• Associativité de la loi $*$:

Soit x , y et z des éléments de G, on a :

$$(x*y)*z=(x+y-2xy)*z$$

$$=x+y-2xy+z-2z(x+y-2xy)$$

$$=x+y+z-2(xy+xz+yz)+4xyz$$

et $x*(y*z)=x*(y+z-2yz)$

$$=x+y+z-2yz-2x(y+z-2yz)$$

$$=x+y+z-2yz-2xy-2xz+4xyz$$

donc : $(x*y)*z=x*(y*z)$, d'où $\forall (x;y;z)\subset G^{3}$, $(x*y)*z=x*(y*z)$

Par suite $*$ est associative dans G.

• Élément neutre :

Soit e l'elément neutre de la loi $*$ dans G s'il existe.

On a : $(\forall x \in G) ; x * e = x \iff (\forall x \in G) ; x + e - 2ex = x$

$$\iff (\forall x \in G) ; e(2x-1) = 0$$

$$\iff e = 0 \text{ car } x \neq \frac{1}{2}$$

et on a $*$ est commutative donc : $(\forall x \in G)$; $0 * x = x$

D'où : 0 est l'élément neutre dans $(G ; *)$

• Éléments symétrisables

Soit $x \in G$ et x' son symétrique dans $(G ; \times)$ s'il existe.

On a : $x' * x = 0 \iff x + x' - 2xx' = 0$

$$\iff x'(1-2x) = -x$$

$$\iff x' = \frac{x}{2x-1} \text{ (car } x \neq \frac{1}{2}\text{)}$$

Puisque $*$ est commutative alors : $x * \frac{x}{2x-1} = 0$

De plus, on a : $x' - \frac{1}{2} = \frac{x}{2x-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2(2x-1)}$

donc : $x' - \frac{1}{2} \neq 0$ c'est-à-dire : $x' \in G$

D'où tout élément x de G admet un symétrique $x' = \frac{x}{2x-1}$ dans G pour la loi $*$, par suite $(G : *)$ est un groupe commutatif.

3)Montronsque: $(\forall x \in G) ; (\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; \underbrace{x * x * \ldots * x}_{n \text{ fois}} = \frac{1}{2}(1 - (1-2x)^{n+1})$

En utilisant le raisonnement par récurrence

• Initialisaion : Pour $n = 2$, on a : $x * x = 2x - 2x^2$

et $\frac{1}{2}(1-(1-2x)^2) = \frac{1}{2}(1 - 1 + 4x - 4x^2) = 2x - 2x^2$

Donc : $x * x = \frac{1}{2}(1-(1-2x)^2)$

• Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

Supposons que : $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{n \text{ fois}} = \frac{1}{2}(1-(1-2x)^{n+1})$

Montrons que: $x * x * \ldots * x = \frac{1}{2}(1-(1-2x)^{n+1})$

On a : $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{(n+1) \text{ fois}} = \underbrace{(x * x * \ldots * x)}_{n \text{ fois}} * x$

$$= \frac{1}{2}(1-(1-2x)^n) * x$$

$$= \frac{1}{2}(1 - (1 - 2x)^n) + x - x(1-(1-2x)^n)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 2x)^n + x(1 - 2x)^n$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 2x)^n(1 - 2x)$$
$$= \frac{1}{2}(1 - (1-2x)^{n+1})$$

Donc la propriété est vraie pour $n+1$

• Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}); \underbrace{x * x * \ldots * x}_{n \text{ fois}} = \frac{1}{2}(1 - (1 - 2x)^n)$

Partie 2 :

1) Montrons que A est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R}); \times)$

Soit $M(x)$ et $M(y)$ deux éléments de A, on a :

$M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}$ et $M(y) = \begin{pmatrix} 1-y & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1-y \end{pmatrix}$ où x et y sont des éléments de G.

On a : $M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-y & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1-y \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (1-x)(1-y)+xy & 0 & y(1-x)+x(1-y) \\ 0 & 1 & 0 \\ x(1-y)+y(1-x) & 0 & xy+(1-x)(1-y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-(x+y-2xy) & 0 & x+y-2xy \\ 0 & 1 & 0 \\ x+y-2xy & 0 & 1-(x+y-2xy) \end{pmatrix}$$

Donc : $M(x) \times M(y) = M(x+y-2xy) = M(x*y)$

D'autre part, on a : $\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; x*y \in G$

donc $\forall (x;y) \in G^2 \; ; \; M(x*y) \in A$

d'où A est une partie stable dans $(M_3(\mathbb{R}); \times)$

2) a) Montrons que φ est un isomorph sme de $(G; \times))$ vers $(A; \times)$

• Soit x et y deux éléments de G, on a :

$\varphi(x*y) = M(x*y) = M(x) \times M(y)$ d'après 1)

$= \varphi(x) \times \varphi(y)$

Donc : $\forall (x\,;y) \in G^2\,;\varphi(x*y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$

D'où φ est un homomorphisme de $(G\,;*)$ vers $(A\,;\times)$

• On a d'après la définition de l'ensemble A

$(\forall M \in A)\,;(\exists x \in G)\,;M = M(x)$

c'est-à-dire : $(\forall M \in A)\,;(\exists x \in G)\,;M = \varphi(x)$

Donc l'application φ est surjective.

• Soit x et y deux éléments de G, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \varphi(y) &\Rightarrow M(x) = M(y)\\ &\Rightarrow 1-x = 1-y \quad \text{et } x = y\\ &\to x = y\end{aligned}$$

Donc : $\forall (x;y) \in G^2\,;\varphi(x) = \varphi(y) \;\to x = y$ signifie que φ est injective, par suite φ est bijective; d'où φ est un isomorphisme de $(G\,;*)$ vers $(A\,;\times)$

b) Déduisons la structure de $(A\,;\times)$

On a φ est un isomorphisme de $(G\,;*)$ vers $(A\,;\times)$ et $(G\,;*)$ est un groupe commutatif donc $(A\,;\times)$ est un groupe commutatif.

c) Montrons que $K^n = M\left(\frac{1-2^n}{2}\right)$ où $n \in \mathbb{N}^*$

On a . $K^n = \left(M\left(\frac{1}{2}\right)\right)^n = \left(\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right)^n = \underbrace{\varphi\left(-\frac{1}{2}\right) \times \varphi\left(\frac{1}{2}\right) \times \ldots \times \varphi\left(\frac{1}{2}\right)}_{n \text{ fois}}$

$$= \underbrace{\varphi\left(\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \ldots * -\frac{1}{2}\right)}_{n \text{ fois}}$$

D'après la question 3) de la partie 1, on a :

$$\underbrace{-\frac{1}{2} * -\frac{1}{2} * \ldots * -\frac{1}{2}}_{n \text{ fois}} = \frac{1}{2}\left(1 - \left(1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^n\right) = \frac{1}{2}(1-2^n)$$

Donc : $K^n = \varphi\left(\frac{1-2^n}{2}\right) = M\left(\frac{1-2^n}{2}\right)$

• Montrons que : $(K^n)^{-1} = M\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

On a : $(K^n)^{-1} = \left(\varphi\left(\frac{1-2^n}{2}\right)\right)^{-1} = \varphi\left(\left(\frac{1-2^n}{2}\right)'\right)$ où $\left(\frac{1-2^n}{2}\right)'$ est le symétrique de $\frac{1-2^n}{2}$ dans $(G\,;*)$

Puisque : $\left(\frac{1-2^n}{2}\right)' = \frac{\frac{1-2^n}{2}}{2\left(\frac{1-2^n}{2}\right)-1} = \frac{2^n-1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$

alors : $(K^n)' = \varphi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = M\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

1) Montrons que $(E;+;\times)$ est un anneau commutatif unitaire

• Montrons que $(E;+)$ est un groupe commutatif

On a $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$ est un groupe commutatif, donc il suffit de montrer que $(E;+)$ est un sous groupe du groupe commutatif $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$

-On a : $E \neq \phi$ car $\theta_2 \in E$ pour $a = b = 0$

-Soit M et N deux éléments de E, on a :

$$M \in E \Leftrightarrow \exists (a;b) \in \mathbb{Z}^2 ; M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}$$

$$N \in E \Leftrightarrow \exists (x;y) \in \mathbb{Z}^2 ; N = \begin{pmatrix} x & y \\ 5y & x \end{pmatrix}$$

Donc $M + (-N) = \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & -y \\ -5y & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-x & b-y \\ 5(b-y) & a-x \end{pmatrix}$

En posant : $\alpha = a - x$ et $\beta = b - y$, on a : $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $\beta \in \mathbb{Z}$

et $M + (-N) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 5\beta & \alpha \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $M + (-N) \in E$

D'où : $\begin{cases} \bullet E \neq \phi \\ \bullet \forall (M;N) \in E^2 ; M + (-N) \in E \end{cases}$

Cela signifie que E est un sous-groupe du groupe commutatif $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$, par suite $(E;+)$ est un groupe commutatif.

• Montrons que E est une partie stable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R});\times)$

Soit M et N deux éléments de E tels que :

$M \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}$ et $N - \begin{pmatrix} x & y \\ 5y & x \end{pmatrix}$ où a, b, x et y sont des entiers relatifs.

On a : $M\times N=\begin{pmatrix}a & b\\ 5b & a\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x & y\\ 5y & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+5by & bx+ay\\ 5bx+5ay & 5by+ax\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}ax+5by & ay+bx\\ 5(ay+bx) & ax+5by\end{pmatrix}$

On pose : $\alpha=ax+5by$ et $\beta=ay+bx$, on a : $M\times N=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 5\beta & \alpha\end{pmatrix}$

avec $(\alpha;\beta)\in\mathbb{Z}^2$ donc $M\times N\in E$

D'où $\forall(M;N)\in E^2$, $M\times N\in E$, signifie que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});\times)$.

• On a E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});\times)$ et puisque la multiplication $\times$ est associative et distributive par rappport à l'addition dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors la loi $\times$ est associative et distributive par rapport à $+$ dans E.

• La matrice $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ est 'élément neutre dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});\times)$ et puisque $I\in E$ pour $a=1$ et $b=0$, alors I est l'élément neutre pour la loi $\times$ dans E.

• Soit M et N deux éléments de E tels que : $M=\begin{pmatrix}a & b\\ 5b & a\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix}x & y\\ 5y & x\end{pmatrix}$, on a : $N\times M=\begin{pmatrix}x & y\\ 5y & x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a & b\\ 5b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+5by & bx+ay\\ 5ay+5bx & 5by+ax\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}ax+5by & ay+bx\\ 5(ay+bx) & ax+5by\end{pmatrix}$

et on a d'après ce qui précède : $M\times N=\begin{pmatrix}ax+5by & ay+bx\\ 5(ay+bx) & ax+5by\end{pmatrix}$

donc : $M\times N=N\times M$

d'où : $\forall(M;N)\in E^2$; $M\times N=N\times M$, par suite la loi $\times$ est commutative dans E.

En conclusion on a : - $(E;+)$ est un groupe commutatif

- $\times$ est associative dans E
- $\times$ est distributive par rapport à $+$ dans E
- $\times$ admet un élément neutre dans E
- $\times$ est commutative

Donc $(E;+;\times)$ est un anneau commutatif unitaire

2) a) Montrons que : $\forall(a;b)\in\mathbb{Z}^2$; $a^2-5b^2=0\Leftrightarrow a=b=0$

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, on a :

• Si $a = b = 0$ alors : $a^2 - 5b^2 = 0$

• Supposons que : $a^2 - 5b^2 = 0$ et montrons que : $a = b = 0$

• Si $b \neq 0$ alors on a : $a^2 - 5b^2 = 0 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 5$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 5$$

$$\Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \sqrt{5}$$

Puisque $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ alors $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ donc $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$

Ce qui est absurde, donc $b = 0$ d'où $a^2 = 0$ ainsi $a = 0$

Donc : $a^2 - 5b = 0 \Rightarrow a = b = 0$ et par suite :

$(\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2) ; a^2 - 5b^2 = 0 \Longleftrightarrow a = b = 0$

b) Montrons que $(E ; + ; \times)$ est un anneau intègre

Montrons que : $(\forall (M,N) \in E^2) ; M \times N = \theta \Rightarrow M = \theta$ ou $N = \theta$

où θ est la matrice nulle (l'élément neutre de $+$)

Soit M et N deux éléments de E tels que : $M \times N = \theta$ avec :

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} x & y \\ 5y & x \end{pmatrix}$ où x ; y ; a et b des éléments de $\mathbb{Z}$

On a : $M \times N = \theta \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y \\ 5y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} ax + 5by & ay + bx \\ 5(ay + bx) & ax + 5by \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} ax + 5by = 0 \\ bx + ay = 0 \end{cases} (1)$$

Dans le système (1), on considère que le couple $(x;y)$ est l'inconnue

le déterminant du système (1) est : $\Delta = \begin{vmatrix} a & 5b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - 5b^2$

Si $\Delta \neq 0$ alors la solution du système (1) est : $(x;y) = (0;0)$

c'est-à-dire : $N = \theta$

-Si $\Delta = 0$ alors on a : $a = b = 0$ (d'après la question 2) a))

donc : $M = \theta$

D'où : $N = \theta$ ou $M = \theta$ et par suite $(E ; + ; \times)$ est un anneau intègre.

3) a) Montrons que $(F ; +)$ est un sous groupe du groupe $(E ; +)$

• On a : $F \subset E$ et $F \neq \phi$ car $\theta \in F$ pour $x = y = 0$

Soit M et N deux éléments de F ; on a :

$$M \in F \Leftrightarrow (\exists (x;y) \in \mathbb{Z}^2) ; M = \begin{pmatrix} 2x-y & y \\ 5y & 2x-y \end{pmatrix}$$

et $N \in F \Leftrightarrow (\exists (z;t) \in \mathbb{Z}^2) ; N = \begin{pmatrix} 2z-t & t \\ 5t & 2z-t \end{pmatrix}$

Donc : $M + (-N) = \begin{pmatrix} 2x-y & y \\ 5y & 2x-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2z+t & -t \\ -5t & -2z+t \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2x-y-2z+t & y-t \\ 5y-5t & 2x-y-2z+t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2(x-z)-(y-t) & y-t \\ 5(y-t) & 2(x-z)-(y-t) \end{pmatrix}$$

On pose : $\alpha = x - z$ et $\beta = y - t$, on a : $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $\beta \in \mathbb{Z}$

et $M + (-N) = \begin{pmatrix} 2\alpha-\beta & \beta \\ 5\beta & 2\alpha-\beta \end{pmatrix}$; donc $M + (-N) \in F$

d'où : $\forall (M;N) \in F^2$; $M + (-N) \in F$ et par suite $(F;+)$ est un sous-groupe de $(E;+)$.

b) Montrons que : $\forall X \in E$; $(\forall M \in F) ; X \times M \in F$

Soit X un élément de E et M un élément de F, on a :

$$X \in E \Leftrightarrow \exists (a;b) \in \mathbb{Z}^2 ; X = \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}$$

$$M \in F \Leftrightarrow \exists (x;y) \in \mathbb{Z}^2 ; M = \begin{pmatrix} 2x & y & y \\ 5y & 2x-y \end{pmatrix}$$

donc : $X \times M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2x-y & y \\ 5y & 2x-y \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a(2x-y)+5by & ay+b(2x & y) \\ 5b(2x-y)+5ay & 5by+a(2x-y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2ax-ay+5by & ay+2bx-by \\ 5(ay+2bx-by) & 2ax-ay+5by \end{pmatrix}$$

On pose $\beta = ay + 2bx - by$ et déterminons α tel que $2ax - ay + 5by - 2\alpha = \beta$

$2ax - ay + 5by - 2\alpha = \beta \Leftrightarrow 2\alpha = 2ax - ay + 5by + ay + 2bx - by$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = 2ax + 4by + 2bx$$

$$\Leftrightarrow \alpha = ax + bx + 2by$$

Donc : $X\times M=\begin{pmatrix}2\alpha-\beta & \beta\\ 5\beta & 2\alpha-\beta\end{pmatrix}$ où $\alpha\in\mathbb{Z}$ et $\beta\in\mathbb{Z}$

d'où : $(\forall X\in E);(\forall M\in F);X\times M\in F$

Exercice 28

1) Montrons que A est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$

• On a : $A\neq\phi$ car $I_2\in A$ pour $a=1$ et $b=0$

• Soit M et N deux éléments de A, on a :

$$M\in A\Leftrightarrow\exists(a;b)\in\mathbb{R}^2;M=\begin{pmatrix}a & b\\ -2b & a+2b\end{pmatrix}$$

$$N\in A\Leftrightarrow\exists(a';b')\in\mathbb{R}^2;N=\begin{pmatrix}a' & b'\\ -2b' & a'+2b'\end{pmatrix}$$

On a : $-N=\begin{pmatrix}-a' & -b'\\ 2b' & -a'-2b'\end{pmatrix}$ est le symétrique de N dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$

Donc : $M+(-N)=\begin{pmatrix}a & b\\ -2b & a+2b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a' & -b'\\ 2b' & -a'-2b'\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}a-a' & b-b'\\ -2(b-b') & (a-a')+2(b-b')\end{pmatrix}$$

On a : $a-a'\in\mathbb{R}$ et $b-b'\in\mathbb{R}$ donc : $M+(-N)\in A$

d'où . $\forall(M;N)\in A^2$; $M+(-N)\in A$, par suite A est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$

2) Montrons que : $\forall(M;M')\in A^2;M\times M'\in A$

Soit M et N deux éléments de A tels que :

$M=\begin{pmatrix}a & b\\ 2b & a+2b\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix}a' & b'\\ -2b' & a'+2b'\end{pmatrix}$ où a, b, a' et b' des réels.

On a : $M\times N=\begin{pmatrix}a & b\\ -2b & a+2b\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a' & b'\\ -2b' & a'+2b'\end{pmatrix}$

$$-\begin{pmatrix}aa'-2bb' & ab'+a'b+2bb'\\ -2a'b-2ab'-4bb' & -2bb'+aa'+2ab'+2a'b+4bb'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}aa' & 2bb' & ab'+a'b+2bb'\\ -2(ab'+a'b+2bb') & (aa'-2bb')+2(ab'+a'b+2bb')\end{pmatrix}$$

On pose . $\alpha=aa'-2bb'$ et $\beta=ab'+a'b+2bb'$, on a . $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta\in\mathbb{R}$

et : $M\times N=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -2\beta & \alpha+2\beta\end{pmatrix}$

donc $M\times N\in A$, d'où : $\forall (M;N)\in A^2 ; M\times N\in A$

Par suite A est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});\times)$

3) a) • Montrons que f est un isomorphisme de $(A^*;\times)$ vers $(\mathbb{C}^*;\times)$

• Montrons que f est un homomorphisme de $(A^*;\times)$ vers $(\mathbb{C}^*;\times)$

Soit M et N deux éléments de A^* tels que :

$M=\begin{pmatrix}a & b\\ -2b & a+2b\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix}a' & b'\\ -2b' & a'+2b'\end{pmatrix}$

avec $(a;b;a';b')\in\mathbb{R}^4, (a,b)\neq(0,0)$ et $(a',b')\neq(0,0)$

On a d'après la question précédente : $M\times N=M(aa'-2bb';ab'+a'b+2bb')$

Donc : $f(M\times N)=(aa'-2bb')+(ab'+a'b+2bb')+i(ab'+a'b+2bb')$

$=(aa'+ab'+a'b)+i(ab'+a'b+2bb')$

et on a : $f(M)\times f(N)=(a+b+ib)\times(a'+b'+ib')$

$=aa'+ab'+iab'+a'b+bb'+ibb'+ia'b+ibb'-bb'$

$=(aa'+ab'+a'b)+i(ab'+a'b+2bb')$

Donc : $\forall (M;N)\in(A^*)^2, f(M\times N)=f(M)\times f(N)$

d'où f est un homomorphisme de $(A^*;\times)$ vers $(\mathbb{C}^*;\times)$

• Montrons que f est bijective de A^* sur $\mathbb{C}^*$

Soit z un élément de $\mathbb{C}^*$, existe-t-il un unique élément M de A

tel que : $f(M)=z$?

On a : $z\in\mathbb{C}^*\Leftrightarrow(\exists!(a;b)\in\mathbb{R}^2)/\ z=a+ib$ et $(a;b)\neq(0;0)$

$\Leftrightarrow(\exists!(a;b)\in\mathbb{R}^2)/\ z-(a-b)+b+ib$ et $(a;b)\neq(0;0)$

$\Leftrightarrow(\exists!M\in A^*)/\ M=M(a-b;b)$ et $f(M)=z$

Donc f est bijective , d'où f est un isomorphisme de $(A^*;\times)$ vers $(\mathbb{C}^*,\times)$

b) Déduisons la structure de $(A;+;\times)$

On a : - $(A;+)$ est un groupe commutatif ,

- $(\mathbb{C}^*;\times)$ est un groupe commutatif et isomorphe à $(A^*;\times)$

donc : $(A^*;\times)$ est un groupe commutatif

- A est stable pour les lois $+$ et $\times$ dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ et $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau unitaire donc $\times$ est distributive par rapport à $+$ dans A.

D'où : $(A;+;\times)$ est un corps commutatif.

1) Montrons que $(F;+)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$

• On a $E \neq \phi$ car $I \in F$ pour $x=1$ et $y=0$

• Soit M et N deux éléments de F tels que :

$$M=\begin{pmatrix} x+y & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix} \text{ et } N=\begin{pmatrix} x'+y' & y' \\ 0 & x'+y' \end{pmatrix} \text{ avec } (x;y;x';y') \in \mathbb{R}^4$$

On a : $-N=\begin{pmatrix} -x'-y' & -y' \\ 0 & -x'-y' \end{pmatrix}$ est le symétrique de N dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$

Donc : $M+(-N)=\begin{pmatrix} x+y & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -x'-y' & -y' \\ 0 & -x'-y' \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} (x-x')+(y-y') & y-y' \\ 0 & (x-x')+(y-y') \end{pmatrix}$$

On pose : $x''=x-x'$ et $y''=y-y'$, on a : $(x'',y'') \in \mathbb{R}^2$

et $M+(-N)=\begin{pmatrix} x''+y'' & y'' \\ 0 & x''+y'' \end{pmatrix}$ donc $M+(-N) \in F$

d'où : $\forall (M;N) \in F^2$; $M+(-N) \in F$ ceci signifie que $(F;+)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$

2) Montrons que $(F;+;\times)$ est un anneau commutatif unitaire

• D'après la question 1), on a : $(F;+)$ est un sous-groupe du groupe commutatif $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$, donc $(F;+)$ est un groupe commutatif.

• Montrons que $\times$ est une loi de composition interne dans F

Soit M et N deux éléments de F tels que :

$M=\begin{pmatrix} x+y & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix} x'+y' & y' \\ 0 & x'+y' \end{pmatrix}$ où $(x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4$

On a : $M \times N=\begin{pmatrix} x+y & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'+y' & y' \\ 0 & x'+y' \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} (x+y)(x'+y') & (x+y)y'+y(x'+y') \\ 0 & (x+y)(x'+y') \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} xx'+xy'+x'y+yy' & xy'+yx'+2yy' \\ 0 & xx'+xy'+x'y+yy' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (xx' - yy') + (xy' + yx' + 2yy') & xy' + yx' + 2yy' \\ 0 & (xx' - yy') + (xy' + yx' + 2yy') \end{pmatrix}$$

On pose : $X = xx' - yy'$ et $Y = xy' + yx' + 2yy'$, on a : $X \in \mathbb{R}$

et $Y \in \mathbb{R}$ et $M \times N = \begin{pmatrix} X+Y & Y \\ 0 & X+Y \end{pmatrix}$

Donc : $\forall (M;N) \in F^2$; $M \times N \in F$

D'où $\times$ est une loi de composition interne dans F et puisque $F \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); +, \times)$ est un anneau alors $\times$ est associative et distributive par rapport à $+$ dans F ; Par suite $(F; +; \times)$ est un anneau.

• On a $I \in F$ et I est l'élément neutre de la loi $\times$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc I est l'élément neutre de la loi $\times$ dans F d'où $(F; +, \times)$ est un anneau unitaire.

• La loi $\times$ est commutative (vérifier le)

Donc : $(F, +; \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

3) Déterminons les éléments inversibles dans $(F; \times)$

Soit M un élément de F tel que : $M \begin{pmatrix} x+y & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix}$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

On a : $\det M = \begin{vmatrix} x+y & y \\ 0 & x+y \end{vmatrix} = (x+y)^2$

donc : $\det M = 0 \iff (x+y)^2 = 0$

$\iff y = -x$

D'où , M est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $y \neq -x$ et son nverse est : $M^{-1} = \frac{1}{(x+y)^2} \begin{pmatrix} x+y & -y \\ 0 & x+y \end{pmatrix}$

On pose : $x' = x + 2y$ et $y' = -y$ on a : $M^{-1} = \frac{1}{(x+y)^2} \begin{pmatrix} x'+y' & y' \\ 0 & x'+y' \end{pmatrix}$

Donc : $M \in F$, d'où tout élément $M(x; y)$ de F tel que $y \neq x$ est inversible dans $(F; \times)$

1) Montrons que $(F;+)$ est un groupe commutatif

On a $F \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$ est un groupe commutatif

donc il suffit de montrer que $(F;+)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$

• On a : $F \neq \phi$ car $I \in F$ pour $x=1$ et $y=0$

• Soit M et N deux éléments de F tels que :

$M=\begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix} x' & 2y' \\ y' & x' \end{pmatrix}$ avec $(x;y;x';y') \in \mathbb{Q}^4$

On a : $-N=\begin{pmatrix} -x' & -2y' \\ y' & -x' \end{pmatrix}$ est le symétrique de N dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$

donc : $M+(-N)=\begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x' & -2y' \\ -y' & -x' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & x' & 2(y-y') \\ y-y' & x-x' \end{pmatrix}$

On a : $x-x' \in \mathbb{Q}$ et $y-y' \in \mathbb{Q}$ donc : $M+(-N) \in F$

D'où : $\forall (M;N) \in F^2$, $M+(-N) \in F$, par suite $(F,+)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$, donc $(F,+)$ est un groupe commutatif.

2) Montrons que $(F;+;\times)$ est un anneau commutatif unitaire

• On a : $(F;+)$ est un groupe commutatif

• Montrons que la loi $\times$ est une loi de composition interne dans F

Soit M et N deux éléments de F tels que :

$M=\begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix} x' & 2y' \\ y' & x' \end{pmatrix}$ où $(x;y;x';y') \in \mathbb{Q}^4$

On a : $M \times N=\begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' & 2y' \\ y' & x' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xx'+2yy' & 2xy'+2yx' \\ yx'+xy' & 2yy'+xx' \end{pmatrix}$

On pose : $X=xx'+2yy'$ et $Y=yx'+xy'$

On a : $X \in \mathbb{Q}$, $Y \in \mathbb{Q}$ et $M \times N=\begin{pmatrix} X & 2Y \\ Y & X \end{pmatrix}$ donc : $M \times N \in F$

Donc : $(\forall (M;N) \in F^2)$; $M \times N \in F$ cela signifie que la loi $\times$ est une loi de compositon interne dans F.

Puisque $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau et les deux lois $+$ et $\times$ sont des

lois de composition nternes dans I alors $\times$ est associative dans F et $\times$ est distributive par rapport à $+$ dans F, donc $(F;+;\times)$ est un anneau.

On a : $I \in F$ et I est l'élément neutre de la loi $\times$ dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});\times)$ donc I est l'élément neutre de la loi $\times$ dans F

D'où $(F;+;\times)$ est un anneau unitaire

• Montrons que la loi $\times$ est commutative

Soit M et N deux éléments de F tels que :

$M = \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} x' & 2y' \\ y' & x' \end{pmatrix}$ où $(x;y;x';y') \in \mathbb{Q}^4$

On a d'après ce qui précède : $M \times N = \begin{pmatrix} xx' + 2yy' & 2xy' + 2x'y \\ xy' + x'y & xx' + 2yy' \end{pmatrix}$

et on a : $N \times M = \begin{pmatrix} x' & 2y' \\ y' & x' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} x'x + 2y'y & 2x'y + 2y'x \\ y'x + x'y & 2y'y + x'x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx' + 2yy' & 2xy' + 2x'y \\ xy' + x'y & xx' + 2yy' \end{pmatrix} = M \times N$$

Donc : $\forall (M,N) \in F^2$; $M \times N = N \times M$, d'où la loi $\times$ est commutative dans F, par suite $(F;+;\times)$ est un anneau commutatif unitaire.

3) a) Montrons que $\forall (x;y) \in \mathbb{Q}^2$; $x^2 = 2y^2 \Longleftrightarrow x = y = 0$

• Si $x = y = 0$ alors $x^2 = 2y^2$ est une proposition vraie.

• Supposons que . $x^2 = 2y^2$ avec $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q}$, montrons que $x = y = 0$

On suppose que : $y \neq 0$

On a : $x^2 = 2y^2 \Longrightarrow \dfrac{x^2}{y^2} = 2$

$$\longrightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \sqrt{2}$$

On a : $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q}^*$ donc $\left|\frac{x}{y}\right| \in \mathbb{Q}$

d'où : $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ce qui est impossible par suite $y = 0$ donc $x = 0$

Ainsi : $\forall (x;y) \in \mathbb{Q}^2; x^2 = 2y^2 \Longleftrightarrow x = y = 0$

b) Montrons que $(F;+;\times)$ est un corps commutatif

• On a $(F;+,\times)$ est un anneau commutatif et unitaire, donc il suffit de

montrer que tout élément de F différent de O_2 admet un inverse dans F.

Soit M un élément de $F-\{O_2\}$ tel que : $M=\begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$ avec $(x\,;y)\in\mathbb{Q}^2$ et $(x\,;y)\neq(0\,;0)$

On a : $\det M=x^2-2y^2$; donc : $\det M-0 \iff x^2-2y^2-0$

$\iff x=y=0$

$\iff M=\theta$

d'où : $(\forall M\in F)$, $M\neq O_2 \iff \det M\neq 0$, par suite tout élément de $F\setminus\{O_2\}$ est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

• Montrons que $M^{-1}\in F$

On a : $M^{-1}=\frac{1}{x^2-2y^2}\begin{pmatrix} x & -2y \\ -y & x \end{pmatrix}$

On pose : $X=x$ et $Y=-y$, on a $X\in\mathbb{Q}$ et $Y\in\mathbb{Q}$

et $M^{-1}=\frac{1}{X^2-2Y^2}\begin{pmatrix} X & 2Y \\ Y & X \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $M^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{X}{X^2-2y^2} & \frac{2Y}{X^2-2y^2} \\ \frac{Y}{Y^2-2y^2} & \frac{X}{Y^2-2y^2} \end{pmatrix}$

donc : $(\forall M\in F-\{\theta_2\})\,;M^{-1}\in F$

D'où $(F\,;+\,;\times)$ est un corps commutatif

c) Résolvons dans F l'équation : $(X\in F)\,;X^2-4X+3I_2=\theta_2$

Soit $X\in F$, on a : $(F;+;\times)$ est un corps donc c'est un anneaux intégre d'où :

$X^2-4X+3I_2=\theta_2 \iff (X-I_2)(X-3I_2)=\theta_2$

$\iff X-I_2=\theta_2$ ou $X-3I_2=\theta_2$

$\iff X=I_2$ où $X=3I_2$

On a : $I_2\in F$ et $3I_2\in F$ donc : $S_F=\{I_2\,;3I_2\}$

Exercice 31 :

1) Montrons que $(E\,;+\,;\times)$ est un corps commutatif

• Montrons que $(E\,;+)$ est un groupe commutatif

On a $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,;+)$ est un groupe commutatif et $E\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

donc il suffit de montrer que $(E\,;+)$ est un sous-groupe du groupe commutatif $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,;+)$

• On a $E \neq \phi$ car $I_2 \in E$ pour $x = 1$ et $y = 0$

- Soit M et N deux éléments de E tels que : $M = \begin{pmatrix} x+y & 3y \\ -y & x-y \end{pmatrix}$

et $N = \begin{pmatrix} x'+y' & 3y' \\ -y' & x'-y' \end{pmatrix}$ avec $(x ; y ; x' ; y') \in \mathbb{R}^4$

On a : $-N = \begin{pmatrix} -x'-y' & -3y' \\ y' & -x'+y' \end{pmatrix}$ est le symétrique de N dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) ; +)$

Donc : $M + (\quad N) = \begin{pmatrix} x+y & 3y \\ -y & x-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x' & y' & -3y \\ y' & & -x'+y' \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (x-x')+(y-y') & 3(y-y') \\ -(y-y') & (x-x')-(y-y') \end{pmatrix}$$

On pose : $X = x - x'$ et $Y = y - y'$, on a : $X \in \mathbb{R} ; Y \in \mathbb{R}$

et $M + (-N) = \begin{pmatrix} X+Y & 3Y \\ -Y & X-Y \end{pmatrix}$

donc : $M + (-N) \in E$ d'où : $\forall (M ; N) \in E^2$; $M + (-N) \in E$,

par suite $(E ; +)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) ; +)$ ainsi $(E ; +)$ est un groupe commutatif.

• Montrons que la loi $\times$ est une loi de composition interne dans E

Soit M et N deux éléments de E tels que :

$M = \begin{pmatrix} x+y & 3y \\ -y & x-y \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} x'+y & 3y' \\ -y' & x'-y' \end{pmatrix}$ avec

On a : $M \times N = \begin{pmatrix} x+y & 3y \\ -y & x-y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'+y' & 3y' \\ -y' & x'-y' \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} (x+y)(x'+y') & 3yy' & 3y'(x+y)+3y(x' & y') \\ -y(x'+y')-y'(x-y) & -3yy'+(x-y)(x'-y') & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx'+xy'+yx'-2yy' & 3(yx'+y'x) \\ (yx'+y'x) & (xx' \quad 2yy') \quad (yx'+y'x) \end{pmatrix}$$

On pose : $X = xx' - 2yy'$ et $Y = yx' + y'x$, on a : $X \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathbb{R}$

et $M \times N = \begin{pmatrix} X+Y & 3Y \\ -Y & X-Y \end{pmatrix}$

donc : $\forall (M ; N) \in E$; $M \times N \in E$ d'où la loi $\times$ est une loi de composition interne dans E.

On a : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau, donc $\times$ est associative dans E et $\times$ est distributive par rapport à $+$ dans E, d'où $(E;+;\times)$ est un anneau.

• On a : I_2 est l'élement neutre de la loi $\times$ dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});\times)$ et $I_2 \in E$, donc I_2 est l'élément neutre de $\times$ dans E

d'où : $(E;+;\times)$ est un anneau unitaire.

• Vérifier que : $N \times M = M \times N$ pour tout M et N de E

Donc la loi $\times$ est commutative dans E

D'où $(E;+;\times)$ est un anneau commutatif unitaire.

• Montrons que tout é ément de E différent de O_2 admet un inverse dans E.

Soit M un élément de $E-\{O_2\}$ tel que :

$M = \begin{pmatrix} x+y & 3y \\ -y & x-y \end{pmatrix}$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x;y) \neq (0;0)$

On a : $\det M = \begin{vmatrix} x+y & 3y \\ -y & x-y \end{vmatrix} = x^2 - y^2 + 3y^2 = x^2 + 2y^2$

Puisque $(x;y) \neq (0;0)$ alors $x^2 + 2y^2 \neq 0$ c'est-à-dire : $\det M \neq 0$, donc M est inversible dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});\times)$

• Montrons que : $\forall M \in E-\{O_2\}\ ;\ M^{-1} \in E$

On a : $M^{-1} = \frac{1}{x^2+2y^2}\begin{pmatrix} x-y & -3y \\ y & x+y \end{pmatrix}$

On pose : $X = x$ et $Y = -y$ on a : $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$

et : $M^{-1} = \frac{1}{X^2+2Y^2}\begin{pmatrix} X+Y & 3Y \\ -Y & X \quad Y \end{pmatrix}$ donc $M^{-1} \in E$

d'où : $(\forall M \in E-\{O_2\});M^{-1} \in E$

Par suite $(E;+;\times)$ est un corps commutatif

2) • Montrons que f est un nomomorphisme de $(I \quad \times)$ vers $(\quad ,\times)$

Soit $M(x;y)$ et $M(a;b)$ deux éléments de E

On a : $f(M(x;y)) = x + iy\sqrt{2}$ et $f(M(a;b)) = a + ib\sqrt{2}$

et on a : $(x+iy\sqrt{2}) \times (a+ib\sqrt{2}) = (ax-2by) + i(bx+ay)\sqrt{2}$

Donc : $f(M(x;y)) \times f(M(a;b)) = (ax-2by) + i(bx+ay)\sqrt{2}$

et on a : $M(x;y)\times M(a;b)=M(xa-2yb\,;xb+ay)$

donc : $f(M(x;y)\times M(a;b))=f(M(xa-2yb\,;xb+ay))$

$$=(xa-2yb)+i(xb+ay)\sqrt{2}$$

d'où : $\forall M(x;y)\in E\,;\forall M(a;b)\in E$

$f(M(x;y)\times M(a;b))=f(M(x;y))\times f(M(a;b))$

Ainsi f est un homomorphisme de $(E\,;\times)$ dans $(\mathbb{C}\,;\times)$

• Montrons que f est bijective

Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que : $z=a+ib$ avec $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

On a : $z=x+iy\sqrt{2}\iff a+ib=x+iy\sqrt{2}$

$$\iff\begin{cases}x=a\\ y=\dfrac{b}{\sqrt{2}}=\dfrac{b\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

Donc : $(\forall z\in\mathbb{C})(\exists!(x;y)\in\mathbb{R}^2)/z=x+iy\sqrt{2}$

c'est-à-dire : $(\forall z\in\mathbb{C})\,;(\exists!M(x;y)\in E)\,/\,f(M(x;y))=z$

D'où f est bijective, par suite f est un isomorphisme de $(E;\times)$ sur $(\mathbb{C};\times)$

b) Montrons qu'il existe deux suites (α_n) et (β_n) telles que :
$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\,;K^n=M(\alpha_n\,;\beta_n)$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $f(K^n)=(f(K))^n=\left(f\left(M\left(1;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\right)^n$

$$=(1+i)^n=(\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$$

$$=(\sqrt{2})^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+i(\sqrt{2})^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$=(\sqrt{2})^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+i\frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\sqrt{2}$$

$$=f\left(M\left((\sqrt{2})^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right);\frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)\right)$$

et puisque f est bijective de E sur $\mathbb{C}$ alors :

$$K^n=M\left((\sqrt{2})^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right);\frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

Donc : $\begin{cases}(\forall n\in\mathbb{N}^*)\,;\alpha_n=(\sqrt{2})^n\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)\\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)\,;\beta_n=\dfrac{(\sqrt{2})^{n+1}}{2}\sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)\end{cases}$

A) Loi de composition externe à opérateurs dans $\mathbb{R}$:

Soit E un ensemble non vide

Toute application définie de $\mathbb{R}\times E$ dans E est appelée une loi de composition externe définie sur E et à opérateurs dans $\mathbb{R}$.

L'image d'un couple $(\alpha;x)$ de $\mathbb{R}\times E$ est notée $\alpha.x$

B) Espace vectoriel réel

1) Définition:

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $+$ et d'une loi de composition externe notée $\bullet$ qui à chaque couple $(\alpha;x)$ associe de $\mathbb{R}\times E$, l'élément $\alpha.x$ de E.

On dit que $(E;+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- $(E;+)$ est un groupe commutatif
- $(\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2);(\forall x\in E)$; $(\alpha+\beta).x=\alpha.x+\beta.x$
- $(\forall\alpha\in\mathbb{R});(\forall(x;y)\in E^2)$; $\alpha.(x+y)=\alpha.x+\alpha.y$
- $(\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2);(\forall x\in E)$; $\alpha.(\beta.x)-(\alpha\beta).x$
- $(\forall x\in E)$; $1.x=x$

- Les éléments de E sont appelés des vecteurs, et les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés des scalaires.
- Un élément x de E est noté $\vec{x}$

2) Règles de calcul dans un espace vectoriel réel:

Soit $(E;+;\bullet)$ un espace vectoriel réel

Pour tous $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de E et tous α et β de $\mathbb{R}$, on a:

- $0\vec{x}=\vec{0}$
- $\alpha.\vec{0}=\vec{0}$
- $(-1)\vec{x}=-\vec{x}$
- $(-\alpha)\vec{x}=\alpha.(-\vec{x})=-(\alpha\vec{x})$
- $\alpha(\vec{x}-\vec{y})=\alpha\vec{x}-\alpha.\vec{y}$
- $(\alpha-\beta).\vec{x}=\alpha\vec{x}-\beta\vec{x}$

3) Combinaisons linéaires :

Définition:

Soit $(\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_n})$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel réel $(E; +; \bullet)$.

On dit qu'un vecteur $\vec{x}$ de E est combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(\vec{x_1}; \vec{x_2}; ..\vec{x_n})$ s'il existe des réels α_1 ; α_2 ; ... ; α_n tels que $x = \alpha_1\vec{x_1} + \alpha_2\vec{x_2} + ... + \alpha_n\vec{x_n}$

Notation: La famille $(\vec{x_1}, \vec{x_2}; .. ; \vec{x_n})$ se note aussi $\{\vec{x_1}; \vec{x_2}; ...; \vec{x_n}\}$

Famille génératrice d'un espace vectoriel réel

On dit qu'une famille $(\vec{x_1} ; \vec{x_2} ; ...; \vec{x_n})$ de vecteurs d'un espace vectoriel réel $(E; +; \bullet)$ est une famille génératrice de E si :

$$(\forall x \in E); (\exists(\alpha_1; \alpha_2; ...; \alpha_n) \in \mathbb{R}^n); \vec{x} = \alpha_1\vec{x_1} + \alpha_2\vec{x_2} + ... + \alpha_n\vec{x_n}$$

Autrement dit :

tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{x_1}; \vec{x_2}; ...\vec{x_n}$

4) Indépendance linéaire (Famille libre) :

Définition:

On dit qu'une famille $(\vec{x_1} ; \vec{x_2} ; .. ; \vec{x_n})$ de vecteurs d'un espace vectoriel réel $(E; +; \bullet)$ est une famille libre si :

$(\forall(\alpha_1; \alpha_2; ....\alpha_n) \in \mathbb{R}^n); \alpha_1\vec{x_1} + \alpha_2\vec{x_2} + ... + \alpha_n\vec{x_n} = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$

Dépendance linéaire (Famille liée)

On dit qu'une famille $(\vec{x_1} ; \vec{x_2} ; ...; \vec{x_n})$ de vecteurs d'un espace vectoriel $(E; +; \bullet)$ est une famille liée s'il existe des nombres reels α_1 α_2 ; ... α_n non tous nuls tels que : $\alpha_1\vec{x_1} + \alpha_2\vec{x_2} + ... + \alpha_n\vec{x_n} = \vec{0}$

Propriété

Une famille de vecteurs de E est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres

Attention : Si une famille est liée alors elle n'est pas libre

5) Base d'un espace vectoriel réel:

Définition:

On dit qu'une famille $(\vec{e}_1;\vec{e}_2;....;\vec{e}_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel réel $(E;+;\bullet)$ est une base de E si :

$(\forall \vec{x} \in E);(\exists!(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n) \in \mathbb{R}^n)$; $\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_n\vec{e}_n$

• Les nombres $\alpha_1;\alpha_2;..;\alpha_n$ sont appelés les coordonnées du vecteur $\vec{x}$ dans la base $B = (\vec{e}_1;\vec{e}_2;.\ ;\vec{e}_n)$ et on écrit $\vec{x}(\alpha_1;\alpha_2;.\ ;\alpha_n)$

Propriété:

Une famille $(\vec{e}_1;\vec{e}_2;.....;\vec{e}_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel réel $(E;+;\bullet)$ est une base de E si et seulement si elle est à la fois libre et génératrice de E

8) Dimension d'un espace vectoriel

Définition:

Si un espace vectoriel réel E admet une base ayant n éléments, alors toute autre base de E contient n éléments.

L'entier naturel n, nombre commun des éléments de toutes les bases de E est appelé dimensison de E et on écrit : $\dim E = n$

Propriétés:

Propriété 1 : Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et $B = (\vec{i};\vec{j})$ une base de E et $(\vec{u};\vec{v})$ une famille de vecteurs de E , on a :

$((\vec{u};\vec{v})$ est une base de $E) \Leftrightarrow ((\vec{u};\vec{v})$ est une famille libre de $E)$

$\Leftrightarrow ((\vec{u};\vec{v})$ est une famille génératrice de E

$\Leftrightarrow \det(\vec{u};\vec{v}) \neq 0$

Propriété 2 : Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $B = (\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ une base de E et $(\vec{u},\vec{v};\vec{w})$ une famille de vecteurs E , on a :

$(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ est une base de $E \Leftrightarrow ((\vec{u},\vec{v};\vec{w})$ est une famille libre de $E)$

$\Leftrightarrow ((\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ est une famille génératrice de $E)$

$\Leftrightarrow \det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) \neq 0$

Propriété caractéristique d'un sous-espace vectoriel réel

Soit $(E;+;\cdot)$ un espace vectoriel réel et F une partie de E.

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

$$\begin{cases} -F \neq \phi \\ -(\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2);(\forall(\vec{x};\vec{y})\in F^2);\alpha.(\vec{x}+\beta.\vec{y})\in F \end{cases}$$

Exercices d'application

Exercice 32

Soit $(E;+;\cdot)$ un espace vectoriel réel de dimension 3 et $\{\vec{u}_1;\vec{u}_2\}$ une famille libre de E.

On pose: $S=\{\vec{u}\in E/\exists(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2;\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}_2\}$

Montrer que: $\vec{u}\notin S \Leftrightarrow \{\vec{u}_1;\vec{u}_2,\vec{u}\}$ est une famille libre.

Exercice 33

Dans l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}^2;+;\cdot)$, on considère les vecteurs:

$\vec{u}=(2;1)$; $\vec{v}=(6;3)$ et $\vec{w}=(1;3)$

1) a) Montrer que la famille $(\vec{u};\vec{v})$ est une famille liée.

b) Montrer que la famille $(\vec{v},\vec{w})$ est une base de l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2;+;\cdot)$

c) On considère le vecteur $\vec{t}=(5;0)$

Écrire $\vec{t}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$

2) On pose: $E=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/y=2x\}$

Montrer que $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel et déterminer dim E.

Exercice 34

On considère l'ensemble E défini par: $E=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3/x-y+3z=0\}$

1) Montrer que $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

2) On considère dans l'espace vectoriel réel $(E;+;\cdot)$, les deux vecteurs:

$\vec{e}_1=(1;1;0)$ et $\vec{e}_2=(0;3;1)$

a) Montrer que $(\vec{e};\vec{e}_2)$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel $(E;+;\cdot)$

b) Montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une famille libre de l'espace vectoriel $(E; +;)$

c) En déduire dim E

On considère l'ensemble: $E = \{(a; a; b) / (a; b) \in \mathbb{R}^2\}$

1) Monter que $(E; +; \cdot)$ est un espace vectoriel réel

2) Déterminer une base de l'espace vectoriel $(E; +,)$

Dans l'espace vectoriel réel $(M_2(\mathbb{R}); +; \cdot)$, on pose:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que $(I; A)$ est une famille libre dans $(M_2(\mathbb{R}); +;)$

2) On pose: $E = \left\{ \begin{pmatrix} -2x + y & 2x \\ 2x & 3x + y \end{pmatrix} / (x; y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Montrer que $(E; +,)$ est un espace vectoriel réel de dimension 2

Solutions

Exercice 32

• Montrons que : $\vec{u} \notin S \Rightarrow \{\vec{u_1}; \vec{u_2}; \vec{u}\}$ est une famille libre:

On suppose que $\vec{u} \notin S$ et montrons que $\{\vec{u}; \vec{u_2}; \vec{u}\}$ est une famille libre.

Soit $(\alpha; \beta; \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\alpha\vec{u_1} + \beta\vec{u_2} + \gamma\vec{u} = \vec{0}$

Supposons que : $\gamma \neq 0$, donc : $\vec{u} = -\frac{\alpha}{\gamma}\vec{u_1} - \frac{\beta}{\gamma}\vec{u_2}$

C'est-à-dire : $\vec{u} \in S$, ce qui est absurde car on a : $\vec{u} \notin S$ donc : $\gamma = 0$

On a donc : $\alpha\vec{u_1} + \beta\vec{u_2} = \vec{0}$, puisque la famille $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$ est libre alors :

$\alpha = \beta = 0$.

D'où : $\alpha - \beta \quad \gamma - 0$ et par suite la famille $\{\vec{u_1}; \vec{u_2}; \vec{u}\}$ est libre.

• Réciproquement : supposons que $\{\vec{u_1}; \vec{u_2}; \vec{u}\}$ est une famille libre

et montrons que : $\vec{u} \notin S$

Supposons que : $\vec{u} \in S$, donc : $(\exists (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2); \vec{u} = \alpha\vec{u_1} + \beta\vec{u_2}$

cela signifie que : $\{\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u}\}$ est une famille liée, ce qui est absurde car $\{\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u}\}$ est une famille libre.

Donc : $\vec{u}\notin S$ et par suite, on a : $\vec{u}\notin S \Longleftrightarrow \{\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u}\}$ est une famille libre.

EXERCICE

1) a) Montrons que la famille $\{\vec{u};\vec{v}\}$ est liée:

On a . $\vec{v}-(6,3)\quad 3(2,1)-3\vec{u}$ donc la famille $\{\vec{u};\vec{v}\}$ est liée.

b) Montrons que la famille $\{\vec{v};\vec{w}\}$ est une base de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}^2;+;\cdot)$:

Soit $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $a\vec{v}+b\vec{w}=\vec{0}$

On a : $a\vec{v}+b\vec{w}\quad (6a;3a)+(b;3b)=(6a+b;3a+3b)$

Donc : $a\vec{v}+b\vec{w}=\vec{0}\Rightarrow 6a+b=0$ et $3a+3b=0$

$\Rightarrow 6a+b=0$ et $a=-b$

$\Rightarrow 5a=0$ et $a=-b$

$\Rightarrow a=0$ et $b=0$

D'où : la famille $\{\vec{v};\vec{w}\}$ est libre.

Puisque $\dim\mathbb{R}^2=2$ alors la famille $\{\vec{v};\vec{w}\}$ est une base de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$.

Remarque : On peut aussi montrer la famille $\{\vec{v};\vec{w}\}$ est une famille génératrice.

En effet : Soit $\vec{X}=(x;y)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$, existe t il deux réels α et β tels que : $\vec{X}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}$?

On a : $\vec{X}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}\Longleftrightarrow(x;y)=(6\alpha+\beta;3\alpha+3\beta)$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}6\alpha+\beta=x\\3\alpha+3\beta=y\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}-15\alpha=y-3x\\\alpha+\beta=\frac{1}{3}y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{5}x - \frac{1}{15}y \\ \beta = \frac{1}{3}y - \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{5}x - \frac{1}{15}y \\ \beta = \frac{1}{3}y - \frac{1}{5}x + \frac{1}{15}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{5}x - \frac{1}{15}y \\ \beta = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y \end{cases}$$

Donc : $(\forall \vec{X} \in \mathbb{R}^2);(\exists(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2);\ \vec{X}$ $\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$, cela signifie que la famille $\{\vec{v};\vec{w}\}$ est une famille génératrice dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$ et puisque $\dim\mathbb{R}^2$ 2 alors $\{\vec{v};\vec{w}\}$ est une base l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$.

c) Écrivons le vecteur $\vec{t}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$

Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{t} = x\vec{v} + y\vec{w}$

On a : $\vec{t} = x\vec{v} + y\vec{w} \Leftrightarrow (6x + y;3x + 3y) = (5;0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + y = 5 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 5x = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ et } y = \quad 1$$

D'où : $\vec{t} = \vec{v} - \vec{w}$ et cela signifie que $\vec{t}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

2) Montrons que $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel et déterminons sa dimension 2 :

On a : $E \subset \mathbb{R}^2$ et $(\mathbb{R}^2;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel

donc il suffit de montrer que $(E;+;\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $(\mathbb{R}^2;+;\cdot)$.

- On a : $\vec{O} = 0(0;0) \in E$ pour $x = y = 0$, donc : $E \neq \phi$

- Soit $\vec{a} = (x;y)$ avec $y = 2x$ et $\vec{b} - (x';y')$ avec $y' = 2x'$ deux éléments de

E, et α et β deux nombres réels.

On a : $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=(\alpha x+\beta x';\alpha y+\beta y')$

$$-(\alpha x+\beta x';2\alpha x+2\beta x')-(x'';y'')$$

tel que : $x''=\alpha x+\beta x'$ et $y''=2\alpha x+2\beta x'=2x''$

Donc : $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\in E$

D'où : $\begin{cases}E\neq\phi\\ \forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2;\forall(\vec{a};\vec{b})\in E;\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\in E\end{cases}$

Cela signifie que E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^2$, donc $(E;+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

- Déterminons $\dim E$:

• Soit $\vec{X}=(x;y)$ un vecteur de E, on a : $\vec{X}=(x;y)=(x;2x)=x(1;2)=x.\vec{e}$ où $\vec{e}(1;2)$.

Donc la famille $\{\vec{e}\}$ est une famille génératrice de E.

• La famille $\{\vec{e}\}$ est une famille libre de E (vérifier le).

Donc : $\{\vec{e}\}$ est une base de E, d'où $\dim E=1$.

1) Montrons que $(E;+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel :

On a : $E\subset\mathbb{R}^3$ et $(\mathbb{R}^3,+,\bullet)$ est un espace vectoriel réel, donc il suffit de montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}^3;+;\bullet)$.

- On a : $E\neq\phi$ car $(0;0;0)\in E$

- Soit $(x;y;z)\in E$ alors $x-y+3z=0$ • Soit $(a;b;c)\in E$

alors $a-b+3c\quad 0$ et soit α et β deux nombres réels, on a :

$$\alpha(x;y;z)+\beta(a;b;c)=(\alpha x;\alpha y;\alpha z)+(\beta a;\beta b;\beta c)$$
$$=(\alpha x+\beta a;\alpha y+\beta b;\alpha z+\beta c)$$

Puisque :

$$\alpha x+\beta a-(\alpha y+\beta b)+3(\alpha z+\beta c)=\alpha x+\beta a-\alpha y-\beta b+3\alpha z+3\beta c$$
$$=\alpha(x-y+3z)+\beta(a-b+3c)$$
$$=0$$

Alors : $(\alpha x+\beta a;\alpha y+\beta b;\alpha z+\beta c)\in E$

C'est-à-dire : $\alpha(x;y;z)+\beta(a;b;c)\in E$

Donc : $(\forall (X;Y) \in E^2);(\forall (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2) ; \alpha X + \beta Y \in E$

D'où : E est un sous-espace de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}^3; +; \bullet)$.

Par suite : $(E; +; \bullet)$ est un espace vectoriel réel.

2) a) Montrons que $\{\vec{e_1};\vec{e_2}\}$ est une famille génératrice de 'espace vectoriel $(E; +; \bullet)$:

Soit $(x;y;z)$ un élément de E, on a : $x - y + 3z = 0$ c'est-à-dire : $y = x + 3z$

Donc : $(x;y;z) = (x;x+3z;z) = (x;x;0) + (0;3z;z)$

$= x(1;1;0) + z(0;3;1) = x\vec{e_1} + z\vec{e_2}$

D'où : $(x;y;z)$ est une combinaison linéaire des deux vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$.

Par suite : $(\forall \vec{u} \in E);(\exists (x;y) \in \mathbb{R}^2) ; \vec{u} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$, ce a signifie que $\{\vec{e_1};\vec{e_2}\}$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel $(E; +; \bullet)$.

b) Montrons que la famille $\{\vec{e_1};\vec{e_2}\}$ est une famille libre de l'espace vectoriel $(E; +; \bullet)$:

Soit α et β deux nombres réels tels que : $\alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} = \vec{0}$

On a : $\alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} = \vec{0} \Rightarrow \alpha(1;1;0) + \beta(0;3;1) = (0;0;0)$

$$\Rightarrow (\alpha;\alpha+3\beta;\beta) = (0;0;0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + 3\beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

Donc : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2) ; \alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$ cela signifie que $\{\vec{e_1};\vec{e_2}\}$ est une famille libre de l'espace vectoriel E.

c) Déduction :

la famille $\{\vec{e_1};\vec{e_2}\}$ est à la fois une famille libre et génératrice de l'espace vectoriel E, donc : $\{\vec{e_1};\vec{e_2}\}$ est une base de E et puisque $Card\{\vec{e_1};\vec{e_2}\} = 2$

Alors : $\dim E = 2$

1) Montrons que $(E; +; \bullet)$ est un espace vectoriel réel :

On a : $E \subset \mathbb{R}^3$ et $(\mathbb{R}^3; +; \bullet)$ est un espace vectoriel réel, donc il suffit de montrer que $(E; +; \bullet)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3; +; \bullet)$.

- On a : $E \neq \phi$ car $(0;0;0) \in E$ pour $a = b = 0$

- Soit $(a;a;b)$ et $(a';a';b')$ deux éléments de E avec a, b, a' et b' sont des nombres réels; α et β sont des réels aussi, on a :

$$\begin{aligned}\alpha(a;a;b)+\beta(a';a';b') &= (\alpha a;\alpha a;\alpha b)+(\beta a';\beta a';\beta b')\\ &= (\alpha a+\beta a';\alpha a+\beta a';\alpha b+\beta b')\\ &= (a'';a'';b'')\end{aligned}$$

où $a'' = \alpha a + \beta a'$ et $b'' = \alpha b + \beta b'$

On a : $a'' \in \mathbb{R}$ et $b'' \in \mathbb{R}$, donc : $(a'';a'';b'') \in E$

D'où :

$(\forall(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2);(\forall((a;a;b);(a';a';b')) \in E^2);\alpha(a;a;b)+\beta(a';a';b') \in E$

Cela signifie que $(E, +;\bullet)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3; +;\bullet)$ et par suite $(E; +;\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

2) Déterminons une base de l'espace vectoriel $(E; +,\bullet)$:

• Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace vectoriel E, on a :

$$\begin{aligned}\vec{u} \in E &\Leftrightarrow \exists(a;b) \in \mathbb{R}^2 ; \vec{u} = (a;a;b)\\ &\Leftrightarrow \exists(a;b) \in \mathbb{R}^2 ; \vec{u} = a(1;1;0)+b(0;0;1)\end{aligned}$$

En posant : $\vec{e_1} = (1;1;0)$ et $\vec{e_2} = (0;0;1)$, on a :

$$(\forall \vec{u} \in E);(\exists(a;b) \in \mathbb{R}^2 ;);\vec{u} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2}$$

Donc la famille $\{\vec{e_1};\vec{e_2}\}$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel $(E; +;\bullet)$.

• Soit $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} = \vec{0}$

On a : $\alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} = \vec{0} \Rightarrow (\alpha;\alpha;0)+(0;0;\beta) = (0;0;0)$

$$\Rightarrow (\alpha;\alpha;\beta) = (0;0;0)$$

$$\Rightarrow \alpha = 0 \text{ et } \beta = 0$$

Donc la famille $\{\vec{e_1};\vec{e_2}\}$ est libre.

D'où : $\{\vec{e_1};\vec{e_2}\}$ est à la fois libre et génératrice de $(E; +,\bullet)$, par suite $\{\vec{e_1};\vec{e_2}\}$ est une base de l'espace vectoriel réel $(E; +;\bullet)$.

Exercice 36

1) Montrons que $(A;I)$ est une famille libre de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;\cdot)$:

Soit $(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}^2$ tel que : $\alpha I+\beta A=O_2$ où O_2 est la matrice nulle

c'est-à-dire : $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

On a : $\alpha I+\beta A=O_2\Rightarrow\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-2&2\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}\alpha-2\beta&2\beta\\2\beta&\alpha+3\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha-2\beta=0\\2\beta=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\alpha=\beta=0$$

Donc la famille $\{I,A\}$ est une famille libre de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+,\cdot)$.

2) Montrons que $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel de dimension 2:

On remarque : $(\forall M\in E),(\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2);M=xI+yA$

Soit M et N deux éléments de E et α et β deux éléments de $\mathbb{R}$, on a :

• $\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2;M=xI+yA$

• $\exists(x';y')\in\mathbb{R}^2;N=x'I+y'A$

Donc : $\alpha M+\beta N=\alpha(xI+yA)+\beta(x'I+y'A)$

$$=(\alpha x+\beta x')I+(\alpha y+\beta y')A$$

On pose : $x''=\alpha x+\beta x'$ et $y''=2y+2y'$

Donc : $(\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2);\alpha M+\beta N=x''I+y''A$ cela signifie que : $(\alpha M+\beta N)\in E$

On a : $\begin{cases}E\neq\phi\text{ car }O_2\in E\text{ pour }x=y=0\\\forall(M;N)\in E^2;\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2;\alpha M+\beta N\in E\end{cases}$

Donc : $(E;+;\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(\mathcal{M}(\mathbb{R});+;\cdot)$ et par suite $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

• Déterminons $\dim E$:

On a : $(\forall M\in E);(\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2);M=xI+yA$

Donc la famille $\{I;A\}$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel réel $(E;+;\cdot)$ et puisque $\{I;A\}$ est une famille libre alors $\{I;A\}$ est une base de

l'espace vectoriel réel $(E;+;\bullet)$ d'où : $\dim E = 2$

Exercices de synthèses

Exercice 1

On considère l'ensemble E défini par: $E = \left\{ M(a;b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a-2b \end{pmatrix} / (a;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

et l'application f définie par:

$$E^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$
$$M(a,b) \mapsto (a-b) + ib\sqrt{2}$$

où : $E^* = E \setminus \{O_2\}$ avec O_2 est la matrice nulle

1) Montrer que: $\forall (a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4$;

$$M(a;b) \times M(c;d) = M(ac - 3bd; ad + bc - 2bd)$$

2) a) Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque f

b) Montrer que f est un homomorphisme de $(E^*, \times)$ vers $(\mathbb{C}^*; \times)$

3) a) Montrer que $(E;+;\times)$ est un corps commutatif

b) Résoudre dans l'ensemble E l'équation: $X^2 = M(-1;0)$

c) Soit $M(a;b)$ un élément de E^*

Déterminer $(M(a;b))^{-1}$

Exercice 2

Soit A une matrice carrée d'ordre 2 telle que: $A^2 = I$

1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $(A+I)^n = 2^{n-1}(A+I)$

2) Soit B la matrice suivante: $B = \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

a) Calculer $(B-I)^2$

b) En déduire B^n où $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 3

Soit A et B deux éléments de $M_3(\mathbb{R})$ tels que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer B^3

2) a) Vérifier que: $A = I_3 + B$ où I_3 est la matrice unité dans $M_3(\mathbb{R})$

b) En déduire l'expression de A^n en fonction de n avec $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

3) a) Vérifier que: $A^3 - 3A^2 + 3A = I_3$

b) En déduire que A admet un inverse dans $(M_3(\mathbb{R}); +; \times)$ à déterminer.

Exercice 40

Soit I, A et B des éléments de $M_3(\mathbb{R})$ tels que:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) a) Calculer: A^2 , B^2 , BA et AB puis vérifier que: $A^3 = A + I$

b) En déduire que la matrice A admet un inverse dans $(M_3(\mathbb{R}); +; \times)$ à déterminer.

2) On considère l'ensemble E défini par.

$$E = \left\{ M(x;y;z) = \begin{pmatrix} x & z & y \\ y & x+z & y+z \\ z & y & x+z \end{pmatrix} / (x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

a) Montrer que $(E; +)$ est un groupe commutatif

b) Montrer que E est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R}); \times)$

c) Montrer que $(E; +; \times)$ est un anneau unitaire.

Exercice 41

On définit sur $\mathbb{R}$, les deux lois de composition internes $*$ et T

par: $-\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$; $x * y = x + y - 1$

$-\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$; $xTy = x + y - xy$

Soit f et g les deux applications définies par:

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $g: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$x \longrightarrow x + 1$ et $\qquad$ $x \longmapsto 1 - x$

1) a) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}; +)$ vers $(\mathbb{R}; *)$

b) En déduire la structure de $(\mathbb{R}; *)$

2) Montrer que g est un isomorphisme de $(\mathbb{R}';\times)$ vers $(\mathbb{R}\setminus\{1\};T)$

3) Montrer que $(\mathbb{R};*;T)$ est un corps commutatif

Exercice 3

On pose: $A=\begin{pmatrix}-1 & b & b\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ où b est un nombre réel non nul

et $B=A+I$ avec $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

1) a) Calculer B^2 et B^3

b) Vérifier que: $(I-B)(I+B+B^2)=I$

c) En déduire que A admet un inverse A^{-1} à déterminer

2) Soit E l'espace vectoriel engendré par la famille $(I;B;B^2)$

a) Montrer que $(I;B;B^2)$ est une famille libre

b) En déduire que $(I;B;B^2)$ est une base de E puis en déduire dim E.

Exercice 4

Soit I et A deux éléments de $M_3(\mathbb{R})$ tels que:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix} \text{ et } I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

1) a) Montrer que: $A^3=5A-4I$

b) Montrer que la matrice A admet un inverse A^{-1} à déterminer

2) On considère l'ensemble: $E=\{xI+yA+zA^2/(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\}$

a) Montrer que $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel

b) Montrer que a famille $(I;A;A^2)$ est une base de l'espace vectoriel réel $(E;+;\cdot)$

3) a) Montrer que E est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R});\times)$

b) Montrer que $(E;+;\times)$ est un anneau unitaire

c) On pose: $N = I + A$

Déterminer les coordonnées de la matrice N^3 dans la base $(I;A;A^2)$

Exercice 44

Soit I et A deux éléments de $M_3(\mathbb{R})$ tels que:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) a) Calculer A^2 , A^3 puis A^n en fonction avec $n \in \mathbb{N}^*$ (discuter suivant les restes de la division euclidienne de n par 3)

b) Montrer que la matrice A admet un inverse A^{-1} à déterminer

2) On considère l'ensemble: $E = \{aI + bA + cA^2 / (a;b;c) \in \mathbb{R}^3\}$

a) Montrer que la famille $(I;A;A^2)$ est libre dans l'espace vectoriel réel $(M_3(\mathbb{R});+;\cdot)$

b) Montrer que $(E;+;\times)$ est un espace vectoriel réel de dimension 3.

3) a) Montrer que $(E;+;\times)$ est un anneau commutatif unitaire.

b) Calculer le déterminant de la matrice $-\sqrt{3}A + A^2$. $(E,+;\times)$ est-il un corps?

Exercice 45

Soit la matrice A telle que: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble: $E = \{xI + yA / (x;y) \in \mathbb{R}^2\}$

1) a) Montrer que $(E;+;\ )$ est un espace vectoriel réel.

b) Montrer que: $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\ ;\ A \neq \alpha I$, puis en déduire que la famille $(I;A)$ est une base de l'espace vectoriel réel $(E;+;\cdot)$

2) Vérifier que: $A^2 = A + 2I$, puis en déduire que A admet un inverse A^{-1} et que $A^{-1} \in E$.

3) a) Montrer que E est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R});\times)$

b) Montrer que $(E;+;\times)$ est un anneau unitaire commutatif.

4) a) Montrer que l'équation: $X^2 = X$; $X \in E$ admet quatre solutions. $O_3; I$ et deux autres matrices qu'on note P et Q.

b) Calculer $P \times Q$. P et Q sont-elles inversibles dans $(E;\times)$?

c) Montrer que la famille $(P;Q)$ est une base de l'espace vectoriel rée $(E;+;\cdot)$

Solutions

Exercice 37

1) Montrons que :

$\forall (a,b,c,a) \in \mathbb{R}^4 ; M(a;b) \times M(c;d) = M(ac-3bd\,;\, ad+bc-2bd)$

Soit $M(a;b)$ et $M(c,d)$ deux éléments de E, on a :

$$M(a;b) \times M(c;d) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a-2b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & -d \\ 3d & c-2d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ac-3bd & -ad-b(c-2d) \\ 3bc+3d(a-2b) & -3bd+(a-2b)(c-2d) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ac-3bd & -(bc+ad-2bd) \\ 3(bc+ad-2bd) & ac+bd-2ad-2bc \end{pmatrix}$$

On pose : $X = ac-3bd$ et $Y = bc+ad-2bd$, on a : $(X;Y) \in \mathbb{R}^2$

et : $X-2Y = ac-3bd-2bc-2ad+4bd$

$= ac+bd-2bc-2ad$

Donc : $M(a;b) \times M(c;d) = \begin{pmatrix} X & -Y \\ 3Y & X-2Y \end{pmatrix}$

D'où $\forall M(a;b) \in E$; $\forall M(c;d) \in E$, on a :

$M(a;b) \times M(c;d) = M(ac-3bd\,;\, ad+bc-2bd)$

2) a) Montrons que f est bijective et déterminons sa bijection réciproque f^{-1}

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, tel que $z = a+ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0;0)\}$, existe-t-il un

couple $(x;y)$ de $\mathbb{R}^2-\{(0;0)\}$ tel que : $f(M(x;y))=z$?

On a : $f(M(x;y))=z \Longleftrightarrow (x-y)+iy\sqrt{2}=a+ib$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \quad y=a \\ y\sqrt{2}=b \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=a+\dfrac{b}{\sqrt{2}} \\ y=\dfrac{b}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Donc : $(\forall y\in\mathbb{C}^*);(\exists!(x;y)\in\mathbb{R}^2-\{(0;0)\})\ /\ x-y+iy\sqrt{2}-a+ib$

c'est-à-dire : $(\forall z\in\mathbb{C}^*);(\exists!M(x;y)\in E^*)\ /\ f(M(x;y))=z$

Cela signifie que f est bijective de E^* sur $\mathbb{C}^*$ et on a :

$$f^{-1}: \quad \mathbb{C}^* \longrightarrow E^*$$
$$z=x+iy \longmapsto M\left(x+\frac{y}{\sqrt{2}};\frac{y}{\sqrt{2}}\right)$$

b) Montrons que f est un homomorphisme de $(E^*;\times)$ vers $(\mathbb{C}^*;\times)$

Soit $M(a;b)$ et $M(c;d)$ deux éléments de E^*, on a :
$f(M(a;b))=(a-b)+ib\sqrt{2}$ et $f(M(c;d))=(c-d)+id\sqrt{2}$

Donc :

$$\begin{aligned} f(M(a;b))\times f(M(c;d)) &= ((a-b)+ib\sqrt{2})\times((c-d)+id\sqrt{2}) \\ &= (a-b)(c-d)-2bd+i(d(a-b)+b(c-d))\sqrt{2} \\ &= ac-ad-bc+bd-2bd+i(ad-bd+bc-bd)\sqrt{2} \\ &= (ac-ad-bc-bd)+i(ad+bc-2bd)\sqrt{2} \end{aligned}$$

et puisque : $M(a;b)\times M(c;d)=M(ac-3bd;ad+bc-2bd)$

alors :

$$\begin{aligned} f(M(a;b)\times M(c;d)) &= f(M(ac-3bd;ad+bc-2bd)) \\ &= (ac-3bd-ad-bc+2bd)+i(ad+bc-2bd)\sqrt{2} \\ &= (ac-ad-bc-bd)+i(ad+bc-2bd)\sqrt{2} \end{aligned}$$

Donc $\forall(M(a;b);M(c;d))\in E^2$;
$f(M(a;b)\times M(c;d))=f(M(a;b))\times f(M(c;d))$

d'où : f est un homomorphisme de $(E^*;\times)$ vers $(\mathbb{C}^*;\times)$

3) a) Montrons que $(E;+,\times)$ est un corps commutatif

Montrons que $(E;+)$ est un groupe commutatif

On a : $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$ est un groupe commutatif, donc il suffit de montrer que $(E;+)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$

- On a : $E \neq \phi$ car $I_2 \in E$ pour $a=1$ et $b=0$

- Soit $M(a;b)$ et $M(c;d)$ deux éléments de E, on a :

$$M(a;b)=\begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a-2b \end{pmatrix} \text{ et } M(x;y)=\begin{pmatrix} x & -y \\ 3y & x-2y \end{pmatrix}$$

On a : $-M(x;y)=\begin{pmatrix} -x & y \\ -3y & x+2y \end{pmatrix}$ est le symétrique de $M(x;y)$ dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$

Donc : $M(a;b)+(-M(x;y))=\begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a-2b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -x & y \\ -3y & x+2y \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} a-x & -(b-y) \\ 3(b-y) & (a-x)-2(b-y) \end{pmatrix}$$

On pose : $X=a-x$ et $Y=b-y$, on a : $(X;Y)\in\mathbb{R}^2$

et $M(a;b)+(-M(x;y))=\begin{pmatrix} X & -Y \\ 3Y & X-2Y \end{pmatrix}$

donc : $M(a;b)+(-M(x;y))\in E$

d'où : $\forall (M(a;b);M(x;y))\in E^2 \;;\; M(a,b)+(-M(c;d))\in E$

Par suite $(E;+)$ est un sous groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$

Ainsi $(E;+)$ est un groupe commutatif

• On a $(\mathbb{C}^*;\times)$ et $(E^*;\times)$ sont isomorphes et $(\mathbb{C}^*;\times)$ est un groupe commutatif donc $(E^*;\times)$ est un groupe commutatif.

On a F est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});\times)$ et $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau, donc $\times$ est distributive par rapport à $+$ dans E, d'où $(E;+;\times)$ est un corps commutatif

b) Résolvons dans E l'équaton : $X^2=M(\quad 1;0)$

Soit $M(x;y)$ un élément de E, on a :

$$(M(x;y))^2 = M(-1;0) \Leftrightarrow M(x^2-3y^2;2xy-2y^2) \cdot M(-1;0)$$
$$\Leftrightarrow f(M(x^2-3y^2;2xy-2y^2)) = f(M(-1;0))$$
$$\Leftrightarrow (x^2-y^2-2xy)+i(2xy-2y^2)\sqrt{2} = -1$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \quad y^2 \quad 2xy = \quad 1 \\ \sqrt{2}(2xy-2y^2)=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2-2xy = -1 \\ y(x-y)=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -1 \\ y = 0 \end{cases} ou \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \\ x = y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} ou \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Donc les solutions de l'équation $X^2 = M(-1;0)$ dans E

sont : $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) Déterminons $(M(a;b))^{-1}$ où $M(a;b) \in E^*$

On a : $(M(a;b))^{-1} = (f^{-1}(z))^{-1} = \left(f^{-1}((a-b)+ib\sqrt{2})\right)^{-1}$
$$= f^{-1}\left(\frac{1}{(a-b)+ib\sqrt{2}}\right)$$

Puisque : $\frac{1}{(a-b)+ib\sqrt{2}} = \frac{a-b}{(a-b)^2+2b^2} + i\left(\frac{-b\sqrt{2}}{(a-b)^2+2b^2}\right)$

alors : $f^{-1}\left(\frac{1}{(a-b)+ib\sqrt{2}}\right) = M\left(\frac{a-2b}{(a-b)^2+2b^2};\frac{-b}{(a-b)^2+2b^2}\right)$

Donc : $(M(a;b))^{-1} = M\left(\frac{a-2b}{(a-b)^2+2b^2};\frac{-b}{(a-b)^2+2b^2}\right)$

Exercice 38

1) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); (A+I)^n = 2^{n-1}(A+I)$ en utilisant le raisonnement par récurrence

• Initialisation : Pour $n=1$, on a : $(A+I)^1 = A+I$

et $2^0(A+I) = A+I$ donc : $(A+I)^1 = 2^0(A+I)$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que : $(A+I)^n = 2^n (A+I)$ et montrons que : $(A+I)^{n+1} = 2^n (A+I)$

On a : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); +; \times)$ est un anneau unitaire , donc :

$$\begin{aligned}(A+I)^{n+1} &= (A+I)^n \times (A+I) = 2^{n-1}(A+I)(A+I) \\ &= 2^{n-1}(A^2 + A \times I + I \times A + I^2) \\ &= 2^{n-1}(I + A + A + I) = 2^n (A+I)\end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie pour $n+1$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); (A+I)^n = 2^{n-1}(A+I)$

2) a) Calculons $(B-I)^2$

On a : $B - I = \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

Donc : $(B-I)^2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

b) Déduisons B^n où $n \in \mathbb{N}^*$

On pose : $A = B - I$ donc : $A^2 = (B - I)^2 = I$

D'où d'après la question 1) , on a : $B^n - (A+I)^n = 2^{n-1}(A+I) = 2^{n-1}B$

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); B^n = 2^{n-1}B$

1) Calculons B^3

On a : $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) a) Vérifions que : $A = I_3 + B$

On a : $I_3 + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$

Donc : $A = I_3 + B$

b) Calculons A^n où $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ on a : $A^n = (B + I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k I_3^{n-k}$

Puisque : $(\forall k \in \mathbb{N}) ; k \geqslant 3 \Rightarrow B^k = o_3$ alors :

$$A^n = (B + I_3)^n = C_n^0 B^0 I_3^n + C_n^1 B^1 I_3^{n-1} + C_n^2 B^2 I_3^{n-2}$$

$$= I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n & n \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) a) Vérifions que : $A^3 - 3A^2 + 3A = I_3$

On a d'après la question 2) b) :

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc : $A^3 - 3A^2 + 3A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$- \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

4) Déduisons que A est inversible dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) ; \times)$

On a : $A^3 - 3A^2 + 3A = I_3 \Rightarrow \begin{cases} A \times (A^2 - 3A + 3I_3) = I_3 \\ (A^2 - 3A + 3I_3) \times A = I_3 \end{cases}$

Donc A est inversible dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) ; \times)$ et on a :

$$A^{-1} = A^2 - 3A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Donc : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 40

1) a) • Calculons A^2 :

On a : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc : $A^2 = B$

• Calculons B^2 :

On a : $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

• Calculons AB :

On a : $A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

donc : $A \times B = A + I$

• Calculons $B \times A$

On a : $B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

donc : $B \times A = A + I$

• Vérifions que : $A^3 = A + I$

On a : $A^2 = B$ donc : $A^3 = A^2 \times A = B \times A = A + I$

b) Déduction :

On a : $A^3 = A + I \iff A^3 - A = I$

$\iff A \times (A^2 - I) = I$ et $(A^2 - I) \times A = I$

Donc A est inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on a : $A^{-1} = A^2$ I

c'est-à-dire : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) a) Montrons que $(E;+)$ est un groupe commutatif

On a : $(\forall M \in E);(\exists (x;y;z) \in \mathbb{R}^3) / M = \begin{pmatrix} x & z & y \\ y & x+z & y+z \\ z & y & x+z \end{pmatrix}$

c'est-à-dire : $(\forall M \in E) ; (\exists (x;y;z) \in \mathbb{R}^3) / M = xI + yA + zB$

Donc : $E = \{xI + yA + zB / (x ; y ; z) \in \mathbb{R}\}$

On a : $E \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) ; +)$ est un groupe commutatif

donc il suffit de montrer que $(E ; +)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) ; +)$

• On a : $E \neq \phi$ car $I \in E$ pour $x = 1$ et $y = z = 0$

• Soit M et N deux éléments de E tels que :

M $xI + yA + zB$ et N $x'I + y'A + z'B$ avec $(x;y;z) \subset \mathbb{R}^3$ et $(x';y';z') \in \mathbb{R}^3$

On a : $M + (-N) = (xI + yA + zB) + (-x'I - y'A - z'B)$

$= (x - x')I + (y - y')A + (z - z')B$

On a : $(x \quad x') \in \mathbb{R}$ et $(y \quad y') \in \mathbb{R}$ et $(z \quad z') \in \mathbb{R}$

Donc : $\forall (M;N) \in E^2$; $M + (-N) \in E$

D'où $(E, +)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}(\mathbb{R}); +)$

Par suite $(E; +)$ est un groupe commutatif

b) Montrons que E est une partie stable de $(E; \times)$

Soit M et N deux éléments de E tels que :

$M = xI + yA + zB$ et $N = x'I + y'A + z'B$ avec $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$

et $(x';y';z') \in \mathbb{R}^3$

On a :

$$M\times N=(xI+yA+zB)\times(x'I+y'A+z'B)$$
$$=xx'I+xy'A+xz'B+yx'A+yy'A^2+yz'AB+zx'B+zy'BA+zz'B^2$$
$$=xx'I+(xy'+x'y)A+(xz'+zx')B+yy'B+(yz'+zy')(A+I)+zz'(A+B)$$
$$=(xx'+yz'+zy')I+(xy'+x'y+zy'+yz'+zz')A+(xz'+zx'+yy'+zz')B$$

On a : $xx'+yz'+zy'\in\mathbb{R}$; $xy'+x'y+yz'+zy'+zz'\in\mathbb{R}$

et $xz'+zx'+yy'+zz'\in\mathbb{R}$

Donc : $\forall(M;N)\in E^2$; $M\times N\in E$, d'où E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\times)$

c) Montrons que $(E;+;\times)$ est un anneau unitaire.

On a $(E;+)$ est un groupe commutatif et E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\times)$ et $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau

donc $\times$ est associative et $\times$ est distributive par rapport à $+$ dans E et on a I l'élément neutre de la loi $\times$ dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\times)$ et $I\in E$ donc I est l'élément neutre dans $(E;\times)$, d'où $(E;+;\times)$ est un anneau unitaire.

Exercice 16

1) a) • Montrons que f est un homomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ dans $(\mathbb{R};*)$:

Soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}$, on a : $f(x+y)=x+y+1$

et $f(x)*f(y)=(x+1)*(y+1)=x+1+y+1-1=x+y+1$

Donc : $(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2);f(x+y)=f(x)*f(y)$

D'où f est un homomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ dans $(\mathbb{R};*)$.

• Montrons que f est bijective :

Soit $y\in\mathbb{R}$, on a : $f(x)=y\iff x+1=y$

$$\iff x=y-1$$

Donc : $(\forall y\in\mathbb{R});(\exists!x\in\mathbb{R})/\ f(x)=y$, d'ou : f est bijective, par suite f est un isomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ vers $(\mathbb{R};*)$.

b) Structure de $(\mathbb{R};*)$:

On a : $(\mathbb{R};+)$ est un groupe commutatif et f est un isomorphisme de $(\mathbb{R};+$ vers $(\mathbb{R};*)$ donc $(\mathbb{R};*)$ est un groupe commutatif.

2) • Montrons que g est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*;\times)$ vers $(\mathbb{R}-\{1\};\top)$:

Soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}^*$, on a :

$$g(x\times y)=1-xy \text{ et } g(x)\top g(y)=(1-x)\top(1-y)$$
$$=1-x+1-y-(1-x)(1-y)$$
$$=2-x-y-1+y+x-xy$$
$$=1-xy$$

Donc : $(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^{*2});g(x\times y)=g(x)\top g(y)$

D'ou : g est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*;\times)$ vers $(\mathbb{R}-\{1\};\top)$.

• Montrons que g est bijective :

Soit $y\in\mathbb{R}-\{1\}$, on a : $g(x)=y\Leftrightarrow 1-x=y$
$$\Leftrightarrow x=1-y$$

Puisque : $y\neq 1$ alors $x\neq 0$

Donc : $(\forall y\in\mathbb{R}-\{1\});(\exists!x\in\mathbb{R}^*);g(x)=y$, d'où : g est bijective de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}-\{1\}$.

Par suite g est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*;\times)$ vers $(\mathbb{R}-\{1\};\top)$.

3) Montrons que $(\mathbb{R};*;\top)$ est un corps commutatif :

• $(\mathbb{R};*)$ est un groupe commutatif d'élément neutre 1 (car $f(0)=1$)

• On doit montrer que $(\mathbb{R}-\{1\};\top)$ est un groupe commutatif et que la loi $\top$ est distributive par rapport à la loi $*$ dans $\mathbb{R}$.

-On a g est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*;\times)$ vers $(\mathbb{R}-\{1\};\top)$ et $(\mathbb{R}^*;\times)$ est un groupe commutatif donc $(\mathbb{R}-\{1\};\top)$ est un groupe commutatif

-Montrons que la loi $\top$ est distributive par rapport à la loi $*$ dans $\mathbb{R}$.

-Soit x, y et z des éléments de $\mathbb{R}$, on a :

$$x\top(y*z)=x\top(y+z-1)=x+y+z-1-x(y+z-1)$$
$$=(x+y-xy)+(x+z-xz)-1$$
$$=(x\top y)+(x\top z)-1$$
$$=(x\top y)*(x\top z)$$

Puisque les lois $*$ et $\top$ sont commutatives alors :

$(y*z)\top x=(y\top x)*(z\top x)$

Donc : $(\forall(x;y;z)\in\mathbb{R}^3);\begin{cases}x\top(y*z)=(x\top y)*(x\top z)\\(y*z)\top x-(y\top x)*(z\top x)\end{cases}$

D'où : $\top$ est distributive par rapport à $*$ dans $\mathbb{R}$.

Par suite $(\mathbb{R};*;\top)$ est un groupe commutatif.

Exercice 42

1) a) Calculons B^2 et B^3

On a : $B=A+I=\begin{pmatrix}0&b&b\\1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$

Donc : $B^2=\begin{pmatrix}0&b&b\\1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&b&b\\1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&b&b\\0&-b&-b\end{pmatrix}$

et $B^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&b&b\\0&b&-b\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&b&b\\1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=o_3$

b) Vérifions que : $(I-B)(I+B+B^2)=I$

On a : $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau unitaire.

Donc : $(I-B)(I+B+B^2)=I+B+B^2-B-B^2-B^3=I-B^3$

Puisque : $B^3=o_3$ (o_3 est la matrice nulle dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$).

Alors : $(I-B)(I+B+B^2)=I$

c) Déduction :

On a : $(I-B)(I+B+B^2)=I$ que l'on peut écrire aussi $(I+B+B^2)(I-B)=I$

et puisque : $B=A+I$, Alors : $I-B=-A$

Donc : $(-I-B-B^2)\times A=I$ et $A\times(-I-B-B^2)=I$

D'où A admet $(-I-B-B^2)$ comme inverse dans $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R});\times)$ et on a : $A^{-1}=-I-B-B^2$

2) Montrons que $(I;B;B^2)$ est une famille libre

Soit $(\alpha;\beta;\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que : $\alpha I+\beta B+\gamma B^2=o_3$

On a : $\alpha I+\beta B+\gamma B^2=o_3\Rightarrow\begin{pmatrix}\alpha & b\beta & b\beta\\ \beta & \alpha+\gamma b & \gamma b\\ -\beta & -\gamma b & \alpha-\gamma b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma b=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\alpha=\beta=\gamma=0 \text{ car } b\neq 0$$

Donc la famille $(I;B;B^2)$ est une famille libre.

• Déduction : On a : $(I;B;B^2)$ est une famille libre et génératrice de l'espace vectoriel reel E donc : $(I;B;B^2)$ est une base de E par suite : $\dim E=3$.

1) a) Montrons que $A^3=5A-4I$

On a : $A^2=\begin{pmatrix}5&4&-2\\0&1&0\\-2&2&4\end{pmatrix}$ et $A^3=\begin{pmatrix}-9&0&10\\0&1&0\\10&10&-4\end{pmatrix}$

et on a : $5A-4I=\begin{pmatrix}-5&0&10\\0&5&0\\10&10&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-4&0\\0&0&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&0&10\\0&1&0\\10&10&-4\end{pmatrix}$

Donc : $A^3=5A\quad 4I$

b) Déduisons que la matrice A est inversable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

On a : $A^3=5A-4I$ donc : $\frac{5}{4}A-\frac{1}{4}A^3=I$

D'où : $A\times\left(\frac{5}{4}I-\frac{1}{4}A^2\right)=I$ et $\left(\frac{5}{4}I-\frac{1}{4}A^2\right)\times A=I$

cela signifie que A admet un inverse et que : $A\quad=\frac{5}{4}I\quad\frac{1}{4}A$.

2) a) Montrons que $(E;+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel :

On a : $E\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel, donc il suffit de montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});+;\bullet)$.

• On a : $E \neq \phi$ car $o_3 \in E$ pour $x = y = z = 0$

• Soit M et M' deux éléments de E et $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$,

on a : $M \in E \Longleftrightarrow (\exists (x;y;z) \in \mathbb{R}^3)\,; M = xI + yA + zA^2$

$M' \in E \Longleftrightarrow (\exists (x';y';z') \in \mathbb{R}^3)\,; M' = x'I + y'A + z'A^2$

On a : $\alpha M + \beta M' = \alpha(xI + yA + zA^2) + \beta(x'I + y'A + z'A^2)$

$= (\alpha x + \beta x')I + (\alpha y + \beta y')A + (\alpha z + \beta z')A^2$

Puisque : $\alpha x + \beta x'$, $\alpha y + \beta y'$ et $\alpha z + \beta z'$ sont des nombres réels alors :

$(\alpha x + \beta x')I + (\alpha y + \beta y')A + (\alpha z + \beta z')A^2 \in E$

C'est-à-dire: $\alpha M + \beta M' \in E$

Donc : $(\forall (M;M') \in E^2);(\forall (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2)\,; \alpha M + \beta M' \in E$

D'où : E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}); +;\cdot)$ par suite $(E; +;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

b) Montrons que $(I;A;A^2)$ est une base de E :

• D'après a définition de l'ensemble E, on a :

$(\forall M \in E) \Longleftrightarrow (\exists (x;y;z) \in \mathbb{R}^3)\,; M = xI + yA + zA^2$

Cela signifie que la famille $(I;A;A^2)$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel réel $(E; +;\cdot)$.

• Montrons que la famille $(I;A;A^2)$ est libre :

Soit $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $xI + yA + zA^2 = o_3$

On

$$xI + yA + zA^2 = o_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y & 0 & 2y \\ 0 & y & 0 \\ 2y & 2y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5z & 4z & -2z \\ 0 & z & 0 \\ -2z & 2z & 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x-y+5z & 4z & 2y-2z \\ 0 & x+y+z & 0 \\ 2y-2z & 2y+2z & x+4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y+5z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+4z=0 \\ y-z=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = y = z = 0$$

Donc : $(\forall (x;y;z) \in \mathbb{R}^3) ; xI + yA + zA^2 = o_3 \Rightarrow x = y = z = 0$

D'où : la famille $(I;A;A^2)$ est une famille libre, par suite la famille $(I;A;A^2)$ est une base de l'espace vectoriel $(E;+;\bullet)$.

3) a) Montrons que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\times)$:

• Soit M et M' deux éléments de E tels que :

$M = xI + yA + zA^2$ et $M' = x'I + y'A + z'A^2$ où x, y, z, x', y' et z' sont des nombres réels, on a :

$M \times M' = xx'I + (xy' + yx')A + (xz' + yy' + zx')A^2 + (yz' + zy')A^3 + zz'A^4$

Puisque : $A^3 = 5A - 4I$ et $A^4 = (5A - 4I) \times A = 5A^2 - 4A$

Alors :

$M \times M' = (xx' - 4yz - 4y'z)I + (xy' + yx' + 5yz' + 5zy' - 4zz')A + (xz' + yy' + x'z - 5zz')A^2$

Donc : $M \times M' \in E$

D'où : $(\forall (M;M') \in E^2) ; M \times M' \in E$ signifie que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\times)$.

b) Montrons que $(E;+;\times)$ est un anneau unitaire :

• $(E;+)$ est un groupe commutatif car $(E;+;\bullet)$ est un espace réel.

• La multiplication est associative et distributive par rapport à l'addition dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\times)$ alors $\times$ est associative et distributive par rapport à + dans E.

• $I \in E$ et I est l'élément neutre dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\times)$ donc I est l'élément neutre dans $(E;\times)$. D'où : $(E;+;\times)$ est un anneau unitaire.

c) Déterminons les coordonnées de la matrice N dans la base $(I;A;A^2)$:

On a : $A \times I = I \times A$, donc : $N^3 = (I + A)^3 = I^3 + 3I^2A + 3IA^2 + A^3$

$= I + 3A + 3A^2 + 5A - 4I$

$= -3I + 8A + 3A^2$

D'où : $(-3;8;3)$ est le triplet des coordonnées de N^3 dans la base $(I;A;A^2)$.

1) a) • Calculons A^2, A^3 et A^n en fonction de n $(n \in \mathbb{N}^*)$

On a : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $A^3 - A^2 \times A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3I$

• Calculons A^n où $(n \in \mathbb{N}^*)$:

On a : $A^3 = 3I$ donc : $(\forall k \in \mathbb{N}^*) ; A^{3k} = 3^k . I$

* Si $n \equiv 0[3]$ alors : $(\exists k \in \mathbb{N}^*) ; n = 3k$ donc : $A^n = A^{3k} = 3^k . I$

C'est-à-dire : $A^n = 3^{\frac{n}{3}} I$

* Si $n \equiv 1[3]$ alors : $(\exists k \in \mathbb{N}) ; n = 3k + 1$ donc : $A^n = A^{3k} \times A = 3^{\frac{n-1}{3}} A$

* Si $n \equiv 2[3]$ alors : $(\exists k \in \mathbb{N}) ; n = 3k + 2$ donc : $A^n = A^{3k} \times A^2 = 3^{\frac{n-2}{3}} A^2$

b) Montrons que A admet une matrice inverse A^{-1} :

On a : $A^3 = 3I$ donc : $\left(\frac{1}{3}A^2\right) \times A = I$ et $A \times \left(\frac{1}{3}A^2\right) = I$

Donc : A admet une matrice inverse A^{-1} telle que :

$A^{-1} = \frac{1}{3}A^2$ c'est-à-dire : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) a) Montrons que $(I; A; A^2)$ est une famille libre dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}); +; \cdot)$:

- Soit x, y et z trois nombres réels tels que : $xI + yA + zA^2 = o$

On a : $xI + yA + zA^2 = o \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 3z & 3y \\ y & x & 3z \\ z & y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x = y = z = 0$

Donc : $(\forall (x; y; z) \in \mathbb{R}^3) ; xI + yA + zA^2 = o \Rightarrow x = y = z = 0$

Cela signifie que la famille $(I;A;A^2)$ est libre dans l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});+;\cdot)$.

b) Montrons que $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel de dimension 3:

- Il suffit de montrer que $(E;+;\cdot)$ est un sous-espace vectoriel réel de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});+;\cdot)$.

• On a : $E \neq \phi$ car $I \in E$

• Soit M et N deux éléments de E et α et β deux nombres réels.

On a : $M \in E \Leftrightarrow \exists (x;y;z) \in \mathbb{R}^3 ; M = xI + yA + zA^2$

$N \in E \Leftrightarrow \exists (a;b;c) \in \mathbb{R}^3 ; N = aI + bA + cA^2$

On a : $\alpha M + \beta N = \alpha(xI + yA + zA^2) + \beta(aI + bA + cA^2)$

$= (\alpha x + \beta a)I + (\alpha y + \beta b)A + (\alpha z + \beta c)A^2$

Puisque : $\alpha x + \beta a \in \mathbb{R}$, $\alpha y + \beta b \in \mathbb{R}$ et $\alpha z + \beta c \in \mathbb{R}$ alors : $\alpha M + \beta N \in E$

Donc : $\forall (M;N) \in E^2 ; \forall (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2 ; \alpha M + \beta N \in E$

D'où : $(E;+;\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});+;\cdot)$ et par suite $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

- Montrons que : $\dim E = 3$

• On a : $(I;A;A^2)$ est une famille libre dans $(E;+;\cdot)$.

• On a : $(\forall M \in E) \Leftrightarrow \exists (x;y;z) \in \mathbb{R}^3 ; M = xI + yA + zA^2$

cela signifie que $(I;A;A^2)$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel $(E;+;\cdot)$, donc : $(I;A;A^2)$ est une base de l'espace vectoriel réel $(E;+;\cdot)$ d'où : $\dim E = 3$

3) a) Montrons que $(E;+;\times)$ est un anneau commutatif et unitaire :

On a : $(E;+)$ est un groupe commutatif car $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Montrons que E est stable dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\times)$:

Soit M et N deux éléments de E tels que :

$M = xI + yA + zA^2$ et $N = aI + bA + cA^2$ où a, b, c, x, y et z sont des nombres réels.

On a : $M\times N=(xI+yA+zA^2)\times(aI+bA+cA^2)$

$$-xaI+xbA+xcA^2+yaA+ybA^2+ycA^3+zaA^2+zbA^3+zcA^4$$

Puisque : A^3-3I et A^4-3A

alors : $M\times N=(xa+3yc+3zb)I+(xb+ya+3zc)A+(xc+yb+za)A^2$

$$=\alpha I+\beta A+\gamma A^2 \text{ avec } (\alpha;\beta;\gamma)\in\mathbb{R}^3$$

Donc : $\forall(M;N)\in E^2$; $M\times N\in E$, d'où : E est stable dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\times)$.

• E est stable dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\times)$ et la loi $\times$ est associative et distributive par rapport à la loi + dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc $\times$ est associative et distributive par rapport à + dans E.

• I est l'élément neutre dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\times)$ et $I\in E$ donc I est l'élément neutre dans $(E;\times)$.

• On a : $\forall(M;N)\in E^2$; $M\times N=N\times M$ (vérifier le)

Donc $\times$ est commutative dans E.

D'où : $(E;+;\times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

b) Calculons $\det(-\sqrt[3]{3}A+A^2)$:

On a : $-\sqrt[3]{3}A+A^2=-\sqrt[3]{3}\begin{pmatrix}0&0&3\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&3&0\\0&0&3\\1&0&0\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}0&3&-3\sqrt[3]{3}\\-\sqrt[3]{3}&0&3\\1&-\sqrt[3]{3}&0\end{pmatrix}$$

Donc : $\det(-\sqrt[3]{3}A+A^2)=0\times\begin{vmatrix}0&3\\-\sqrt[3]{3}&0\end{vmatrix}+\sqrt[3]{3}\begin{vmatrix}3&-3\sqrt[3]{3}\\-\sqrt[3]{3}&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&-3\sqrt[3]{3}\\0&3\end{vmatrix}$

$$=0+\sqrt[3]{3}(-3(\sqrt[3]{3})^2)+9=9-9=0$$

On a : $\det(A^2-\sqrt[3]{3}A)=0$ donc la matrice $A^2-\sqrt[3]{3}A$ n'admet pas d'inverse dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\times)$ et on a : $A^2-\sqrt[3]{3}A\in E$

Donc : $A^2-\sqrt[3]{3}A$ n'admet pas d'inverse dans $(E;\times)$

D'où : $(E;+;\times)$ n'est pas un corps.

Exercice 45

1) a) Montrons que $(E;+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel :

On a : $E \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel, donc il suffit de montrer que $(E;+;\bullet)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}(\mathbb{R});+;\bullet)$.

• $E \neq \phi$ car $o_3 \in E$ pour $x = y = 0$

• Soit M et M' deux éléments de E et α et β deux nombres réels, on a :

$$M \in E \Leftrightarrow \exists (x;y) \in \mathbb{R}^2 ; M = xI + yA$$
$$M' \in E \Leftrightarrow \exists (x';y') \in \mathbb{R}^2 ; M' = x'I + y'A$$

Donc : $\alpha M + \beta M' = \alpha(xI + yA) + \beta(x'I + y'A)$

$$= \alpha xI + \alpha yA + \beta x'I + \beta y'A$$
$$= (\alpha x + \beta x')I + (\alpha y + \beta y')A$$

Puisque : $\alpha x + \beta x' \in \mathbb{R}$ et $\alpha y + \beta y' \in \mathbb{R}$

alors : $(\alpha x + \beta x')I + (\alpha y + \beta y')A \in E$ C'est-à-dire : $\alpha M + \beta M' \in E$

Donc : $(\forall (M,M') \in E^2);(\forall (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2), \alpha M \times \beta M' \in E$

D'où : E est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});+;\bullet)$, par suite $(E;+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

b) • Montrons que : $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) ; A \neq \alpha I$

Supposons qu'il existe un réel α tel que : $A = \alpha I$

On a : $A = \alpha I \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \alpha = 0 \text{ et } 1 = 0$$

Ce qui est impossible, donc : $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) ; A \neq \alpha I$

• Déduction :

- On a d'après la définition de l'ensemble E :

$(\forall M \in E);(\exists (x;y) \in \mathbb{R}^2) ; M = xI + yA$, cela signifie que la famille $(I;A)$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel réel $(E;+;\bullet)$.

- Soit α et β deux nombres réels tels que : $\alpha I + \beta A = o_3$

Si $\beta \neq 0$ alors : $\alpha I + \beta A = o_3 \Longleftrightarrow A = -\frac{\alpha}{\beta} I$

Cela est impossible d'après la question précédente.

Donc : $\beta = 0$ et par suite on a : $\alpha I = o_3$ donc : $\alpha = 0$

D'où : $(\forall (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2); \alpha I + \beta A - o_3 \Rightarrow \alpha - \beta - 0$

Ainsi la famille $(I;A)$ est une famille libre de l'espace vectoriel $(E;+;\cdot)$

et donc $(I;A)$ est une base de l'espace vectoriel $(E;+;\cdot)$.

2) • Vérifions que : $A^2 = A + 2I$

On a: $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I$

• Déduction :

On a : $A^2 = A + 2I$ donc : $A^2 - A = 2I$

D'où : $A \times \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I\right) = \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I\right) \times A = I$

Par suite . A admet un inverse A tel que : $A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I$

et on a : $A^{-1} \in E$

3) a) Montrons que E est une partie stable de $(.\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\times)$:

Soit M et M' deux éléments de E tels que : $M = xI + yA$ et $M' = x'I + y'A$

où x, y, x' et y' sont des nombres réels.

On a : $M \times M' = (xI + yA) \times (x'I + y'A)$

$= xx'I + xy'A + yx'A + yy'A^2$

$= xx'I + (xy' + yx')A + yy'(A + 2I)$

$= (xx' + 2yy')I + (xy' + yx' + yy')A$ (car $A^2 = A + 2I$)

On a : $xx' + 2yy' \in \mathbb{R}$ et $xy' + yx' + yy' \in \mathbb{R}$

Donc : $(xx' + 2yy')I + (xy' + yx' + yy')A \in E$

c'est-à-dire : $M \times M' \in E$ d'où : $\forall (M;M') \in E; M \times M' \in E$

cela signifie que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\times)$.

b) Montrons que $(E;+;\bullet)$ est un anneau unitaire et commutatif :

• $(E;+)$ est un groupe commutatif car $(E;+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

• E est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\times)$ et $\times$ est associative et distributive par rapport à + dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc $\times$ est associative et $\times$ est distributive par rapport à + dans E.

• On a : $I \in E$ et I est l'élément neutre dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\times)$ donc : I est l'élément neutre dans $(E;\times)$.

• On a : $\forall (M;M') \in E^2 ; M \times M' = M' \times M$ (vérifier le)

Donc $\times$ est commutative dans E.

D'où : $(E;+,\times)$ est un anneau commutatif et unita re.

4) a) Résolvons dans E l'équation $X^2 = X$:

Soit X un élément de E, on a : $\exists (x;y) \in \mathbb{R}^2 ; X = xI + yA$

et $X^2 = (x^2 + 2y^2)I + (y^2 + 2xy)A$,

donc : $X^2 = X \iff (x^2 + 2y^2)I + (y^2 + 2xy)A = xI + yA$

$$\iff \begin{cases} x^2 + 2y^2 = x \\ y^2 + 2xy = y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y(y + 2x - 1) = 0 \\ x^2 + 2y^2 - x = 0 \end{cases}$$

• Si $y = 0$ alors : $x = 0$ ou $x = 1$

Donc : $X = I$ ou $X = o_3$

• Si $y \neq 0$ alors : $y + 2x - 1 = 0$ c'est-à-dire : $y = 1 - 2x$

Donc : $x^2 + 2y^2 - x = 0 \iff x^2 + 2(1 - 2x)^2 - x = 0$

$$\iff 9x^2 - 9x + 2 = 0$$

$$\iff x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = \frac{2}{3}$$

-Si $x = \frac{1}{3}$ alors : $y = \frac{1}{3}$ donc : $X = \frac{1}{3}I + \frac{1}{3}A$

-Si $x = \frac{2}{3}$ alors : $y = -\frac{1}{3}$ donc : $X = \frac{2}{3}I - \frac{1}{3}A$

D'où les solutions de l'équation : $X^2 = X$ dans E sont : I ; o_3 ; $P = \frac{1}{3}I + \frac{1}{3}A$ et $Q = \frac{2}{3}I - \frac{1}{3}A$

b) Calculons $P \times Q$.

On a : $P \times Q = \left(\frac{1}{3}I + \frac{1}{3}A\right) \times \left(\frac{2}{3}I + \frac{1}{3}A\right)$

$= \frac{2}{9}I - \frac{1}{9}A + \frac{2}{9}A - \frac{1}{9}A^2$

$-\frac{2}{9}I + \frac{1}{9}A - \frac{1}{9}A - \frac{2}{9}I$ (car $A^2 = A + 2I$)

$= O_3$

On a : $P \times Q = O_3$ et $P \neq O_3$ et $Q \neq O_3$, donc : P et Q sont deux diviseurs de zéro et par suite P et Q n'ont pas d'inverse dans $(E; \times)$.

c) Montrons que la famille $(P;Q)$ est une base de $(E; +; \cdot)$:

On a : $P = \frac{1}{3}I + \frac{1}{3}A$ donc : $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ est le couple de coordonnées de P dans la base $(I;A)$.

et $Q = \frac{2}{3}I - \frac{1}{3}A$ donc : $\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ est le couple de coordonnées de Q dans la base $(I;A)$.

Donc : $\det(P;Q) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{9} - \frac{2}{9} = -\frac{1}{3}$

Puisque : $\det(P;Q) \neq 0$ alors $(P;Q)$ est une famille libre de l'espace vectoriel réel $(E; +; \cdot)$.

et on a : $\dim E = 2$ donc : $(P;Q)$ est une base de l'espace vectoriel rée $(E; +; \cdot)$.

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Résumé

I Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Définition

Soit a et b deux éléments de $\mathbb{Z}$

On dit que a divise b et on écrit $a|b$, lorsqu'il existe k de $\mathbb{Z}$ tel que : $b = ka$; autrement dit: $a|b \iff (\exists k \in \mathbb{Z})\ ;\ b = ka$

Propriétés

Soit a, b, c, d, u et v des éléments de $\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

1) $a|a$

2) $(a|b \text{ et } b|a) \iff |a| = |b|$

3) $(a|b \text{ et } b|c) \Longrightarrow a|c$

4) $(d|a \text{ et } d|b) \Longrightarrow (d|a+b \text{ et } d|a-b)$

5) $(d|a \text{ et } d|b) \Longrightarrow (d|au+bv)$

6) $a|b \longrightarrow a^n|b^n$

7) $\begin{cases} a|b \\ c|d \end{cases} \Longrightarrow ac|bd$

8) $(ac|bc \text{ et } c \neq 0) \Longrightarrow a|b$

9) $(a|ka+b) \Longrightarrow a|b$

10) $(a|1 \Longrightarrow (a = 1 \text{ ou } a = -1))$

Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

$$(\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*), (\exists! (q;r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}) : \begin{cases} a = qb + r \\ 0 \leq r < b \end{cases} \quad (1)$$

Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

$$(\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*) ; (\exists! (q;r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \ ; \begin{cases} a = qb + r \\ 0 \leqslant r < |b| \end{cases}$$

II Congruence modulo n

Définition

$a \equiv b|n \iff n|b-a$ ($a \equiv b[n]$ se lit : a est congru à b modulo n)

Propriétés

Soit a, b, c et d quatre éléments de $\mathbb{Z}$ et n et p deux éléments de $\mathbb{N}^*$

1) $a \equiv a[n]$

2) $(a \equiv b[n] \Longrightarrow b = a[n])$

3) $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ b \equiv c[n] \end{cases} \Longrightarrow a \equiv c[n]$

4) $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ c \equiv d[n] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + d[n] \\ ac \equiv ba[n] \end{cases}$

5) $a \equiv b[n] \Longrightarrow a^p \equiv b^p[n]$

6) $a \equiv b[n] \Longrightarrow pa \equiv pb[n]$

7) $\begin{cases} a \equiv r[n] \iff r \text{ est le reste de la division euclidienne de } a \text{ par } n \\ 0 \leq r < n \end{cases}$

III Ensemble

Propriété

L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}; \overline{1}; \overline{2}; \cdots, \overline{n-1}\}$ est appelé: ensemble quotient.

On a : $(\forall x \in \mathbb{Z})$; $x = \{y \in \mathbb{Z} / y \equiv x[n]\} = \{x + kn ; k \in \mathbb{Z}\}$

(x est appelé classe d'équivalence de x modulo n)

- $a \in \overline{x} \iff x \equiv a[n]$
- $a \equiv b[n] \iff \overline{a} = \overline{b}$
- $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$
- $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{ab}$

Si $0 \leq a < n$ et $0 \leq b < n$ alors $\overline{a} = \overline{b} \iff a = b$

$\overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} \cup \cdots\cdots \cup (\overline{n-1}) = \mathbb{Z}$

Exercices d'application

Exercice 1

Déterminer le chiffre d'unité du nombre $N = 1987^{1991^{1995}}$

Exercice 2

Montrer que le nombre $(9518)^{41} - 4$ est un multiple de 5

Exercice 3

1) Déterminer les restes de la division euclidienne du nombre 7 par les nombres suivants : 5, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5, 5^6 et 5^7

2) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne du nombre 5^n par 7

Exercice 4

Calculer x dans chacun des cas :

1) $(2601)^{187} \equiv x[11]$ et $0 \leq x < 11$

2) $(82324)^{625} \equiv x[7]$ et $0 \leq x < 7$

Exercice 5

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 10^{3n} \equiv 1[27]$

2) On pose : $A = 10^{100} + 10^{20}$

Déterminer le reste de la division euclidienne du nombre A par 27

Exercice 6

Montrer que pour tout entier naturel n on a :

1) Le nombre $A = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7

2) Le nombre $B = 3^{n+3} - 4^{n+2}$ est divisible par 11

Exercice 7

Soit x, y et z des éléments de $\mathbb{N}$ tels que $3x - 7y - 24z = 0$

Montrer que: $21 \mid y(x - z)$

Exercice 8

1) Soit a et b deux éléments de $\mathbb{Z}^*$ tels que : $a \wedge b = 1$

Déterminer en fonction de a et b l'élément c de $\mathbb{Z}$ tel que :

$b \mid ac$; $c \mid ab$ et $a \mid bc$

2) Déterminer les entiers naturels a, b et c tels que : $\begin{cases} a \wedge b = 12 \\ b \wedge c = 18 \\ a + b + c = 102 \end{cases}$

Exercice 9

Soit a et b deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que : $a \wedge b = 1$

Montrer que : $(a^2 - ab + b^2) \wedge (a + b) \leq 3$

Exercice 10

Soit a et b deux éléments de $\mathbb{Z}$

Montrer que : $(a^2 + b^2) \wedge ab = (a \wedge b)^2$

Exercice 11

Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux .

1) Montrer que :

a) $(a+b) \wedge a = 1$ b) $(a+b) \wedge b = 1$ c) $(a+b) \wedge ab = 1$

2) On pose : $d = (a+b) \wedge (a^2 + b^2 - ab)$

Montrer que : $d = 1$ ou $d = 3$

3) Soit n un entier naturel.

On pose : $\alpha = (a+b) \wedge (a^2 + b^2 - nab)$

Montrer que : a) $\alpha | (n+2)ab$ b) En déduire que : $\alpha | n+2$

Exercice 12

Soit p un nombre premier impair.

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$; l'équation : $x^2 - y^2 = p$

Exercice 13

Existe-t-il un nombre entier naturel n non nul ; tel que : $2^{n^2+2} + 1$ soit premier?

Solutions

Exercice 1

Pour déterminer le chiffre d'unité du nombre N, il suffit de déterminer le reste de la division euclidienne du nombre N par 10

On a : $1987 \equiv 7[10]$ et $1987^2 \equiv 9[10]$

et $1987^3 \equiv 3[10]$ et $1987^4 \equiv 1[10]$

Donc : $1987^{4k} \equiv 1[10]$, $1987^{4k+1} \equiv 7[10]$

$1987^{4k+2} \equiv 9[10]$ et $1987^{4k+3} \equiv 3[10]$ pour tout k de $\mathbb{N}$

Déterminons le reste de la division euclidienne du nombre 1991^{1983} par 4

On a : $1991 \equiv 3[4]$ et $1991^2 \equiv 1[4]$

et puisque 1983 est un nombre impair alors : $1991^{1983} = 3[4]$

c'est-à-dire : $1991^{1983} = 3 + 4k$ où $k \in IN$

D'où : $1987^{1991^{1983}} \equiv 3[10]$

Par conséquent : 3 est le chiffre d'unité du nombre Λ

Exercice 2

On a : $9518 \equiv 3[5]$

Déterminons l'ensemble des entiers n tels que $3^n \equiv 1[5]$

On a : $3^0 \equiv 1[5]$

$3 \equiv 3[5]$

$3^2 \equiv 4[5]$

$3^3 \equiv 2[5]$

$3^4 \equiv 1[5]$

Donc le reste de la division euclidienne 3^n par 5 dépend du reste de la division euclidienne de n par 4

On a : $42 = 4 \times 10 + 2$

Donc : $9518 \equiv 3[5] \Longrightarrow (9518)^{42} \equiv (3)^{42}[5]$

$\Longrightarrow (9518)^{42} \equiv (3^4)^{10} \times 3^2[5]$

Et puisque : $\begin{cases}(3^4)^{10} \equiv 1[5] \\ 3^2 \equiv 4[5]\end{cases}$

Alors : $(3^4)^{10} \times 3^2 \equiv 4[5]$

Donc : $(9518)^{42} \equiv 4[5]$

C'est-à-dire : $(9518)^{42} - 4 \equiv 0[5]$

Par conséquent : $(9518)^{42} - 4$ est un multiple de 5

Exercice 3

Rappel :

$(r$ est le reste de la division euclidienne de x par $n) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \equiv r[n] \\ 0 \leqslant r < n-1 \end{pmatrix}$

1) On a :

$5 \equiv 5[7]$ donc 5 est le reste de la division euclidienne de 5 par 7

$5^2 \equiv 4[7]$ donc 4 est le reste de la division euclidienne de 5^2 par 7

$5^3 \equiv 6[7]$ donc 6 est le reste de la division euclidienne de 5^3 par 7

$5^4 \equiv 2[7]$ donc 2 est le reste de la division euclidienne de 5^4 par 7

$5^5 \equiv 3[7]$ donc 3 est le reste de la division euclidienne de 5^5 par 7

$5^6 \equiv 1[7]$ donc 1 est le reste de la division euclidienne de 5^6 par 7

$5^7 \equiv 5[7]$ donc 5 est le reste de la division euclidienne de 5^7 par 7

2) On a $5^6 \equiv 1[7]$ donc le reste de la division euclidienne de 5^n dépend du reste de la division euclidienne du nombre n par 6

d'où les cas suivants :

1ère cas : $n \equiv 0[6]$ ($n = 6k$ où $k \in \mathbb{N}$)

On a : $5^n = 5^{6k} = (5^6)^k$

Donc : $5^6 \equiv 1[7] \Longrightarrow (5^6)^k \equiv 1^k[7]$

$\Longrightarrow 5^n \equiv 1[7]$

Par conséquent 1 est le reste de la division de 5^n par 7 (où $n = 6k$; $k \in \mathbb{N}$)

2ème cas : $n \equiv 1[6]$ ($n = 6k+1$ ou $k \in \mathbb{N}$)

On a : $5^n = 5^{6k+1} = (5^6)^k \times 5$ donc : $\begin{cases}(5^6)^k \equiv 1[7] \\ 5 \equiv 5[7]\end{cases} \Longrightarrow 5^{6k+1} \equiv 5[7]$ (1)

$\Longrightarrow 5^n \equiv 5[7]$

d'où 5 est reste de la division euclidienne de 5^n par 7 (où $n = 6k+1$; $k \in \mathbb{N}$)

3ème cas : $n \equiv 2[6]$ ($n = 6k+2$ où $k \in \mathbb{N}$)

On a : $5^n = 5^{6k+2} = (5^6)^k \times 5^2$

Donc : $\begin{cases}(5^6)^k \equiv 1[7] \\ 5^2 \equiv 4[7]\end{cases} \Longrightarrow 5^{6k+2} \equiv 4[7]$ (2)

$\Longrightarrow 5^n \equiv 4[7]$

d'où 4 est le reste de la division euclidienne de 5^n par 7 (où $n = 6k+2$; $k \in \mathbb{N}$).

4ème cas : $n \equiv 3[6]$ ($n = 6k+3$ où $k \in \mathbb{N}$)

On a : $5^n = (5^6)^k \times 5^3$

Donc : $\begin{cases}(5^6)^k \equiv 1[7] \\ 5^3 \equiv 6[7]\end{cases} \Longrightarrow 5^{6k+3} \equiv 6[7]$ (3)

$\Longrightarrow 5^n \equiv 6[7]$

d'où 6 est le reste de la division euclidienne de 5^n par 7 ($n = 6k+3$; $k \in \mathbb{N}$)

5ème cas : $n \equiv 4[6]$ ($n = 6k+4$ où $k \in \mathbb{N}$)

On a : $5^n = (5^6)^k \times 5^4$

Donc : $\begin{cases}(5^6)^k \equiv 1[7] \\ 5^4 \equiv 2[7]\end{cases} \Longrightarrow 5^{6k+4} \equiv 2[7]$ (4)

$\Longrightarrow 5^n \equiv 2[7]$

D'où 2 est le reste de la division euclidienne de 5^n par 7 $(n = 6k + 4)$

6ème cas : $n \equiv 5[6]$ $(n = 6k + 5$ où $k \in \mathbb{N})$

On a : $5^n = (5^6)^k \times 5^5$

Donc : $\begin{cases}(5^6)^k \equiv 1[7] \\ 5^5 \equiv 3[7]\end{cases} \Longrightarrow 5^{6k+5} \equiv 3[7]$ (5)

$\Longrightarrow 5^n \equiv 3[7]$

D'où 3 est le reste de la division euclidienne de 5^n par 7 $(n = 6k + 5)$

1) On a : $2601 \equiv 5[11]$

Déterminons les entiers naturels n tels que : $5^n \equiv 1[11]$

On a : $5 \equiv 5[11]$

$5^2 \equiv 3[11]$

$5^3 \equiv 4[11]$

$5^4 \equiv 9[11]$

$5^5 \equiv 1[11]$

Donc le reste de la division euclidienne de 5^n par 11 dépend du reste de la division euclidienne du nombre n par 5

On a : $187 = 5 \times 37 + 2$

Donc : $5^5 \equiv 1[11] \longrightarrow (5^5)^{37} \equiv 1[11]$

$\rightarrow (5^5)^{37} \times 5^2 \equiv 5^2[11]$

$\Longrightarrow 5^{187} \equiv 3[11]$

D'autre part : $2601 \equiv 5[11] \Longrightarrow (2601)^{187} \equiv (5)^{187}[11]$

D'où : $(2601)^{187} \equiv 3[11]$

Par suite $x = 3$

2) On a : $82324 \equiv 4[7]$

Déterminons les entier naturels n tels que naturels tels que : $4^n \equiv 1[7]$

On a : $4 \equiv 4[7]$

$4^2 \equiv 2[7]$

$4^3 \equiv 1[7]$

Donc le reste de la division euclidienne de 4^n par 7 dépend du reste de la division euclidienne du nombre n par 3

On a : $625 = 3 \times 208 + 1$

Donc : $4^3 \equiv 1[7] \Longrightarrow (4^3)^{208} \equiv 1[7]$

$\Longrightarrow (4^3)^{208} \times 4^1 \equiv 4^1[7]$

$\Longrightarrow (4)^{625} \equiv 4[7]$

D'autre part : $82324 \equiv 4[7] \Longrightarrow (82324)^{625} \equiv (4)^{625}[7]$

Donc : $(82324)^{625} \equiv 4[7]$

Par conséquent $x - 4$

Exercice 5

1) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $10^{3n} \equiv 1[27]$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$

On a : $27 \times 37 = 999$ donc $999 \equiv 0[27]$

D'ou : $1000 \equiv 1[27]$ c'est-à-dire : $10^3 \equiv 1[27]$

D'où : $10^{3n} \equiv 1[27]$

Par suite $(\forall n \in \mathbb{N})$; $10^{3n} \equiv 1[27]$

2) Déterminons le reste de la division du nombre A par 27

On a : $A = 10^{100} + 10^{20} = 10^{3\times33+1} + 10^{3\times6+2}$

$= 10^{3\times33} \times 10 + 10^{3\times6} \times 10^2$

D'après a) on en déduit que : $10^{3\times33} \equiv 1[27]$ et $10^{3\times6} \equiv 1[27]$

Donc : $A \equiv 10 + 10^2[27]$ c'est-à-dire : $A \equiv 110[27]$

Et puisque : $110 \equiv 2[27]$ alors : $A \equiv 2[27]$

Exercice 6

Soit n un élément de $\mathbb{N}$

1) Montrons que le nombre $A = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7,

c'est-à-dire $A \equiv 0[7]$.

On a : $9 \equiv 2[7]$ c'est-à-dire : $3^2 \equiv 2[7]$ donc : $3^{2n} \equiv 2^n[7]$

D'où : $3^{2n+1} \equiv 3 \times 2^n [7]$ (1)

Et puisque : $3 \equiv -4[7]$ alors : $3 \equiv -2^2[7]$ donc : $3 \times 2^n \equiv -2^{n+2}[7]$ (2)

de (1) et (2) on en déduit que : $3^{2n+1} \equiv -2^{n+2}[7]$

c'est-à-dire : $3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 0[7]$

Par conséquent le nombre $A = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7

2) Montrons que le nombre $B = 3^{n+1} - 4^{n+2}$ est divisible par 11 c'est-à-dire :

$B = 0[11]$

On a : $4 \equiv 4[11]$ et $4^2 \equiv 5[11]$ et $4^3 \equiv 9[11]$ et $4^4 \equiv 3[11]$

Donc : $4^{4n} \equiv 3^n[11]$

Et puisque : $4^2 \equiv 5[11]$ et $3^3 \equiv 5[11]$ alors : $4^2 \equiv 3^3[11]$

D'où : $\begin{cases} 4^{\cdots} \equiv 3^n[11] \\ 4^2 \equiv 3^3[11] \end{cases} \Longrightarrow 4^{4n} \times 4^2 \equiv 3^n \times 3^3[11]$

c'est-à-dire : $4^{4n+2} \equiv 3^{n+3}[11]$ donc : $3^{n+3} - 4^{4n+2} \equiv 0[11]$

Par conséquent : $B = 3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11

Exercice 7

Montrons que $21 \mid y(x-z)$

On a : $3x - 7y - 24z = 0 \Longleftrightarrow 3(x-8z) = 7y$

Donc : $3 \mid 7y$

et puisque : $7 \wedge 3 = 1$ alors $3 \mid y$ (d'après le théorème de Gauss)

Donc : $(\exists p \in \mathbb{N})$; $y = 3p$ (1)

D'où : $3x - 7y - 24z = 0 \Longleftrightarrow 3x - 21p - 24z = 0$

$\Longleftrightarrow x - 7p - 8z = 0$

$\Longleftrightarrow x - z = 7(p+z)$

Par suite $7 \mid x-z$, ainsi : $(\exists q \in \mathbb{N})$; $x - z = 7q$ (2)

de (1) et (2) on en déduit que : $y(x-z) = 21pq$

Par conséquent : $21 \mid y(x-z)$

Exercice 8

1) Déterminons c tel que : $a \mid bc$, $b \mid ac$ et $c \mid ab$

On a : $a \mid bc$ et $a \wedge b = 1$ donc $a \mid c$ (d'après le théorème de Gauss)

et on a : $b|ac$ et $b \wedge a = 1$ donc $b\ c$ (d'après le théorème de Gauss)

et on a : $a|c$ et $b|c$ et $a \wedge b = 1$ donc $ab|c$, et par hypothèse on a : $c|ab$

Donc : $|c| = |ab|$ c'est-à-dire $c = ab$ ou $c = -ab$

2) On a : $a \wedge b \wedge c = (a \wedge b) \wedge (b \wedge c)$

et puisque : $a \wedge b = 12$ et $b \wedge c = 18$ alors $a \wedge b \wedge c = 12 \wedge 18 = 6(2 \wedge 3) = 6$

Donc : $(\exists (x,y,z) \in (\mathbb{N}^*)\ )$; $(a = 6x$ et $b = 6y$ et $c = 6z)$ avec $x \wedge y \wedge z = 1$

et on a : $a + b + c = 102 \iff 6(x + y + z) = 102$

$$\iff x + y + z = 17$$

et puisque : $a \wedge b = 12 \iff 6(x \wedge y) = 12$

$$\iff x \wedge y = 2$$

alors $2|y$

et puisque : $b \wedge c = 18 \iff 6(y \wedge z) = 18$

$$\iff y \wedge z = 3$$

alors $3|y$

et comme $2 \wedge 3 = 1$ alors $6|y$

Donc : $y = 6$ ou $y = 12$ (car $y \in \mathbb{N}^*$ et $x + y + z = 17$)

• Si : $y = 12$ alors $x + z = 5$

Donc : $z = 5 - x$ et $z \geq 1$ d'où $x \in \{1,2,3,4\}$

et puisque $x \wedge y = 2$ alors x est pair

D'où : $x = 2$ ou $x = 4$

• Si $x = 4$ alors $z = 1$ et $y = 12$ mais $y \wedge z \neq 3$

D'où : $x = 2$

et donc ce cas on a : $(x;y;z) = (2;12;3)$ et $(a;b;c) = (12;72;18)$

• Si $y = 6$ alors $x + z = 11$ donc $1 \leq x < 10$ et x est pair et z est un multiple de 3

On obtient : $(x,z) \in \{(2;9),(8;3)\}$

Donc : $(x,y,z) \in \{(2;6;9),(8;6;3)\}$, d'où $(a,b,c) \in \{(12;36;54),(48;36;18)\}$

Par conséquent : $(a,b,c) \in \{(12;36;54),(48;36;18),(12;72;18)\}$

Exercice 9

Posons : $d = (a^2 - ab + b^2) \wedge (a + b)$

On a : $\begin{cases} d|a^2-ab+b^2 \\ d|a+b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} d|a^2-ab+b^2 \\ d|(a+b)^2 \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} d|a^2-ab+b^2 & (1) \\ d|a^2+2ab+b^2 & (2) \end{cases}$

$\Longrightarrow d|3ab \qquad ((2)-(1))$

D'autre part $\begin{cases} d|3ab \\ d|a+b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} d|3ab & (3) \\ d|3a^2+3ab & (4)\ (car\ \ d|3a(a+b)) \\ d|3ab+3b^2 & (5)\ (car\ \ d|3b(a+b)) \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} d|3a^2 & ((4)-(3)) \\ d|3b^2 & ((5)-(3)) \end{cases}$

$\Longrightarrow d|3a^2 \wedge 3b^2$

$\Longrightarrow d|3(a^2 \wedge b^2) \qquad car(a \wedge b = 1 \Longleftrightarrow a^2 \wedge b^2 = 1)$

$\Longrightarrow d|3$

$\Longrightarrow d \leq 3$

Autre méthode

On pose : $d = a \wedge b$

On a : $(\exists(\alpha,\beta) \in (\mathbb{Z}^*)^2)$; $a = \alpha d$ et $b = \beta d$ et $\alpha \wedge \beta = 1$

Donc : $(a^2+b^2) \wedge ab = (\alpha^2 d^2 + \beta^2 d^2) \wedge (\alpha\beta d^2)$

$= d^2((\alpha^2+\beta^2) \wedge (\alpha\beta))$

Il suffit de montrer que : $(\alpha^2 + \beta^2) \wedge (\alpha\beta) = 1$ Sachant que : $\alpha \wedge \beta = 1$

Soit x un élément de $\mathbb{Z}^*$ tel que $x|\alpha^2 + \beta^2$ et $x|\alpha\beta$

On a : $\begin{cases} x|\alpha\beta \\ x|\alpha^2+\beta^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x|\alpha\beta^2 \\ x|\alpha^3+\beta^2\alpha \end{cases}$

$\Longrightarrow x|\alpha^3$

On montre de la même façon que : $x|\beta^3$

Donc : $\begin{cases} x|\alpha^3 \\ x|\beta^3 \end{cases}$ d'où $x|\alpha^3 \wedge \beta^3$

Par conséquent $x|(\alpha \wedge \beta)^3$ $(a \wedge b = 1 \Longleftrightarrow a^n \wedge b^n = 1)$

c'est-à-dire $x|1$, d'où : $x = 1$ ou $x = -1$

Finalement : $(\alpha\beta) \wedge (\alpha^2 + \beta^2) = 1$

Ainsi : $(\forall (a,b) \in (\mathbb{Z}^*)^2)$; $(a^2 + b^2) \wedge ab = (a \wedge b)^2$

Exercice 11

Soit a et b deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que : $a \wedge b = 1$

a) Montrons que : $(a + b) \wedge a = 1$

Posons: $d = (a + b) \wedge a$

On a : $\begin{cases} d|a+b \\ d|a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} d|(a+b)-a \\ d|a \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} d|b \\ d|a \end{cases}$

$\Longrightarrow d|a \wedge b$

$\Longrightarrow d|1$ car $(a \wedge b = 1)$

$\Longrightarrow d = 1$ donc $(a + b) \wedge a = 1$

b) Montrons que : $(a + b) \wedge b = 1$

En utilisant le même raisonnement que a), on montre que $(a + b) \wedge b =$

c) Montrons que : $(a + b) \wedge ab = 1$

Posons : $\delta = (a + b) \wedge ab$

On a : $\begin{cases} \delta|a+b \\ \delta|ab \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \delta|ab+b^2 & (car\ \delta|b(a+b)) \\ \delta|a^2+ab & (car\ \delta|a(a+b)) \\ \delta|ab \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} \delta|b^2 \\ \delta|a^2 \end{cases}$

$\Longrightarrow \delta|a^2 \wedge b^2$

$\Longrightarrow \delta|1 \qquad (car\ a^2 \wedge b^2 = (a \wedge b)^2 = 1)$

$\Longrightarrow \delta = 1$ donc : $(a + b) \wedge ab = 1$

2) Montrons que : $d = 1$ ou $d = 3$

On a : $\begin{cases} d|a^2+b^2-ab \\ d|a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|a^2+b^2-ab & (1) \\ d|a^2+b^2+2ab & (2) \quad (car\ d|(a+b)^2) \\ d|a+b \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} d|3ab & ((2)-(1)) \\ d|3(a+b) \end{cases}$

$\Rightarrow d|(3(a+b) \wedge 3ab$

$\Rightarrow d|3((a+b) \wedge ab)$

$\Rightarrow d|3$ (car $(a+b) \wedge ab = 1$)

et on a : $d \in \mathbb{N}$, donc $d = 1$ ou $d = 3$

3) a) Soit n un entier naturel

Montrons que : $\alpha|(n+2)ab$

On a : $\begin{cases} \alpha|a^2+b^2+nab \\ \alpha|a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha|a^2+b^2+nab \\ \alpha|a^2+b^2+2ab \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha|2ab+nab$

$\Rightarrow \alpha|(n+2)ab$

Par conséquent : $\alpha|(n+2)ab$

b) Déduisons que : $\alpha|(n+2)$

Montrons que : $\alpha \wedge ab = 1$. On pose : $\alpha \wedge ab = d$

On a : $\begin{cases} d|\alpha \\ d|ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|a+b \\ d|ab \end{cases}$ $(car\ \alpha = (a+b) \wedge (a^2+b^2+nab))$

$\Rightarrow d|(a+b) \wedge ab$

$\Rightarrow d|1$ $(car\ (a+b) \wedge ab = 1)$

$\Rightarrow d = 1$

Donc : $\alpha \wedge ab = 1$ et puisque $\alpha|(n+2)ab$ alors $\alpha|n+2$ (d'après le théorème de Gauss)

Exercice 12

L'équation $x^2 - y^2 = p$ s'écrit : $(x-y)(x+y) = p$

Et puisque : $x - y < x + y$ et p est premier; alors : $x+y = p$ et $x - y = 1$

D'où : $x = \frac{p+1}{2}$ et $y = \frac{p-1}{2}$

Et puisque p est impair; alors : $(\exists k \in \mathbb{N}^*)\ ; p = 2k+1$

Par conséquent : $x = k+1$ et $y = k$

Donc : les solutions de l'équation : $x^2 - y^2 = p$ sont les couples $(k+1;k)$ avec : $k = \dfrac{p-1}{2}$

Exemple

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a :

$$\begin{aligned} N &= 2^{4n+2}+1 = (2^{2n+1})^2 + 2.2^{2n+1} + 1 - 2\times 2^{2n+1} \\ &= (2^{2n+1}+1)^2 - 2\times 2^{2n+1} \\ &= (2^{2n+1}+1)^2 - 2^{2n+2} \\ &= (2^{2n+1}+1)^2 - (2^{n+1})^2 \\ &= (2^{2n+1}+2^{n+1}+1)(2^{2n+1}+1-2^{n+1}) \end{aligned}$$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ 2^{2n+1}+2^{n+1}+1 > 1$

Et on a : $2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1 = 2^{n+1}(2^n - 1) + 1$

Et: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1 > 1$

Par conséquent: $2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$ et $2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$ sont deux diviseurs propres du nombre N.

Conclusion : N n'est pas premier.

IV Le plus grand commun diviseur (*PGCD*) - Le plus petit commun multiple (*PPMC*)

Définition

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls

• Le plus grand entier naturel non nul qui divise simultanément les nombres a et b est appelé le plus grand commun diviseur de a et b

Ce nombre est noté $PGCD(a;b)$ ou $a \wedge b$ ou $\Delta(a;b)$

• Le plus petit multiple commun des nombres a et b est le plus petit entier strictement positif qui soit multiple de a et b à la fois

Ce nombre est noté : $PPCM(a;b)$, $a \vee b$ ou $M(a;b)$

Remarques

1) $d = a \wedge b \Longrightarrow d > 0$ et $d|a$ et $d|b$ 2) $(c|b$ et $c|a$ et $c > 0) \Longrightarrow c \leqslant a \wedge b$

3) $(c|a$ et $c|b) \Longrightarrow c|a \wedge b$ 4) $a|(a \vee b)$ et $b|(a \vee b)$

Propriétés

Soit a, b, c et k des éléments de $\mathbb{Z}^*$

1) $a \wedge a = |a|$, $a \wedge 0 = |a|$ et $a \wedge 1 = 1$

2) $a \wedge b = |a| \wedge |b|$ et $a \vee b = |a| \vee |b|$

3) $\begin{cases} a|b \Longleftrightarrow a \wedge b = |a| \\ a|b \Longleftrightarrow a \vee b = |b| \end{cases}$

4) $a \vee b = b \vee a$ et $a \wedge b = b \wedge a$

5) $\begin{cases} (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \\ (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) \end{cases}$

6) $(ka) \wedge (kb) = |k|((a \wedge b))$; $(ka) \vee (kb) = |k|((a \vee b))$

7) $(\forall a \in \mathbb{N}^*)(\forall b \in \mathbb{N}^*)$; $a \wedge b = b \wedge r$

où r est le reste de la division euclidienne de a par b

(8) $(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|$

Exercices d'application

Exercice n° 1

Soit n un élément de $\mathbb{N}$

On pose : $a = 5n + 3$ et $b = 2n - 1$

Calculer $a \vee b$ en fonction de n

Exercice n° 2

On considère les suites numériques (x_n) et (y_n) définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 3 \ ; \ y_0 = 1 \\ (\forall n \in IN) \ ; x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n = 2^{n+1} + 1$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_{n+1} \wedge x_n = 1$

2) a) Montrer : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $2x_n - y_n = 5$, en déduire y_n en fonction de n

b) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel p, les restes de la division euclidienne du nombre 2^p par 5

3) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $d_n = x_n \wedge y_n$

a) Montrer que : $d_n = 1$ ou $d_n = 5$

b) Déterminer l'ensemble : $S = \{n \in \mathbb{N} \ ; \ d_n = 5\}$

Exercice 13

Soit a et b deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que : $a < b$

Déterminer a et b dans chacun des cas :

1) $a \vee b = 60$ et $a \wedge b = 5$ 2) $a^2 + b^2 = 325$ et $a \vee b = 30$

3) $ab = 1440$ et $a \vee b = 240$ 4) $(a \vee b) - 3(a \wedge b) = 21$

5) $(a \vee b) - 9(a \wedge b) = 13$

Solutions

Exercice 14

Déterminons $a \vee b$ en fonction de n ($a \vee b$ est e plus grand multiple commun)

On pose : $d = a \wedge b$

Déterminons d

On a : $\begin{cases} d \mid 5n+3 \\ d \mid 2n-1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} d \mid 10n+6 \\ d \mid 10n-5 \end{cases}$

$\Longrightarrow d \mid 11$

Donc : $d = 1$ ou $d = 11$

• Déterminons les valeurs de n tels que $d = 11$ (c'est-à-dire $a \wedge b$ 11)

On a : $d = 11 \Longrightarrow \begin{cases} a = 0[11] \\ b \equiv 0[11] \end{cases}$

$\longrightarrow \begin{cases} 5n+3 \equiv 0[11] \\ 2n-1 = 0[11] \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} 5n \equiv 8[11] \\ 2n \equiv 1[11] \end{cases}$

$\longrightarrow \begin{cases} 45n = 72[11] \\ 34n \equiv 17[11] \end{cases}$

$\longrightarrow \begin{cases} n \equiv 6[11] \\ n = 6[11] \end{cases}$

$\Longrightarrow n \equiv 6[11]$

Donc : si $d = 11$ alors $n \equiv 6[11]$

Réciproquement : si $n \equiv 6[11]$ alors $2n - 1 \equiv 0[11]$ et $5n + 3 \equiv 0[11]$

c'est-à-dire : $11 \mid 2n - 1$ et $11 \mid 5n + 3$ d'où $11 \mid d$

D'où : $n \equiv 6[11] \iff d = 11$ et on a : $d = 1 \iff n \not\equiv 6[11]$

et puisque : $(a \vee b)(a \wedge b) = ab$ alors il y a deux cas

1er Cas : $d = 1$ c'est-à-dire : $n \not\equiv 6[11]$

on a dans ce cas : $a \vee b = ab = (2n - 1)(5n + 3)$

2ème Cas : $d = 11$ c'est-à-dire : $n \equiv 6[11]$

$$\frac{a \vee b}{a \wedge b} = \frac{ab}{11} = \frac{(2n-1)(5n+3)}{11}$$

Exercice 15

1) a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n = 2^{n+1} + 1$

Utilisons le raisonnement par récurrence

• Pour $n = 0$, on a : $x_0 = 3$ et $2^{0+1} + 1 = 3$ donc $2^{0+1} + 1 = x_0$

D'où la propriété est vraie pour $n = 0$

• Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $x_n = 2^{n+1} + 1$ et montrons que $x_{n+1} = 2^{n+2} + 1$

On a : $x_{n+1} = 2x_n - 1$

$= 2(2^{n+1} + 1) - 1$

$= 2 \times 2^{n+1} + 2 - 1 = 2^{n+2} + 1$

• Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n = 2^{n+1} + 1$

• Remarque : En posant $u_n = x_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On obtient : $u_{n+1} = x_{n+1} - 1$

$= 2x_n - 1 - 1 = 2(x_n - 1) = 2u_n$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 2$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = u_0 \times q^n = 2^{n+1}$, d'où $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n = u_n + 1 = 2^{n+1} + 1$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$; déterminons $x_{n+1} \wedge x_n$

On a : $x_{n+1} = 2x_n - 1$ donc $2x_n - x_{n+1} = 1$

D'après le théorème de Bezout on a : $x_{n+1} \wedge x_n = 1$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_{n+1} \wedge x_n = 1$

2) a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $2x_n - y_n = 5$

• Pour $n = 0$, on a : $2x_0 - y_0 = 2 \times 3 - 1 = 5$

Donc l'égalité est vraie pour $n = 0$

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $2x_n - y_n = 5$

et montrons que $2x_{n+1} - y_{n+1} = 5$

On a : $2x_{n+1} - y_{n+1} = 2(2x_n - 1) - (2y_n + 3)$

$= 4x_n - 2y_n - 5$

$= 2(2x_n - y_n) - 5$

$= 10 - 5 = 5$ l'égalité est donc vraie pour $n+1$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $2x_n - y_n = 5$

• Déduction :

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $2x_n - y_n = 5$ donc $y_n = 2x_n - 5$

et puisque $x_n = 2^{n+1} + 1$ alors $y_n = 2(2^{n+1} + 1) - 5$

c'est-à-dire : $y_n = 2^{n+2} - 3$

Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $y_n = 2^{n+2} - 3$

b) Déterminons les restes de la division eucl dienne de 2^p par 5

On désigne par r le reste de la division euclidienne de 2^p par 5

On a : $2^0 \equiv 1[5]$; $2^1 \equiv 2[5]$; $2^2 \equiv 4[5]$; $2^3 \equiv 3[5]$ et $2^4 \equiv 1[5]$

Donc : $(\forall k \in \mathbb{N})$; $2^{4k} \equiv 1[5]$

On a donc les cas suivants

Si $p \equiv 0[4]$ alors $2^p = 1[5]$ donc $r = 1$

Si $p \equiv 1[4]$ alors $2^p = 2[5]$ donc $r = 2$

Si $p \equiv 2[4]$ alors $2^p = 4[5]$ donc $r = 4$

Si $p \equiv 3[4]$ alors $2^p = 3[5]$ donc $r = 3$

3) a) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $(d_n = 1$ ou $d_n = 5)$

Soit n un é ément de $\mathbb{N}$, on a : $d_n = x_n \wedge y_n$

Donc : $d_n | x_n$ et $d_n | y_n$ d'ou: $d_n | 2x_n - y_n$

et puisque $2x_n - y_n = 5$ alors $d_n | 5$

et puisque 5 est un nombre premier et $d_n \in \mathbb{N}$ alors $d_n = 1$ ou $d_n = 5$

b) Déterminons l'ensemble S

Soit n un élément de $\mathbb{N}$

On a : $n \in S \iff x_n \wedge y_n = 5$

et puisque $x_n = 2^{n+1} + 1$ et $y_n = 2^{n+2} - 3$

alors $2^{n+1} + 1 \equiv 0[5]$ et $2^{n+2} - 3 \equiv 0[5]$

et on a : $2^{n+1} + 1 \equiv 0[5] \Longrightarrow 2^{n+1} \equiv 4[5]$

$\Longrightarrow n+1 \equiv 2[4]$

Donc : $n \equiv 1[4]$

et on a : $2^{n+2} - 3 \equiv 0[5] \Longrightarrow 2^{n+2} \equiv 3[5]$

$\Longrightarrow n+2 \equiv 3[4]$

Donc : $n \equiv 1[4]$

$n \equiv 1[4]$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $d_n = 5 \Longrightarrow n \equiv 1[4]$,

et réciproquement $((n = 1[4])) \longrightarrow (x_n = 0[5]$ et $y_n = 0[5])$

c'est-à-dire $5 | x_n$ et $5 | y_n$ donc $5 | d_n$

et puisque $d_n = 1$ ou $d_n = 5$ alors $(n \equiv 1[4] \iff d_n = 5)$

Par suite : $S = \{4k + 1 / k \in \mathbb{N}\}$

Exercice 16

1) Déterminons a et b tels que : $a \vee b = 60$ et $a \wedge b = 5$

On pose : $m = a \vee b$ et $d = a \wedge b$

Donc : $\left(\exists (a';b') \in (\mathbb{N}^*)^2\right)$; $a = a'd$ et $b = b'd$ et $a' \wedge b' = 1$

et on a : $md = ab \iff md = a'b'd^2$

$\iff m = a'b'd$

$\iff 60 = 5a'b'$

$\iff a'b' = 12$

Déterminons a et b en utilisant le tableau ci-dessous

a'	1	12	3	4
b'	12	1	4	3
a	5	60	15	20
b	60	5	20	15

et puisque $a < b$ alors les couples cherchés sont $(5;60)$ et $(15;20)$.

2) Déterminons a et b tels que $a^2 + b^2 = 325$ et $a \vee b = 30$

On pose : $m = a \vee b$ et $d = a \wedge b$

Donc : $\left(\exists(a';b')\in(\mathbb{N})^2\right)$; $a=a'd$ et $b=b'd$ et $a'\wedge b'=1$

et on a : $md=ab \iff md=a'b'd^2$

$\iff m=a'b'd$

$\iff 30=a'b'd$

Donc : $\begin{cases}a^2+b^2=325\\ a\vee b=30\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}d^2(a'^2+b'^2)=325 \quad (*)\\ d^2a'^2\cdot b'^2=900\end{cases}$

$\Longrightarrow d^2 \mid 325\wedge 900$

$\Longrightarrow d^2 \mid 25$

$\Longrightarrow d=1$ ou $d=5$

1er cas : Si $d=5$ alors le système $(*)$ s'écrit $\begin{cases}a'^2+b'^2=13\\ (a'b')^2=36\end{cases}$

c'est à dire : $\begin{cases}a'^2+b'^2=13\\ a'b'=6\end{cases}$ (Remarquer que $a'<4$ et $b'<4$)

D'où : $\begin{cases}a'=2\\ b'=3\end{cases}$ et par conséquent $a=10$ et $b=15$

2ème cas : Si $d=1$

alors $a'=a;b'=b$, $a'b'=ab=m=30$

On a : $a^2+b^2=325$; $ab=30$ et $a\wedge b=1$.

Utilisons le tableau ci-dessous pour déterminer a et b

a	1	2	3	5	6	15	30	10
b	30	15	10	6	5	2	1	3
a^2+b^2	901	229	109	61	61	229	901	109

D'après le tableau, le système n'admet pas de solutions (dans le cas où $d=1$)

Par conséquent $S=\{(10;15)\}$

3) Déterminons a et b de $\mathbb{N}$ tels que : $a\vee b=240$ et $ab=1440$

On pose : $m=a\vee b$ et $d=a\wedge b$

On a : $\left(\exists(a',b')\in(\mathbb{N})^2\right)$, $a=a'd$ et $b=b'd$ et $a'\wedge b'=1$ et $md=ab$

Donc : $md=ab \iff 240d=1440$

$\iff d=6$

D'autre part on a : $m=a'b'd$ c'est-à-dire : $a'b'=40$

Utilisons le tableau ce dessous, pour déterminer les valeurs de a et b

a'	1	5
b'	40	8
a	6	30
b	240	48

Donc les couples solutions du système sont $(6;240)$ et $(30;48)$

4) Déterminons les entiers naturels a et b tels que : $(a \vee b) - 3(a \wedge b) = 21$

On pose : $m = a \vee b$ et $d = a \wedge b$

On a : $(\exists (a';b') \in (\mathbb{N})^2)$; $a = a'd$ et $b = b'd$ et $a' \wedge b' = 1$

Donc : $md = ab$ d'où $m = a'b'd$

On a : $m - 3d = 21 \iff d(a'b' - 3) = 21 \quad (*)$

Donc : $d \mid 21$, d'où : $d \in \{1;3;7;21\}$

1ère Cas : $d = 1$

$(*)$ s'écrit $a'b' = 24$

et puisque $a' \wedge b' = 1$ alors : $\left(\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 24 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a' = 3 \\ b' = 8 \end{cases}\right)$ donc $\left(\begin{cases} a = 1 \\ b = 24 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 3 \\ b = 8 \end{cases}\right)$

2ème Cas : $d = 3$

$(*)$ s'écrit $a'b' = 10$

et puisque $a' \wedge b' = 1$ alors : $\left(\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 10 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a' = 2 \\ b' = 5 \end{cases}\right)$ donc $\left(\begin{cases} a = 3 \\ b = 30 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 6 \\ b = 15 \end{cases}\right)$

3ème cas : $d = 7$

$(*)$ s'écrit $a'b' = 6$

et puisque $a' \wedge b' = 1$ alors : $\left(\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 6 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a' = 2 \\ b' = 3 \end{cases}\right)$ donc $\left(\begin{cases} a = 7 \\ b = 42 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 14 \\ b = 21 \end{cases}\right)$

4ème Cas : $d = 21$

$(*)$ s'écrit $a'b' = 4$

et puisque $a' \wedge b' = 1$ alors $a' = 1$ et $b' = 4$ donc $a = 21$ et $b = 84$

Par conséquent l'ensemble des couples solutions du système est :

$\{(1;24);(3;8);(3;30);(6;15);(7;42);(14;21);(21;84)\}$

5) Déterminons a et b de $\mathbb{N}$ tels que : $(a \vee b) - 9(a \wedge b) = 13$

On pose : $d = a \wedge b$ et $m = a \vee b$

On a : $d = a \wedge b \iff (\exists (a';b') \in (\mathbb{N})^2)$; $a = da'$ et $b = db'$ et $a' \wedge b' = 1$

et $md = ab$

Donc : $md = ab \iff m = a'b'd$

et : $m - 9d = 13 \iff m = 9d + 13$

$\iff a'b'd = 9d + 13$

$\iff d(a'b' - 9) = 13$

$\iff \begin{cases} d = 1 \\ a'b' - 9 = 13 \end{cases}$ ou $\begin{cases} d = 13 \\ a'b' - 9 = 1 \end{cases}$

ou $\begin{cases} d = 1 \\ a'b' = 22 \end{cases}$ $\begin{cases} d = 13 \\ a'b' = 10 \end{cases}$

1ère Cas : $d = 1$

a'	1	2	11	22
b'	22	11	2	1
a	1	2	11	22
b	22	11	2	1

2ème Cas : $d = 13$

a'	1	2	5	10
b'	10	5	2	1
a	13	26	65	130
b	130	65	26	13

Donc les couples $(a;b)$ (avec $a < b$) solutions du système sont : $(2;11)$, $(1;22)$, $(26,65)$ et $(13;130)$

V Nombres premiers entre eux - Théorème de Bezout Théorème de Gauss

Définition

Soit a et b deux éléments de $\mathbb{Z}^*$

On dit que a et b sont premiers entre eux lorsque $a \wedge b = 1$

Propriétés

1) $d = a \wedge b \iff \exists (\alpha;\beta) \in \mathbb{Z}^2$; $\begin{cases} a = d\alpha \\ b = d\beta \\ \alpha \wedge \beta = 1 \end{cases}$

2) $d = a \wedge b \Longrightarrow \exists (u;v) \in \mathbb{Z}^2$; $d = au + bv$

• Théorème de Bezout

3) $a \wedge b = 1 \iff \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2$; $au + bv = 1$

• Théorème de Gauss

4) $\begin{cases} c \mid ab \\ c \wedge a = 1 \end{cases} \Longrightarrow c \mid b$

5) $\begin{cases} a \text{ et } b \mid c \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow ab \mid c$

6) $\begin{cases} x \equiv a[n] \\ x \equiv a[p] \\ n \wedge p = 1 \end{cases} \Longrightarrow x \equiv a[np]$

7) $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \wedge bc = 1$ 8) $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \forall (n;m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \ ; \ a^n \wedge b^m = 1$

9) Si $d = c \wedge n$ alors on a : $ac \equiv bc[n] \Leftrightarrow a \equiv b\left[\frac{n}{d}\right]$

10) $\begin{cases} ac \equiv bc[n] \\ c \wedge n - 1 \end{cases} \Longrightarrow a \equiv b[n]$

Exercices d'application

Exercice 17

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

a- $3x \equiv 4[5]$ b) $2x \equiv 3[5]$ c) $2x \equiv 4[6]$ d) $2x \equiv 3[6]$

2) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $3^n + 4n + 1 \equiv 0[8]$

Exercice 18

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

a- $\bar{2}x = \bar{1}$; b- $\bar{2}x = \bar{3}$; c- $x^5 = \bar{1}$; d- $x^{20} = \bar{1}$

2) Déterminer tous les entiers naturels n tels que 7 divise $n^{20} - 1$

Exercice

1) Soit x et y deux éléments de $\mathbb{Z}^*$ et n un éléments de $\mathbb{N}^*$ $(n > 1)$

Montrer que : $x^n \wedge y^n = (x \wedge y)^n$

2) Soit a et b deux éléments de $\mathbb{Z}$ tels que : $a \wedge b = 1$ et $a + b$ est impair

Montrer que : $(a^2 + b^2) \wedge (a + b) = 1$

Exercice

Résoudre les équations suivantes :

1) $x^2 - 2x - \bar{2} = 0$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ 2) $x^2 + 2x + \bar{2} = 0$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

3) $x^2 - x - \bar{1} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. 4) $2x^2 - 3x - 2 \equiv [7]$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 21

Montrer que :

1) $(\forall n \in \mathbb{N})$; $4^n - 3n - 1 \equiv 0[9]$

2) $(\forall n \in \mathbb{N})$; $2^{2n+1} + 3^{2n+1} \equiv 0[5]$

3) $(\forall n \in \mathbb{N})$; $2^{4n+1} + 5 \equiv 0[21]$

Soit a, b et c des éléments de $\mathbb{Z}$ tels que : $a \wedge b = 1$.

Montrer que : $a \wedge bc = a \wedge c$

Soit x et y deux éléments de $\mathbb{N}$.

Montrer que : $x \wedge y = (x + y) \wedge (x \vee y)$

Exercice 24

1) Soit n un entier naturel.

Déterminons suivant les valeurs de n, les restes de la division euclidienne du nombre 5^n par 13.

2) En déduire que le nombre $2000^{2020} - 1$ est divisible par 13.

3) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $A_n = 1 + 5^n + 5^{2n} + 5^{3n}$. Montrer que $n \not\equiv 0[4] \iff A_n \equiv 0[13]$

4) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv 0[13]$.

Exercice 25

Soit n un élément de $\mathbb{N}$

1) Vérifier que : $4n^3 + 18n^2 + 20n + 6 = 2(n+1)(n+3)(2n+1)$

2) Factoriser $6n^2 + 24n + 18$

3) a) Déterminer $(6n^2 + 24n + 18) \wedge (4n^3 + 18n^2 + 20n + 6)$ en fonction de n

b) Déterminer $(6n^2 + 24n + 18) \vee (4n^3 + 18n^2 + 20n + 6)$

Solutions

Exercice 17

1) a- Résolvons dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $3x \equiv 4[5]$

On a : $3 \times 2 \equiv 1[5]$

$3x \equiv 4[5] \iff 2 \times 3x \equiv 8[5]$

$\iff x \equiv 3[5]$ (car $2 \times 3 \equiv 1[5]$ et $8 \equiv 3[5]$

$\iff x = 3 + 5k$; $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $S = \{3 + 5k / k \in \mathbb{Z}\}$

b- Résolvons dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $2x \equiv 3[5]$

On a : $2x \equiv 3[5] \iff 6x \equiv 9[5]$

Et puisque : $6 \equiv 1[5]$ et $9 \equiv 4[5]$

Alors : $2x \equiv 3[5] \iff x \equiv 4[5]$

$\iff x = 4 + 5k \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

Donc : $S = \{4 + 5k / k \in \mathbb{Z}\}$

c- Resolvons dans $\mathbb{Z}$ l'équations : $2x \equiv 4[6]$

Soit x un élément de $\mathbb{Z}$ on a : $2x \equiv 4[6] \iff (\exists k \in \mathbb{Z}) \ ; \ 2x = 4 + 6k$

$\iff (\exists k \in \mathbb{Z}) \ ; \ x = 2 + 3k$

Donc : $S = \{2 + 3k / k \in \mathbb{Z}\}$

d- Résolvons dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $2x \equiv 3[6]$

On a : $\bar{2}x = \bar{3} \iff 2x \equiv 3[6]$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

et : $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}\}$

Utilisons le tableau ci-dessous pour déterminer $\bar{2}x$ sur $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et ceci en remplaçant l'inconnue x par les éléments de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$

D'après ce tableau, il n'existe aucun élément dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ qui vérifie l'équation donc $S = \phi$

2) Résolvons dans $\mathbb{N}$ l'équation : $3^n + 4n + 1 \equiv 0[8]$

On a : $3 \equiv 3[8]$ et $3^2 \equiv 1[8]$

Donc : $3^{2k} \equiv 1[8]$ pour tout k de $\mathbb{N}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$

• Si $n \equiv 0[2]$ alors : $3^n \equiv 1[8]$ et $4n \equiv 0[8]$

Donc : $3^n + 4n + 1 \equiv 2[8]$

• Si $n \equiv 1[2]$ alors : $3^n \equiv 3[8]$ et $4n = 4[8]$

Donc : $3^n + 4n + 1 \equiv 0[8]$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation $3^n + 4n + 1 \equiv 0[8]$ dans $\mathbb{N}$ est :

$S = \{2k + 1 / k \in \mathbb{N}\}$

Solution

1) On a : $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}; \bar{6}\}$

On remplace l'inconnue x dans les équations proposées, par des éléments de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$; et on obtient le tableau suivant :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$2x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
x^5	0	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$
x^{20}	0	1	4	2	$\bar{2}$	4	1

Du tableau précédent on déduit les résultats suivants :

a- L'ensemble de solutions de l'équation $2x = \bar{1}$ est : $S = \{\bar{4}\}$

b- L'ensemble de solutions de l'équation $\bar{2}x = \bar{3}$ est : $S = \{\bar{5}\}$

c- L'ensemble de solutions de l'équation $x^5 = \bar{1}$ est : $S = \{\bar{1}\}$

d- L'ensemble de solutions de l'équation $x^{20} = \bar{1}$ est : $S = \{\bar{1}; \bar{6}\}$

2) Les nombres entiers naturels n qui vérifient $7 | n^{20} - 1$ sont les nombres n tels que $n^{20} - 1 \equiv 0[7]$ c'est-à-dire $n^{20} \equiv 1[7]$

et d'après 1) d) on a: $n = 1 + 7p$ ou $n = 6 + 7p$ où $p \in \mathbb{N}$

Exercice 19

1) Montrons que : $x^n \wedge y^n = (x \wedge y)^n$

On pose : $x \wedge y = d$

On a : $\exists (x', y') \in \mathbb{Z}^2$; $x = x'd$, $y = y'd$ et $x' \wedge y' = 1$

Donc : $x^n \wedge y^n = x'^n d^n \wedge y'^n d^n$ et puisque $x' \wedge y' = 1$, alors $x'^n \wedge y'^n = 1$

$= d^n (x'^n \wedge y'^n)$

D'où : $x^n \wedge y^n = d^n = (x \wedge y)^n$

A retenir $x^n \wedge y^n = d^n = (x \wedge y)^n$

2) On pose : $d = (a^2 + b^2) \wedge (a + b)$

On a : $\begin{cases} d | a + b \\ d | a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow d | (a+b)^2 - (a^2 + b^2)$. Donc : $d | 2ab$

D'autre part : $\begin{cases} d|a+b \\ d|2ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|2a(a+b) - 2ab \\ d|2b(a+b) \quad 2ab \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} d|2a^2 \\ d|2b^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d|2(a^2 \wedge b^2)$$

$$\Rightarrow d|2(a \wedge b)^2$$

$$\Rightarrow d|2 \text{ (car } a \wedge b = 1)$$

Donc $d - 1$ ou $d - 2$ et puisque $a + b$ est impair et $d|a + b$ alors $d - 1$.

Exercice 20

1) On a : $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}\}$

En remplaçant x dans l'équation proposée par des éléments de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ on obtient le tableau suivant :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$
$-\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$x^2 - \bar{2}x - \bar{2}$	$-\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$

D'après de tableau on a : $S = \phi$

2) Soit l'ensemble de solutions de l'équation . $x^2 + 2x + 2 = 0$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

En remplaçant x dans l'équation proposée par des éléments de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ on obtient le tableau suivant :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
x^2	$\bar{0}$	1	$\bar{4}$	4	1
$\bar{2}x$	$\bar{0}$	2	4	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$x^2 + \bar{2}x + \bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Donc : $S = \{\bar{1}; \bar{2}\}$

3) En remplaçant x dans l'equation proposée par des éléments de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ on obtient le tableau suivant :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	1
$-x$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$x^2 - x - 1$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	1	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Donc : $S = \{3\}$

4) On a : $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\bar{3};\bar{4};\bar{5};\bar{6}\}$

Résolvons dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $2x^2 - 3x - 2 \equiv 0[7]$

Il suffit de résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'équation : $2x^2 - 3x - 2 = 0$

En remplaçant x dans cette équation par des éléments de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, on obtient le tableau suivant

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$2x^2$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$-\bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$2x^2 - \bar{3}x - \bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$

Donc : $2x^2 - 3x - 2 = 0[7] \iff \bar{2}x^2 - \bar{3}x - \bar{2} = \bar{0}$

$\iff x = \bar{2}$ ou $x = \bar{3}$

$\iff (x = 2 + 7k / k \in \mathbb{Z})$ ou $x = \bar{3}$

Donc : $S = \{2 + 7k / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{3 + 7k / k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 21

1) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $4^n - 3n - 1 \equiv 0[9]$

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose : $u_n = 4^n - 3n - 1$

Utilisant la raisonnement par récurrence

• Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 0$ et $0 \equiv 0[9]$ donc $u_0 \equiv 0[9]$

• Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $u_n \equiv 0[9]$ et montrons que : $u_{n+1} \equiv 0[9]$

On a : $u_{n+1} = 4^{n+1} - 3(n+1) - 1$

$= 4^{n+1} - 3n - 4$

$= 4(4^n - 3n - 1) + 9n = 4u_n + 9n$

et puisque : $u_n \equiv 0[9]$ alors : $4u_n \equiv 0[9]$

et on a : $9n \equiv 0[9]$ donc : $4u_n + 9n \equiv 0[9]$ c'est-à-dire : $u_{n+1} \equiv 0[9]$

finalement : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $4^n - 3n - 1 \equiv 0[9]$

2) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $2^{2n+1} + 3^{2n+1} \equiv 0[5]$

1ère Méthode :

Rappeler que :

$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$ pour tout a et b de $\mathbb{R}^*$ et tout n de $\mathbb{N}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$:

On a : $2^{2n+1}+3^{2n+1}=2^{2n+1}-(-3)^{2n+1}=(2+3)\sum_{k=0}^{2n}2^k(-3)^{2n-k}=5\alpha$

où : $\alpha=\sum_{k=0}^{2n}2^k(-3)^{2n-k}$ $(\alpha\in\mathbb{N}^*)$ donc $5|2^{2n+1}+3^{2n+1}$

D'où : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $2^{2n+1}+3^{2n+1}\equiv 0[5]$

2ème Méthode :

Soit n un élément de $\mathbb{N}$, on a : $2^{2n+1}+3^{2n+1}=2\times 4^n+3\times 9^n$

Et puisque : $4\equiv -1[5]$ et $9\equiv -1[5]$

Alors : $4^n\equiv(-1)^n[5]$ et $9^n\equiv(-1)^n[5]$

Donc : $2.4^n+3.9^n\equiv 5(-1)^n[5]$

Et comme : $5\equiv 0[5]$

Alors : $5(-1)^n\equiv 0[5]$

C'est-à-dire : $2.4^n+3.9^n\equiv 0[5]$

Par conséquent : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $2^{2n+1}+3^{2n+1}\equiv 0[5]$

3) Montrons que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $2^{4n+1}+5=0[21]$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $u_n=2^{4^n+1}+5$

• Pour $n=0$ on a : $u_0=2^4+5=21$ et $21\equiv 0[21]$

Donc : $u_0\equiv 0[21]$

• Soit $n\in\mathbb{N}$

Supposons que : $u_n\equiv 0[21]$ et montrons que : $u_{n+1}\equiv 0[21]$

On a : $u_{n+1}=2^{4^{n+2}}+5=(2^{4^{n+1}})^4+5$ (car $2^{4^{n+2}}=2^{4^{n+1}}\times 4=(2^{4^{n+1}})^4$)

$u_{n+1}=(u_n-5)^4+5$

$u_{n+1}\equiv(-5)^4+5[21]$ (car $u_n=0[21]$)

Et puisque : $(-5)^4\equiv 16[21]$ alors : $u_{n+1}\equiv 0[21]$

• Par conséquent : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n=0[21]$

c'est-à-dire : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $2^{4^{n+1}}+5\equiv 0[21]$

Exercice 22 :

On pose : $d_1=a\wedge c$ et $d_2=a\wedge bc$

• On a : $\begin{cases}d_1|a\\d_1|c\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}d_1|a\\d_1|bc\end{cases}$

$\Longrightarrow d_1|a\wedge bc$

$\Longrightarrow d_1|d_2$ (1)

• Montrons que : $d_2 | d_1$

Méthode 1:

On a : $a \wedge b = 1$

Donc : $(\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2)$; $au + bv = 1$ (d'après le théorème de Bezout)

Donc : $(\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2)$; $acu + bcv = c$

On a : $d_2 = a \wedge bc \Longrightarrow \begin{cases} d_2 | a \\ d_2 | bc \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} d_2 | acu \\ d_2 | bcv \end{cases}$

$\Longrightarrow d_2 | acu + bcv$

$\Longrightarrow d_2 | c$

Donc : $d_2 | a$ et $d_2 | c$ d'où : $d_2 | a \wedge c$ c'est-à-dire $d_2 | d_1$ (2)

de (1) et (2) on en déduit que $d_1 = d_2$

Si $a \wedge b = 1$ alors $a \wedge bc = a \wedge c$

Méthode 2 :

On a : $\begin{cases} d_2 | a \\ d_2 | bc \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} d_2 | ac \\ d_2 | bc \end{cases} \Longrightarrow d_2 | ac \wedge bc = c(a \wedge b) = c$,

et puisque $ac \wedge bc = (a \wedge b) = c$

alors : $\begin{cases} d_2 | c \\ d_2 | a \end{cases}$ d'où: $d_2 | a \wedge c = d_1$

Exercice 2

• Montrons que : $(\forall (a,b) \in \mathbb{N}^{*2})$; $a \wedge b = 1 \Longrightarrow (a+b) \wedge ab = 1$

On a : $a \wedge b = 1$, on pose : $d = (a+b) \wedge ab$

Donc : $\begin{cases} d | a+b \\ d | ab \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} d | a^2 + ba & car\ d | (a(a+b)) \\ d | ab + b^2 & car\ d | b(a+b) \\ d | ab \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} d | a^2 & (d | (a^2 + ab - ab)) \\ d | b^2 & (d | (ab + b^2 - ab)) \end{cases}$

$\Longrightarrow d | a^2 \wedge b^2$

et puisque $a \wedge b = 1$ alors $a^2 \wedge b^2 = 1$

D'où : $d | 1$ par conséquent $d = 1$

Finalement : $(\forall (a,b) \in \mathbb{N}^{*2})$; $a \wedge b = 1 \Longrightarrow (a+b) \wedge ab = 1$

• Montrons que : $(\forall (x,y) \in \mathbb{N}^{*2})$; $x \wedge y = (x+y) \wedge (x \vee y)$

On pose : $d = x \wedge y$

Donc : $(\exists (a,b) \in \mathbb{N}^{*2})$; $x = ad$ et $y = bd$ et $a \wedge b = 1$

et on a : $x \vee y = abd$ (car $(x \wedge y).(x \vee y) = xy$)

Donc : $(a+b) \wedge ab = 1 \Longleftrightarrow d(a+b) \wedge d(ab) = d$

c'est-à-dire : $(a+b) \wedge ab = 1 \Longleftrightarrow (ad+bd) \wedge abd = d$

$\Longleftrightarrow (x+y) \wedge (x \vee y) = d = x \wedge y$

Exercice 3

1) Soit n un entier naturel

Déterminons suivant les valeurs de n les restes de la d vision euclidienne du nombre 5^n par 13

On a : $5 \equiv 5[13]$; $5^2 \equiv 12[13]$; $5^3 \equiv 8[13]$ et $5^4 \equiv 1[13]$

Donc : $(\forall k \in \mathbb{N})$; $5^{4k} \equiv 1[13]$

Soit r le reste de la division euc idienne du nombre 5^n par 13

On a :

Si $n \equiv 0[4]$ alors $5^n = 1[13]$ donc $r = 1$

Si $n \equiv 1[4]$ alors $5^n \equiv 5[13]$ donc $r = 5$

Si $n \equiv 2[4]$ alors $5^n \equiv 12[13]$ donc $r = 12$

Si $n \equiv 3[4]$ alors $5^n \equiv 8[13]$ donc $r = 8$

2) Déduction :

On $2020 = 13 \times 155 + 5$

Donc : $2020 \equiv 5[13]$ d'où : $(2020)^{2020} \equiv 5^{2020}[13]$

et on a : $2020 = 5 \times 404$

Donc : $2020 \equiv 0[4]$ d'où $5^{2020} \equiv 1[13]$

Par suite : $(2020)^{2020} - 1[13]$, finalement $(2020)^{2020} - 1 = 0[13]$,

Donc $2020^{2020} - 1$ est divis ble par 13.

3) Montrons que : $A_n \equiv 0[13] \Longleftrightarrow n \not\equiv 0[13]$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

On a : $A_n = 1 + 5^n + 5^{2n} + 5^{3n}$

Et : $n \equiv 0[4] \Longrightarrow 5^n \equiv 1[4]$

Donc $n \equiv 0[4] \Longrightarrow A_n \equiv 4[13]$

$\Longrightarrow A_n \not\equiv 0[13]$

Par contraposée $A_n \equiv 0[13] \Longrightarrow n \not\equiv 0[4]$

On a : $(n \equiv 1[4]) \Longrightarrow (5^n \equiv 5[13]$ et $5^{2n} \equiv 12[13]$ et $5^{3n} \equiv 8[13])$

Donc : $n \equiv 1[4] \longrightarrow A_n \equiv 1 + 5 + 12 + 8[13]$

$\Longrightarrow A_n \equiv 0[13]$

D'où : $n \equiv 1[4] \Longrightarrow A_n \equiv 0[13]$

• On a : $(n \equiv 2[4]) \longrightarrow (5^n \equiv 12[13]$ et $5^{2n} \equiv 1[13]$ et $5^{3n} \equiv 12[13])$

Donc : $n \equiv 2[4] \Longrightarrow A_n \equiv 1 + 12 + 1 + 12[13]$

$\Longrightarrow A_n \equiv 0[3]$

• On a : $(n \equiv 3[4] \Longrightarrow 5^n \equiv 8[13]$ et $5^{2n} \equiv 12[13]$ et $5^{3n} \equiv 5[13]$

Donc : $n \equiv 3[4] \Longrightarrow A_n \equiv 1 + 8 + 12 + 5[13]$

D'où : $n \equiv 3[4] \Longrightarrow A_n \equiv 0[3]$

Par suite $n \not\equiv 0[4] \Longrightarrow A_n \equiv 0[13]$

Par conséquent : $A_n \equiv 0[13] \Longleftrightarrow n \not\equiv 0[4]$

4) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv 0[13]$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$, on a : $31 \equiv 5[13]$ et $18 \equiv 5[13]$

donc : $31^{4n+1} \equiv 5^{4n+1}[13]$

et $18^{4n-1} \equiv 5^{4n-1}[13]$

Et puisque $4n + 1 \equiv 1[4]$ et $4n - 1 \equiv 3[4]$

Alors $5^{4n+1} \equiv 5[13]$ et $5^{4n-1} \equiv 8[13]$ donc $5^{4n+1} + 5^{4n-1} \equiv 0[8]$

c'est-à-dire $31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv 0[13]$ par suite $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv 0[13]$

Exercice 25

1) Vérifions que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $4n^3 + 18n^2 + 20n + 6 = 2(n+1)(n+3)(2n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a : $2(n+1)(n+3)(2n+1) = (2n+2)(2n^2+7n+3)$

$= 4n^3 + 14n^2 + 4n^2 + 6n + 14n + 6$

$= 4n^3 + 18n^2 + 20n + 6$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $4n^3+18n^2+20n+6 = 2(n+1)(n+3)(2n+1)$

2) Factorisons $6n^2+24n+18$ pour $n \in \mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ on a : $6n^2 + 24n + 18 = 6(n^2 + 4n + 3)$

$= 6((n+2)^2 - 1)$

$= 6(n+3)(n+1)$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $6n^2+24n+18 = 6(n+3)(n+1)$

3) a) Déterminons suivant n le nombre:

$(4n^3 + 18n^2 + 20n + 6) \wedge (6n^2 + 24n + 18)$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$, on a :

$(4n^3+18n^2+20n+6)\wedge(6n^2+24n+18) = (2(n+1)(n+3)(2n+1))\wedge(6(n+3)(n+1))$

$= 2(n+1)(n+3)[(2n+1)\wedge 3]$

Déterminons les valeurs du nombre $d_n = (2n+1) \wedge 3$ suivant les valeurs de n

puisque 3 est premier alors $d_n = 1$ ou $d_n = 3$

Déterminons les valeurs de n tels que $d = 3$

On a : $d_n = 3 \Longrightarrow 3 | 2n+1$ (car $d_n | 2n+1$)

$\Longrightarrow 2n+1 \equiv 0[3]$

$\Longrightarrow 2n \equiv 2[3]$

$\Longrightarrow 3 | 2(n-1)$

et puisque : $3 \wedge 2 = 1$ et $3 | 2(n-1)$ alors d'après le théorème de Gauss,

on a : $3 | n-1$ c'est-à-dire : $n \equiv 1[3]$.

D'où : $d_n = 3 \Rightarrow n \equiv 1[3]$

Réciproquement on a : $n \equiv 1[3] \Longrightarrow 2n+1 = 0[3]$

$\Longrightarrow 3 | 2n+1$

$\Longrightarrow (2n+1) \wedge 3 = 3$

$\Longrightarrow d_n = 3$

Donc : $d_n = 3 \Longleftrightarrow n \equiv 1[3]$

il y a donc deux cas : $n \equiv 1[3]$ et $n \not\equiv 1[3]$

1ère Cas : $n \equiv 1[3] \Longleftrightarrow d_n = 3$ on a :

$(4n^3 + 18n^2 + 20n + 6) \wedge (6n^2 + 24n + 18) = 2(n+1)(n+3)d_n = 6(n+1)(n+3)$

2ème Cas : $n \not\equiv 1[3] \Longleftrightarrow d_n = 1$

Donc : $(4n^3 + 18n^2 + 20n + 6) \wedge (6n^2 + 24n + 18) = 2(n+1)(n+3)$

b) Déterminons suivant les valeurs de n le nombre

$(4n^3 - 18n^2 + 20n + 6) \vee (6n^2 + 24n + 18)$

On a : $\left(\forall (a;b) \in (\mathbb{N}^*)^2\right)$; $(a \vee b)(a \wedge b) = ab$, il y a deux cas :

1er Cas : $n \equiv 1[3]$ on a :

$(4n^3 + 18n^2 + 20n + 6) \wedge (6n^2 + 24n + 18) = 6n^2 + 24n + 18$

Donc : $(4n^3 + 18n^2 + 20n + 6) \vee (6n^2 + 24n + 18) = 2(n+1)(n+3)(2n+1)$

2ème Cas : $n \not\equiv 1[3]$ on a : $d_n = 1$

Donc : $(4n^3 + 18n^2 + 20n + 6) \wedge (6n^2 + 24n + 18) = 2(n+1)(n+3)$

D'où :

$$(4n^3 + 18n^2 + 20n + 6) \vee (6n^2 + 24n + 18) = \frac{2(n+1)(n+3)(2n+1) \times 6(n+3)(n+1)}{2(n+1)(n+3)} = 6(n+1)(n+3)(2n+1)$$

VI Résolution de $ax + by = c$ dans $\mathbb{Z}^2$

L'équation $ax + by = c$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ si et seulement si $a \wedge b$ divise c

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $ax + by = c$ et on suppose que c divise $a \wedge b$

Si le couple $(x_0; y_0)$ est une solution de l'équation (E), alors S l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \left\{\left(x_0 + \frac{kb}{a \wedge b}; y_0 - \frac{ka}{a \wedge b}\right) ; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exercices d'application

Exercice 26

1) Calculer $168 \wedge 20$

2) Est ce que les équations suivantes admettent des solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$?

a) $168x+20y=6$

b) $168x+20y=4$

c) $42x+5y=2$

3) a) Déterminer les couples $(m;p)$ de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $42m+5p=1$

b) En déduire un couple $(u_0;v_0)$ solution de l'équation $42x+5y-2$ dans $\mathbb{Z}^2$

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $42x+5y=2$

d) En déduire les solutions de l'équation $(42x+5y-3)(42x+5y+3)--5$

Exercice 27

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $5x-2y=1$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$; $\begin{cases}x=1[15]\\x\equiv 4[6]\end{cases}$

Exercice 28

1) Résoudre l'équation : $7u+4v=1$ (1); où : $(u;v)\in\mathbb{Z}^2$

2) Soit $(u_0;v_0)$ une solution de l'équation (1); on pose : $x_0=7u_0+20v_0$

Montrer que x_0 vérifie le système suivant : $(S)\begin{cases}x=5[7]\\x\equiv 1[4]\end{cases}$ où $(x\in\mathbb{Z})$

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases}x\equiv 0[7]\\x\equiv 0[4]\end{cases}$

4) Déduire les solutions du système (S).

Exercice 29

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante : $(E):324x-245y=7$

1) Montrer que si $(x;y)$ est une solution de l'équation (E), alors x est un multiple de 7.

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

3) Soit $(x;y)$ une solution de (E), on pose : $d=x\wedge y$

a- Déterminer les valeurs possibles de d.

b- Déterminer les couples (x,y) solutions de l'équation (E)

tels que: $x\wedge y=1$

Solutions

Exercice 26

1) Calculons : $168 \wedge 20$

On a : $168 = 2^3 \times 3 \times 7$ et $20 = 2^2 \times 5$

Donc : $168 \wedge 20 = 2^2 = 4$

2) a) • Pour l'équation $168x + 20y = 6$ (1) on a : $168 \wedge 20 = 4$

Donc l'équation (1) admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si et seulement si $4|6$ ce qui est impossible d'ou l'équation (1) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

b) • Pour l'équation $168x + 20y = 4$ (2)

On a : $168 \wedge 20 = 4$ et $4|4$ donc l'équation (2) admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

c) • Pour l'équation $42x + 5y = 2$ (3)

On a : $42 \wedge 5 = 1$ donc d'après le théorème de Bezout

$(\exists (x_0; y_0) \in \mathbb{Z}^2)$; $42x_0 + 5y_0 = 1$

D'où : $(\exists (x_0; y_0) \in \mathbb{Z}^2)$; $42(2x_0) + 5(2y_0) = 2$

Par conséquent l'équation (3) admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

3) a) Determinons les couples $(m; p)$ de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $42m + 5p = 1$

On a : $\begin{cases} 42 = 5 \times 8 + 2 \\ 5 = 2 \times 2 + 1 \end{cases}$

Donc : $1 = 5 - 2 \times 2$

$= 5 - 2 \times (42 - 5 \times 8)$

$= 42(\quad 2) + 5 \times 17$

c'est-à-dire : le couple $(-2; 17)$ vérifie l'équation $42m + 5p = 1$

On prend $m = -2$ et $p = 17$

b) Déduction

On a : $42(-2) + 5 \times 17 = 1$ donc : $42(-4) + 5 \times 34 = 2$

D'ou le couple $(-4; 34)$ est une solution de l'équation $42m + 5y = 2$

On prend : $(u_0; v_0) = (-4; 34)$

c) Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $42x + 5y = 2$

Soit $(x; y)$ un élément de $\mathbb{Z}^2$ on a :

$42x+5y=2 \Longleftrightarrow 42x+5y=42(-4)+5\times 34$

$\Longleftrightarrow 42(x+4)=5(34-y)$

Donc : $5|42(x+4)$ et $5\wedge 42=1$ et d'après le théorème Gauss : $5|x+4$

c'est-à-dire : $(\exists k\in\mathbb{Z})$; $x=-4+5k$ donc : $y=34-42k$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Réciproquement :

Vérifier que le couple $(-4+5k;34-42k)$ avec $k\in\mathbb{Z}$ est une solution de l'équation $42x+5y=2$

Par conséquent l'ensemble de solutions est :

$S=\{(-4+5k;34-42)/k\in\mathbb{Z}\}$

d) Déduction:

Soit $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $(42x+5y-3)(42x+5y+3)=-5$

On a : $42x+5y-3<42x+5y+3$

Donc : $(42x+5y+3)(42x+5y-3)=-5$ si et seulement si :

$\begin{cases}42x+5y-3=-5\\42x+5y+3=1\end{cases}$ ou $\begin{cases}42x+5y-3=-1\\42x+5y+3=5\end{cases}$

c'est-à-dire $\begin{cases}42x+5y=-2\\42x+5y=-2\end{cases}$ ou $\begin{cases}42x+5y=2\\42x+5y=2\end{cases}$

Par suite : $42x+5y=2$ ou $42(-x)+5(-y)=2$

c'est-à-dire : $\left(\begin{cases}x=-4+5k\\y=-34+42k\end{cases};k\in\mathbb{Z}\right)$ ou $\left(\begin{cases}x=-4+5k\\y=34-42k\end{cases};k\in\mathbb{Z}\right)$

D'où l'ensemble de solutions est :

$S=\{(-4+5k;34-42k)\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{(4-5k;\ -34+42k)\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$

Exercice 27

1) Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $5x-2y=1$ (1)

On remarque que le couple $(1;2)$ est une solution particulière de l'équation (1)

Soit $(x;y)$ un couple de $\mathbb{Z}^2$, on a : $5x-2y=1\Longleftrightarrow 5x-2y=5\times 1-2\times 2$

$\Longleftrightarrow 5(x-1)=2(y-2)$

$2|5(x-1)$ et $2\wedge 5=1$; d'après le théorème de GAUSS: $2|x-1$

c'est-à-dire : $x = 2k + 1;\ k \in \mathbb{Z}$ d'où : $y = 5k + 2\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

On vérifie que le couple $(2k + 1; 5k + 2)$ est solution de l'équation (1); donc

l'ensemble des solutions de (1) est : $S = \{(2k + 1, 5k + 2)/k \in \mathbb{Z}\}$

2) Résolvons dans $\mathbb{Z}$: $\begin{cases} x \equiv 1[15] \\ x \equiv 4[6] \end{cases}$

Soit x un élément de $\mathbb{Z}$; on a :

$$\begin{cases} x \equiv 1[15] \\ x \equiv 4[6] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (\exists k \in \mathbb{Z}) / x = 1 + 15k \\ (\exists k' \in \mathbb{Z}) / x = 4 + 6k' \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (\exists k \in \mathbb{Z}) / x = 1 + 15k \\ (\exists k' \in \mathbb{Z}) / 1 + 15k = 4 + 6k' \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 15k \\ 5k - 2k' = 1 \end{cases} / (k, k') \in \mathbb{Z}^2$$

En utilisant le résu tat de la première question, pour l'équation : $5k - 2k' = 1$

, on a alors : $k = 1 + 2p$ et $k' = 2 + 5p$ avec : $p \in \mathbb{Z}$

D'où : $x = 16 + 30p$, où : $p \in \mathbb{Z}$

Réciproquement, si $x = 16 + 30p$ avec $p \in \mathbb{Z}$

On a : $30p \equiv 0[15]$; $30p \equiv 0[6]$; $16 \equiv 1[15]$ et $16 \equiv 4[6]$

d'où : $x \equiv 1[15]$ et $x \equiv 4[6]$

Par conséquent l'ensemble des solutions du système proposé est :

$S = \{16 + 30p / p \in \mathbb{Z}\}$

1) Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation : $7u + 4v = 1$ (1)

On remarque que le couple $(3; -5)$ est une solution de l'équation (1)

On a : $\begin{cases} 7u + 4v = 1 \\ 7 \times 3 + 4 \times (-5) = 1 \end{cases} \Rightarrow 7(u - 3) + 4(v + 5) = 0$

$$\Rightarrow 7(u - 3) = 4(-v - 5)\ (*)$$

On a : $7 / 4(-v - 5)$ et $7 \wedge 4 = 1$, d'après le théorème de GAUSS :

$7 / -v - 5$ donc : $(\exists k \in \mathbb{Z})$; $-v - 5 = 7k$

Donc : $v = -5 - 7k / k \in \mathbb{Z}$

D'autre part; on a : $7(u - 3) = 4(-v - 5)$ et $-v - 5 = 7k$

Donc : $u = 3 + 4k \ / k \in \mathbb{Z}$

Réciproquement; on a : $7u + 4v = 7(3 + 4k) + 4(-5 - 7k) = 1$

Donc : $\{(3 + 4k ; -5 - 7k) / k \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2) Montrons que x_0 vérifie le système suivant : (S): $\begin{cases} x \equiv 5[7] \\ x \equiv 1[4] \end{cases}$

Soit (u_0, v_0) une solution de l'équation (1), donc : $7u + 4v_0 = 1$

D'où : $x_0 - 5 = 7u_0 + 20v_0 - 5(7u_0 + 4v_0)$

$= -28u_0 = 7(-4u_0)$

Donc : $7 | x_0 - 5$; d'où : $x_0 \equiv 5[7]$

Et on a : $x_0 - 1 = 7u_0 + 20v_0 - 7u_0 - 4v_0 = 16v_0 = 4(4v_0)$

Donc : $4 | x_0 - 1$; par suite: $x_0 \equiv 1[4]$

Donc : x_0 vérifie le système: $\begin{cases} x \equiv 5[7] \\ x \equiv 1[4] \end{cases}$

3) Résolvons dans $\mathbb{Z}$ le système: (S_1): $\begin{cases} x \equiv 0[7] \\ x \equiv 0[4] \end{cases}$

Soit (S') l'ensemble des solutions (S_1) dans $\mathbb{Z}$:

On a : $x \in (S') \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 0[7] \\ x \equiv 0[4] \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 7 | x \\ 4 | x \end{cases}$

Et puisque : $4 \wedge 7 = 1$; alors : $x \in (S') \Rightarrow 28 | x$

$\Rightarrow x \equiv 0[28]$

Réciproquement; soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que : $x \equiv 0[28]$.

On a : $28 | x$ et puisque : $4 | 28$ et $7 | 28$

Alors: $4 | x$ et $7 | x$ c'est-à-dire : $x \equiv 0[4]$ et $x \equiv 0[7]$

Donc: $x \in (S') \Leftrightarrow x \equiv 0[28]$

Donc : $\{28k \ / k \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des solutions du système proposé.

4) Déduisons les solutions du système (S).

Soit x un élément de $\mathbb{Z}$, on a : $\begin{cases} x = 5[7] \\ x \equiv 1[4] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 23 = 0[7] \\ x + 23 \equiv 0[4] \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow x + 23 \equiv 0[28]$$
$$\Longleftrightarrow x = 5[28]$$

Donc : $\{5 + 28k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des solutions du systeme (S).

1) Montrons que si $(x;y)$ est solution de (E), a ors : x est un multiple de 7.

Soit $(x;y)$ un couple de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $324x - 245y = 7$

Montrons que x est un multiple de 7.

On a : $324x - 245y = 7 \Longleftrightarrow 324x = 7(1 + 35y)$

Donc : $7|324x$; et puisque 7 ne divise pas 324, et 7 est un nombre premier, alors : $7 \wedge 324 = 1$

D'où : $7|324x$ et $7 \wedge 324 = 1$; d'après le théorème de Gauss; 7 divise x, d'où x est un multiple de 7.

2) Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E):

* Déterminons une solution particulière de (E).

On a : $324 = 245 \times 1 + 79$

$245 = 79 \times 3 + 8$

$79 = 8 \times 9 + 7$

Donc : $7 = 79 - 8 \times 9$

$= 79 \quad 9 \times (245 \quad 79 \times 3)$

$= 28 \times (324 - 245 \times 1) - 9 \times 245$

$= 28 \times 324 - 37 \times 245$

Ainsi, le couple $(28;37)$ est une solution particulière de (E).

Soit $(x;y)$ un élément de $\mathbb{Z}^2$; on a :

$324x - 245y = 7 \Longleftrightarrow 324x - 245y = 324 \times 28 - 245 \times 37$

$\Longleftrightarrow 324(x - 28) = 245(y - 37)$

Donc : 245 divise $324(x - 28)$

Et puisque : $324 \wedge 245 = 1$; alors d'après le théorème de Gauss:

245 divise $x - 28$; d'où : $x = 245k + 28 \,/\, k \in \mathbb{Z}$ et $y = 37 + 324k / k \in \mathbb{Z}$

Réciproquement : On vérifie que le couple $(28+245;37+324k)$ est une solution de (E) pour tout k de $\mathbb{Z}$.

Donc : l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$S=\{(28+245k;37+324k)/k\in\mathbb{Z}\}$

3) a- Déterminons les valeurs de d.

Soit (x,y) un élément de $\mathbb{Z}^2$; tels que : $324x-245y=7$

On a : d divise x et y; d'où : d divise $324x-245y$; ainsi : d divise 7.

Et puisque : 7 est un nombre premier et d est un élément de $\mathbb{N}^*$; alors :

$d=1$ ou $d=7$

b) Déterminons les couples $(x;y)$ de S vérifiant $x\wedge y=1$

Soit (x,y) un élément de S; on a : 7 divise x d'après la première question.

Si : $x\wedge y=1$ alors 7 ne divise pas y

Et si 7 ne divise pas y alors : $x\wedge y\neq 7$ d où : $x\wedge y=1$

Donc : $x\wedge y=1$ si et seulement si 7 ne divise pas y

Soit : $y=37+324k$; avec : $k\in Z$

On a : $y=7(46k+5)+2k+2$

D'où : $y\equiv 0[7]\iff 2(k+1)\equiv 0[7]$

$\iff k+1\equiv 0[7]$ (car $2\wedge 7=1$)

$\iff k\equiv -1[7]$

Donc : $x\wedge y=1\iff y\not\equiv 0[7]$

$\iff k\not\equiv -1[7]$

Ainsi, les couples demandés sont de la forme : $(28+245k;37+324k)$, avec $k\in\mathbb{Z}$ et $k\not\equiv -1[7]$

VII Nombres premiers

On dit qu'un entier relatif p est premier lorsque $|p|\neq 1$ et p admet exactement les quatre diviseurs suivants:1; -1; p et $-p$

• p est premier $\iff p\neq 1$ et $p\neq -1$ et $D_p=\{1;-1;p;-p\}$ où D_p est l'ensemble des diviseurs du nombre p

Autrement dit : p n'admet pas de diviseurs propres.

Remarques

- Si a est premier alors $(-a)$ est premier
- 1 et -1 ne sont pas premiers

Propriétés

(P_1) Soit $a \in (\mathbb{N} - \{1\})$ tel que a est non premier. Le plus petit diviseur positif du nombre a et qui est différent de a et de 1 est un nombre premier

(P_2) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, il existe un nombre premier p tel que $p|n$ et $p^2 \leqslant n$.

(P_3) L'ensemble des nombres premiers est infini

(P_4) Soit p et q deux nombres premiers on a : $p \neq q \Longleftrightarrow p \wedge q = 1$

(P_5) Soit p un nombre premier et a un élément de $\mathbb{Z}$ on a :

(p ne divise pas $a \Longleftrightarrow p \wedge a = 1$)

(P_6) Soit p un nombre premier; a et b deux éléments de $\mathbb{Z}$ et p_1, p_2, p_3 et p_n des nombres premiers tels que $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

1) $p \mid ab \Longleftrightarrow p|a$ ou $p|b$

2) $((p|ab)$ et (p ne divise pas $a)) \longrightarrow p|b$

3) $p \mid a^n \Longleftrightarrow p|a$

4) $p|p_1p_2\cdots p_n \Longrightarrow \exists i \in \{1,2,\cdots,n\} : |p| = |p_i|$

5) Théorème de FERMAT

Si p est un nombre premier et a un entier relatif non divisible par p, alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$ c'est-à-dire p divise $a^{p-1} - 1$

Conséquence

Si p est premier alors, $(\forall a \in \mathbb{Z})$; $a^p = a[p]$

Théorème fondamental de l'arithmétique

Tout nombre entier relatif distinct de -1 et 1 s'écrit d'une façon unique sous la forme $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$ où p_1, p_2, p_3 ... et p_n sont des nombres premiers positifs distincts deux à deux et $\alpha_1; \alpha_2; \cdots; \alpha_k$ des entiers naturels non nuls et $\varepsilon = 1$ si $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon = -1$ si $n < 0$

Propriétés

Soit $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times .. \times p_k^{\alpha_k}$ (où $\varepsilon \in \{-1;1\}$) la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre n

d et m sont deux éléments de $\mathbb{Z}$

• $d \mid n \Leftrightarrow d = \varepsilon' p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \cdots \times p_k^{\beta_k}$ tels que : $\forall i \in \{1;2;\cdots;n\}$; $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ et $\varepsilon' \in \{-1;1\}$

• $n \mid m \Leftrightarrow m = \varepsilon p_1^{\gamma_1} \times p_2^{\gamma_2} \times \cdots \times p_k^{\gamma_k} \times a$ tels que : $(\forall i \in \{1,2,\cdots;n\})$, $\gamma_i \geq \alpha_i$ et a se décompose en produit de facteurs premiers distincts $p_1;p_2;\cdots;p_k$

Propriétés

Soit $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$ la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre n

Le nombre des diviseurs positifs du nombre n est $N = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k)$

Application

Soit $a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$ et $b = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \cdots \times p_k^{\beta_k}$, où $p_1;p_2;\cdots$ et p_k sont des nombres premiers distincts deux à deux et $\alpha_i \in \mathbb{N}$ et $\beta_i \in \mathbb{N}$ pour tout i de $\{1;2;3;\cdots;k\}$

On a : $a \wedge b = p_1^{\gamma_1} \times p_2^{\gamma_2} \times \cdots \times p_k^{\gamma_k}$ et $a \vee b = p_1^{\lambda_1} \times p_2^{\lambda_2} \times \cdots \times p_k^{\lambda_k}$

ou $\gamma_i = Min(\alpha_i,\beta_i)$ et $\lambda_i = Max(\alpha_i,\beta_i)$ pour tout i de $\{1;2;3;\cdots;k\}$

Exercices d'application

Exercice 30

Montrer que la somme de trois nombres entiers naturels impairs et consécutifs est un nombre non premier.

Exercice 31

Soit a et b deux entiers naturels tels que : $a > 1$ et $b > 1$.

Montrer que : $N = a^4 + 4b^4$ est un nombre non premier.

Exercice 32

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant : (E): $\begin{cases} x \equiv 2[7] \\ x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[9] \end{cases}$

Exercice 33

1) Soit n un élément de $\mathbb{Z}$; montrer que :

a- Si n est impair alors : $n^2 \equiv 1[8]$

b- Si n est pair alors : $n^2 \equiv 0[8]$ ou $n^2 \equiv 4[8]$

2) Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'équation $8x + 1 = y^2$

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{Z})$; ($n$ est impair $\Longrightarrow n^4 \equiv 1[16]$)

Exercice 34

Soit p un nombre premier, et $a \in \mathbb{N}$ tels que: $2 \leq a < p - 2$

Montrer que: le nombre p est premier avec le nombre $a^2 - 1$.

Exercice 35

1) Soit a et b deux entiers naturels tels que: $(a + b) \wedge ab = p^2$, et p est un nombre premier positif.

a- Montrer que : $p^2 | a^2$ et que $p | a$.

b- Montrer que : $p | b$.

c Montrer que: $a \wedge b = p$ ou $a \wedge b = p^2$

2) On considère dans $\mathbb{N}^2$ le système: $\begin{cases} (a + b) \wedge ab = 49 \\ a \vee b = 231 \end{cases}$

a- Montrer que: $a \wedge b = 7$

b- Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système (S).

Exercice 36

1) Décomposer le nombre 469 en produit de nombres premiers.

2) Déterminer les couples $(x;y)$ d'entiers naturels vérifiant : $x^3 - y^3 = 469$

Exercice 37

1) Soit p un nombre premier.

Déterminer tous les entiers relatifs α, tels que : $\alpha^3 \equiv 0[p^3]$.

2) En déduire tous les entiers relatifs x qui vérifient :

$$(E): x^2 + 18x + 32 \equiv 0[49]$$

Exercice 38

Soit p un nombre premier et n un élément de $\mathbb{Z}$, tels que $n^3 \equiv 1[p]$; $n \not\equiv 1[p]$ et $p \geq 2$

Montrer que : $(n + 1)^6 \equiv 1[p]$

Exercice 39

1) Comment peut-on écrire les diviseurs positifs du nombre 630 ?

2) Déterminer tous les nombres entiers naturels x qui vérifient:

$$x \vee 18 = 630$$

Exercice 40

Soit p un nombre premier, tel que : $p \geq 5$.

1) Montrer que : $(\exists k \in \mathbb{N}^* ; p = 6k-1)$ ou $(\exists k \in \mathbb{N}^* ; p = 6k+1)$

2) En déduire que : $p^2 \equiv 1[24]$

Exercice 41

Soit p est entier naturel.

1) Montrer que si p et $8p-1$ sont deux nombres premiers; alors $8p+1$ n'est pas premier.

2) Montrer que si p est premier et $p \neq 3$; alors le nombre $8p^2+1$ n'est pas premier.

Exercice 42

Soit n un entier naturel tel que : $n \geq 2$ et n divise $(n-1)!+1$

Montrer que n est premier.

Exercice 43

Soit n un entier naturel de $\mathbb{N}-\{0;1\}$

Montrer que : $5^n - 3^n$ n' est pas un nombre premier.

Exercice 44

1) Déterminer tous les entiers naturels x tel que : $x \vee 15 = 720$

2) Déterminer tous les entiers naturels x tel que: $x \wedge 5880 = 84$

Exercice 45

Soit p un nombre premier tel que : $p \geq 5$

1) a- Montrer que : $p^2 \equiv 1[3]$ et que : $2^p \equiv 2[3]$

b- En déduire que le nombre $p^2 + 2^p$ n'est pas premier.

2) Montrer que si : $p^2 + 2^p$ est un nombre premier, alors : $p = 3$.

Exercice 46

Soit a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$; tels que : $a \wedge b = 1$ et ab est un carré

parfait.

Montrer que a et b sont deux carrés parfaits.

Exercice 47 (Théorème de FERMAT)

Soit p un nombre premier positif

1) Montrer que p divise C_p^k pour tout k de $\{1;2;\cdots;p-1\}$

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); n^p \equiv n[p]$

b) En déduire que si p ne divise pas n; alors : $n^{p-1} \equiv 1[p]$

3) Application :

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$; le nombre 546 divise $n^{13} - n$

b) Montrer que l'équation : $3x^3 + 3x + 7 = y^3$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 48

Déterminer les nombres premiers qui vérifient : $p|2^p + 1$

Exercice 49

Soit p un entier naturel premier; tel que : $p \equiv 3[4]$

1) a) Montrer que l'équation : $x^2 + 1 \equiv 0[p]$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}$

b) En déduire que : $(\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2); (p|x^2 + y^2 \Longleftrightarrow p|x)$

2) a) Montrer que l'équation : $x^2 + y^2 = pz$ avec : $x \wedge y \wedge z = 1$, n'admet pas de solutions dans $(\mathbb{N}^*)^3$

b) Résoudre dans : $\mathbb{Z}^3$, l'équation : $x^2 + y^2 = pz^2$

Exercice 50

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $n(n^6 - 1) \equiv 0[7]$

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $n(n^2 - 1) \equiv 0[6]$

Exercice 51

Montrer que : $(2222)^{3333} + (3333)^{2222} \equiv 1[5]$

Exercice 52

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $A_n = n(n^2 - 1)(n^2 - 4)$ et $B_n = n^5 - n$

1) Montrer que : $A_n \equiv 0[5]$ et $B_n \equiv 0[5]$

2) Soit a et b deux éléments de $\mathbb{Z}$

a) Montrer que : $a^5 + b^5 \equiv 0[5] \Leftrightarrow a + b \equiv 0[5]$

b) Déterminer les entiers naturels p tels que :

$$p^5 + 32 \equiv 0[5] \text{ et } 0 \leqslant p \leqslant 20$$

Solutions

Exercice 30

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $2n+1$; $2n+3$ et $2n+5$ trois nombres impairs consécutifs.

On a : $N = (2n+1)+(2n+3)+(2n+5) = 6n+9 = 3(2n+3)$

Ainsi, ce nombre N est divisible par 3 et $N > 3$; donc N n'est pas premier.

Exercice 31

Soit a et b deux éléments de $\mathbb{N}$; tels que : $a > 1$ et $b > 1$ et $N = a^4 + 4b^4$

On a : $N = (a^2+2b^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2+2b^2-2ab)(a^2+2b^2+2ab)$

$= ((a-b)^2+b^2)((a+b)^2+b^2)$

Et puisque : $a > 1$ et $b > 1$, alors : $(a-b)^2+b^2 > 1$ et $(a+b)^2+b^2 > 1$

Donc : $(a+b)^2+b^2$ est un diviseur propre du nombre N

Par conséquent N n'est pas premier.

Exercice 32

Soit x un élément de $\mathbb{Z}$ on a : $\begin{cases} x \equiv 2[7] \\ x = 1[8] \\ x \equiv 3[9] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\exists k \in \mathbb{Z}) \ ; \ x = 2+7k & (1) \\ (\exists k' \in \mathbb{Z}) \ ; \ x = 1+8k' & (2) \\ (\exists k'' \in \mathbb{Z}) \ ; \ x = 3+9k'' & (3) \end{cases}$

Si x est solution du système (E) alors $1+8k' = 3+9k''$ c'est à dire

$8k' - 2 = 9k''$ et $2+7k = 1+8k'$ c'est-à-dire $8k' - 1 = 7k$

Donc : $\begin{cases} 8k' - 1 = 7k \\ 8k' - 2 = 9k'' \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} 72k' - 9 = 63k \\ 56k' - 14 = 63k'' \end{cases}$

D'où : $\begin{cases} 63 \mid (72k'-9) \\ 63 \mid (56k'-14) \end{cases}$ par suite : $63 \mid (16k'+5)$

et puisque $16k' + 5 \equiv 0[63] \Leftrightarrow 16k' \equiv -5[63]$

$\Leftrightarrow 64k' \equiv -20[63]$

$\Leftrightarrow k' \equiv -20[63]$ car $(64 \equiv 1[63])$

Donc : $(\exists q \in \mathbb{Z})$; $k' = -20+63q$

D'où : $x = 1+8(-20+63q) = -159+540q$ où $q \in \mathbb{Z}$

Réciproquement si $x = -159 + 504q$ où $q \in \mathbb{Z}$ on a : $\begin{cases} x \equiv 2[7] \\ x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[9] \end{cases}$

$S = \{-159 + 504q / q \in \mathbb{Z}\}$

Remarque : On peut aussi déterminer une solution particulière x_0 pour le système (E) puis déduire que les solutions du système sont les nombres $x_0 + (7 \times 8 \times 9)q = x_0 + 504q$ (où $q \in \mathbb{Z}$)

Exercice 33

1) Soit n un élément de $\mathbb{Z}$

a- Montrons que : $n \equiv 1[2] \Longrightarrow n^2 \equiv 1[8]$

Puisque n est impair, alors $(\exists p \in \mathbb{Z})$; $n = 2p + 1$

Donc : $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 4p(p+1) + 1$

et puisque: $p(p+1) \equiv 0[2]$ alors $p(p+1) = 2k$ (où $k \in \mathbb{Z}$)

Donc : $n^2 = 8k + 1$ d'où : $n^2 \equiv 1[8]$

b- Montrons que : $(n \equiv 0[2]) \longrightarrow (n^2 = 0[8]$ ou $n^2 \equiv 4[8])$

1ère Méthode :

Supposons que n est pair.

alors $n = 2p$ (où p élément de $\mathbb{Z}$) donc $n^2 = 4p^2$.

D'où $n^2 \equiv 0[4]$ c'est-à-dire $n^2 = 4k$ (où $k \in \mathbb{Z}$)

• Si k est impair alors $k = 2k' + 1$ avec $k' \in \mathbb{Z}$

et par suite $n^2 = 8k' + 4$

finalement $n^2 \equiv 4[8]$

• Si k est pair alors $k = 2k'$ (avec $k' \in \mathbb{Z}$), donc $n^2 = 8k$, d'où $n^2 \equiv 0[8]$

2ème Méthode :

• Si n est pair alors $n \equiv 0[8]$ ou $n \equiv 2[8]$ ou $n \equiv 4[8]$ ou $n \equiv 6[8]$

et puisque $2^2 \equiv 4[8]$ et $6^2 \equiv 4[8]$ et $4^2 \equiv 0[8]$

alors $n^2 \equiv 0[8]$ ou $n^2 \equiv 4[8]$

2) Résolvons l'équation $8x + 1 = y^2$

Puisque $8x + 1$ est impair, alors y^2 est impair, d'ou y est impair.

Par suite : $y^2 \equiv 1[8]$ (d'après 1) a)).

On pose $y = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$

On a : $y^2 = (2k+1)^2 = 1 + 4k + 4k^2$

Donc : $8x = y^2 - 1 = 4k + 4k^2$

c'est-à-dire $2x = k(k+1)$ d'où $x = \frac{k(k+1)}{2}$ (on sait que $k(k+1)$ est pair)

Par suite : $(x, y) = \left(\frac{k(k+1)}{2}, 2k+1\right)$ où $k \in \mathbb{N}$

Réciproquement on vérifie $\left(\frac{k(k+1)}{2}, 2k+1\right)$ est solution de l'équation.

finalement $S = \left\{\left(\frac{k(k+1)}{2}, 2k+1\right) / k \in \mathbb{N}\right\}$

3) Soit n un élément de $\mathbb{Z}$ tel que n est impair.

Montrons que : $n^4 \equiv 1[16]$

On a : (n est impair $\Longrightarrow n^2 \equiv 1[8]$) d'après la question 1) a)

Donc : $n^2 = 1 + 8k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

et on a : $n^4 = (1+8k)^2 = 1 + 16k + 64k^2 = 16(k + 4k^2) + 1$

En posant $p = k + 4k^2$, on a : $n^4 = 16p + 1$ avec $p \in \mathbb{Z}$

Par conséquent : $n^4 \equiv 1[16]$.

Exercice 34

Soit k un élément de $\{1;2;3;\ldots;p-1\}$; on pose : $d = PGCD(p;k)$

On a : $d \mid p$; donc: $d = 1$ ou $d = p$ et puisque : $d \neq p$ (car: d, k et p ne divise pas k); alors : $d = 1$

Or: $a - 1 \in \{1;2;\ldots;p-1\}$ et $a + 1 \in \{1;2;\ldots;p-1\}$

Alors : $p \wedge (a-1) = 1$ et $p \wedge (a+1) = 1$

Donc : $p \wedge (a^2 - 1) = 1$ **Info :** $(\forall (a;b;c) \in \mathbb{Z}^3); \begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow a \wedge bc = 1$

Exercice 35

1) a- Montrons que: $p^2 \mid a^2$, puis $p \mid a$:

On a : $p^2 = (a+b) \wedge ab$, d'où : $p^2 \mid a+b$ et $p^2 \mid ab$

Donc : $p^2 \mid a(a+b) - ab$; d'où : $p^2 \mid a^2$

On a : $p \mid p^2$ donc : $p \mid a^2$, et puisque p est premier, alors : $p \mid a$

b- Montrons que $p \mid b$:

On a : $p^2 \mid a+b$ et $p^2 \mid ab$, d'où : $p^2 \mid b(a+b) - ab$ c'est-à-dire : $p^2 \mid b^2$

Et puisque : $p \mid p^2$, alors : $p \mid b^2$, et sachant que p est premier, alors : $p \mid b$

c- Montrons que $a \wedge b = p$ ou $a \wedge b = p^2$:

On pose : $d = a \wedge b$, on a : $d \mid a$ et $d \mid b$; d'où : $d \mid a + b$ et $d \mid ab$

Par suite : $d \mid (a + b) \wedge ab$; donc: $d \mid p^2$, par conséquent: $d \in \{1; p; p^2\}$

Et puisque : $p \mid a$ et $p \mid b$ alors : $p \mid d$ donc : $d = p$ ou $d = p^2$

2) On considère le système: $(S)\begin{cases}(a;b) \in \mathbb{N}^2 \\ a \vee b = 231 \\ (a+b) \wedge ab = 49\end{cases}$

a- Montrons que : $a \wedge b = 7$

On a d'après la question 1) c) on a : $(a+b) \wedge ab = 7^2$

et 7 est un nombre premier; donc : $a \wedge b = 7$ ou $a \wedge b = 7^2$

Et puisque : $a \wedge b \mid a \vee b$ et 7 231et 49 ne divise pas 231; alors : $a \wedge b = 1$

b- Résolvons le système (S):

On a : $a \wedge b = 7$; donc : $(\exists (a';b') \in \mathbb{N}^2)$; $\begin{cases}a' \wedge b' = 1 \\ a = 7a' \\ b = 7b'\end{cases}$

Et puisque : $231 = a \vee b = 7(a' \vee b') = 7a'b'$ alors : $a'b' = 33$

On a : $\begin{cases}a'b' = 33 \\ a' \wedge b' = 1\end{cases}$; d'où : $(a';b') \in \{(33;1);(1;33);(3;11),(11;3)\}$

Et puisque : $a = 7a'$ et $b = 7b'$ alors l'ensemble des solutions du système (S) est : $S = \{(231;7);(7;231);(21;77);(77;21)\}$

EXERCICE 26

1) Décomposons le nombre 469 :

On a : $469 = 67 \times 7$; 7 est premier et 67 est aussi premier.

Ainsi la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre 469 est: 7×67

2) Déterminons les couples $(x;y)$; vérifiant $x^3 - y^3 = 469$; avec $(x;y) \in \mathbb{N}^2$

Soit $(x;y)$ élément de $\mathbb{N}^2$;

On a : $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$; d'où : $x - y \leq x$ et $x^2 + xy + y^2 \geq x$

Donc : $x - y \leq x^2 + xy + y^2$

Ainsi : $x^3 - y^3 = 469 \Leftrightarrow \begin{cases}x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 469\end{cases}$ ou $\begin{cases}x - y = 7 \\ x^2 + xy + y^2 = 67\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x = y + 1 \\ (y+1)^2 + y(y+1) + y^2 = 469\end{cases}$ ou $\begin{cases}x = y + 7 \\ (y+7)^2 + y(y+7) + y^2 = 67\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 3y^2 + 3y - 468 - 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = y + 7 \\ 3y^2 + 21y - 18 = 0 \end{cases}$$

Les solutions de l'équation : $3y^2 + 3y - 468 = 0$ sont: -13 et 12.

et les solutions de l'équation : $3y^2 + 21y - 18 = 0$ n'appartiennent pas à $\mathbb{N}$.

Donc : $x^3 - y^3 = 469 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = 12 \end{cases}$

Par conséquent le seul couple de $\mathbb{N}^2$ solution de l'équation : $x^3 - y^3 = 469$ est $(13;12)$

1) Déterminons tous les nombres α de $\mathbb{Z}$ qui vérifient : $\alpha^2 \equiv 0[p^2]$

On a : $\alpha^2 \equiv 0[p^2] \Leftrightarrow p^2 | \alpha^2$

Et on a : $p | p^2$ et $p^2 | \alpha^2$; d'où : $p | \alpha^2$

Et puisque p est premier; alors : p α, donc : $(\exists k \in \mathbb{Z})$; $\alpha = kp$

Réciproquement, si $\alpha = kp$ avec $k \in \mathbb{Z}$

alors $p^2 | \alpha^2$ donc : $\alpha^2 \equiv 0[p^2]$

Donc les nombres α s'écrivent sous la forme kp où $k \in \mathbb{Z}$

2) Déduisons tous les nombres relatifs x qui vérifient :

$x^2 + 18x + 32 \equiv 0[49]$

On a : $(x+9)^2 = x^2 + 18x + 81$ et $81 \equiv 32[49]$

D'où : $x^2 + 18x + 32 \equiv 0[49] \Leftrightarrow x^2 + 18x + 81 \equiv 0[49]$

$\Leftrightarrow (x+9)^2 \equiv 0[7^2]$

Et d'après la question 1); on a : $x + 9 = 0$ 7|; donc : $(\exists k \in \mathbb{Z})$, $x + 9 = 7k$

Donc : les solutions de l'équation (E) sont les nombres relatifs:

$x = -9 + 7k$; avec : $k \in \mathbb{Z}$

Soit p un nombre premier positif et n un entier relatif; tels que: $n^3 - 1 | p$

et $n \neq 1 | p$

On a : $n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1)$

Et on a : $n^3 \equiv 1[p] \Leftrightarrow n^3 - 1 \equiv 0[p]$

$\Leftrightarrow p | n^3 - 1$

et on a: $n \not\equiv 1[p] \Leftrightarrow n-1 \not\equiv 0[p]$

$\Leftrightarrow p$ ne divise pas $n-1$

Et puisque p est premier, et ne divise pas $n-1$; alors : $p \wedge (n-1) = 1$

Par suite : $p \mid (n-1)(n^2+n+1)$ et $p \wedge (n-1) = 1$

D'après le théorème de GAUSS: $p \mid n^2+n+1$

Ainsi : $(n+1) \equiv -n^2[p]$, d'où : $(n+1)^6 \equiv n^{12}[p]$

Et on a : $n^3 \equiv 1[p] \rightarrow n^{12} \equiv 1[p]$; Conclusion: $(n+1)^6 \equiv 1[p]$

Exercice 39

1) Déterminons l'écriture des diviseurs positifs du nombre 630:

On a : $630 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1$

Ainsi, chaque diviseur positif α du nombre 630; s'écrit sous la forme: $d = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$

Avec a; b; c et d des entiers naturels vérifiant :$0 \leq a \leq 1$; $0 < b < 2$; $0 \leq c \leq 1$ et $0 \leq d \leq 1$

2) Déterminons tous les entiers naturels qui vérifient : $M(x;18) = 630$.

On rappelle que : $x = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_n^{\alpha_n}$ et $y = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \ldots \times p_n^{\beta_n}$ est la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers naturels x et y.

Et : $x \vee y = M(x;y) = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \times p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)} \times \ldots \times p_n^{\max(\alpha_n,\beta_n)}$

On pose . $x = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$, où a; b; c et d des entiers naturels.

On a : $18 = 2^1 \times 3^2 \times 5^0 \times 7^0$ et $630 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1$

$M(x;18) = 630 \Rightarrow x = 2^a \times 3^b \times 5^1 \times 7^1$; $0 \leq a \leq 1$ et $0 \leq b \leq 2$

$\Rightarrow x = 2^0 \times 3^0 \times 5^1 \times 7^1$ ou $x = 2^0 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1$ ou $x = 2^0 \times 3^1 \times 5^1 \times 7$

ou $x = 2^1 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$ ou $x = 2^1 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1$ ou $x = 2^1 \times 3^0 \times 5^1 \times 7^1$

Donc : les entiers naturels x qui vérifient la condition :

$M(x;18) = 630$ sont : 35; 70; 105; 315; 210 et 630.

Exercice 40

1) Montrons que : $(\exists k \in \mathbb{N}^* ; p = 6k-1)$ ou $(\exists k \in \mathbb{N}^* ; p = 6k+1)$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists! r \in \{0,1,2,3,4,5\})$; $n \equiv r[6]$

Donc chaque entier naturel s'écrit sous la forme : $6k+r$; ou $r \in \{0;1;2;3;4;5\}$

Et puisque p est premier et $p > 5$, alors p ne divise pas 2 et 3.

Ainsi : p ne s'écrit pas sous la forme: $6k$; $6k+2$; $6k+3$ ou $6k+4$

Par conséquent p s'écrit sous la forme : $p=6k+1$ ou $p=6k+5$

Et puisque : $p \geq 5$ on a alors : $6k+5=6(k+1)-1$; $k \in \mathbb{N}^*$

Ainsi : $(\exists k \in \mathbb{N}^* ; p=6k+1)$ ou $(\exists k \in \mathbb{N}^* ; p=6k-1)$

2) Montrons que $p^2 \equiv 1[24]$:

D'après la question 1); le nombre p s'écrit sous la forme $6k-1$ ou $6k+1$; avec: $k \in \mathbb{N}^*$

1er cas : Si $p=6k+1$;

alors : $p^2-1=(6k+1)^2-1=36k^2+12k+1-1=12k(3k+1)$

Il suffit de montrer que le nombre $k(3k+1)$ est pair.

* Si k est pair, alors : $k(3k+1)$ est pair.

* Si k est impair, alors : $(\exists p_0 \in \mathbb{N})$; $k=2p_0+1$

Ainsi : $k(3k+1)=(2p_0+1)(6p_0+4)=2(2p_0+1)(3p_0+2)$

Donc : $k(3k+1)$ est aussi un nombre pair.

Ainsi, pour tout nombre naturel k de $\mathbb{N}^*$; le nombre $k(3k+1)$ est pair.

Donc : $(\exists m \in \mathbb{N}^*)$; $k(3k+1)=2m$; par suite : $p^2-1=24m$;

d'où : $p^2 \equiv 1[24]$

2ème cas : Si $p=6k-1$; alors : $p^2-1=36k-12k=12k(3k-1)$

• Si k est pair, alors : $k(3k-1)$ est pair.

• Si k est impair, alors: $(\exists q \in \mathbb{N})$; $k=2q+1$

D'où : $k(3k-1)=(2q+1)(6q+2)=2(3q+1)(2q+1)$

Donc : $k(3k-1)$ est pair.

Par conséquent : $(\exists m \in \mathbb{N}^*)$; $k(3k-1)=2m$

Ainsi : $(\exists m \in \mathbb{N}^*)$; $p^2-1=24m$; c'est-à-dire : $p^2 \equiv 1[24]$

Donc dans tous les cas : $p^2 \equiv 1[24]$

Exercice 41

1) Montrons que si p et $8p-1$ sont deux nombres premiers, alors $8p+1$ n'est pas premier.

• Si $p=2$, alors : $8p-1=15$ et 15 n'est pas premier.

• Si $p=3$, alors : $8p-1=23$ et 23 est premier; et on a : $8p+1=25$ n'est pas un nombre premier.

• Soit p un nombre premier tel que : $p \geq 5$; on suppose que : $8p-1$ est un nombre premier.

On a : p est premier; et $p > 3$; donc : $p \not\equiv 0[3]$; il reste alors : $p \equiv 1[3]$ ou $p \equiv 2[3]$

Et puisque : $8p$ 1 est premier alors : $p \not\equiv 2[3]$ car sinon alors :

$p \equiv 2[3]$, donc : $8p - 1 \equiv 0[3]$ ce qui est absurde d'où: $8p-1$ n'est pas premier.

Donc : $p \equiv 1[3]$ par conséquent : $8p+1 \equiv 0[3]$

C'est-à-dire : $8p+1$ est un nombre non premier, car 3 est un diviseur propre du nombre $8p+1$.

2) Soit p un nombre premier et $p \neq 3$; montrons que $8p^2+1$ n'est pas premier.

• Si $p = 2$, alors : $8p^2+1 = 33$, non premier.

• Si $p > 3$, alors : $p \equiv 1[3]$ ou $p \equiv 2[3]$

Ainsi : $8p^2+1 \equiv 9[3]$ ou $8p^2+1 \equiv 33[3]$

Et puisque : $9 \equiv 0[3]$ et $33 \equiv 0[3]$, alors : $8p^2+1 \equiv 0[3]$

C'est-à-dire : 3 divise $8p^2+1$ et $8p^2+1 > 3$

Par conséquent : $8p^2+1$ n'est pas premier.

Exercice 42

Soit n un élément de $\mathbb{N}$ et $n > 2$; tel que : n divise $(n-1)!+1$

Montrons que n est premier.

Méthode 1:

On a : n divise $(n-1)!+1$, donc: $(\exists k \in \mathbb{N}^*) / (n-1)!+1 = kn$

C'est-à-dire : $(\exists k \in \mathbb{N}^*) / nk-(n-1)!=1$

Donc : $(\forall a \in \{2,3,...,n-1\})$; $n.k - a\left(\frac{(n-1)!}{a}\right) = 1$

D'où. $(\forall a \in \{2,3, \ldots n-1\})$; $n \wedge a$ 1 (d'après le théorème de BEZOUT) · n est premier.

Méthode 2:

Soit q un élément de $\mathbb{Z}$; tel que q divise n et $|q| \neq 1$

Montrons que : $|q| = n$

On a : $q|n$; d'où : $|q||n$, donc : $|q| \leq n$

Et puisque : $n|(n \quad 1)! + 1$; alors : $|q||(n \quad 1)! + 1$

* Si on a : $1 < |q| < n$, alors : $|q||(n-1)!$

Donc : $\begin{cases} |q||(n-1)! \\ |q|(n-1)! + 1 \end{cases} \Rightarrow |q|1$

Par conséquent : $|q, - 1$, et ceci est en contradiction avec : $,q| \neq 1$;

ainsi: $|q| = n$

Donc : $(\forall q \in \mathbb{Z})$; $q||n \Rightarrow |q| = n$ ou $|q| = 1$

Conclusion : n est un nombre premier.

Exercice 43

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$

Il suffit de montrer que :

Si n est un nombre non premier, alors : $5^n - 3^n$ n'est pas un nombre premier.

On suppose que n est un nombre non premier, ainsi; le nombre n admet des diviseurs propres.

c'est-à-dire: $(\exists p,q \in \mathbb{N} \quad \{0\ 1\})/n = pq$; $n \neq p$ et $n \neq q$ car $p \neq 1$ et $q \neq 1$

Par suite : $5^n - 3^n = 5^{pq} - 3^{pq}$

$$= (5^p)^q - (3^p)^q$$

$$= (5^p - 3^p).\sum_{k=0}^{q-1}(5^p)^k.(3^p)^{q-1-k}$$

Info: $a^p - b^p = (a-b)(a^{p-1} + a^{p-2}.b + \ldots + ab^{p-2} + b^{p-1})$

$$= (a-b).\sum_{k=0}^{p-1}a^k.b^{p-1-k}$$

Et puisque : $(5^p - 3^p) = 2.\sum_{k=0}^{p-1}5^k\,3^{p-1-k}$; alors : $5^p - 3^p \geq 2$

Et on a : $\sum_{k=0}^{q-1}(5^p)^k.(3^p)^{q-1-k} \geq 2$

Donc : $(\exists a,b \in \mathbb{N} \quad \{0,1\})$; $5^n \quad 3^n = ab$ te que : $b = \sum_{k \quad 0}^{\cdot}(5^p)^k\ (3^p)^{\cdot\ \cdot\ \cdot}$

Et par conséquent : $5^n - 3^n$ n'est pas un nombre premier.

Exercice 44

1) Déterminons tous les entiers naturels x tels que : $x \vee 15 = 720$

On a : $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$, est la décomposition en produit de facteurs premiers.

Soit $x \in \mathbb{N}$; tel que : $x \vee 15 = 720$; on a : $x \vee 15 = 720 \Rightarrow x \mid 720$

Ainsi, x peut s'écrire sous la forme : $x = 2^{\alpha} \times 3^{\beta} \times 5^{\gamma}$

avec α; β et γ des entiers naturels tels que : $\alpha \leq 4$; $\beta \leq 2$ et $\gamma \leq 1$

Et puisque : $x \vee 15 = (2^{\alpha} \times 3^{\beta} \times 5^{\gamma}) \vee (3 \times 5)$

$$= 2^{\sup(\alpha,0)} \times 3^{\sup(\beta,1)} \times 5^{\sup(\gamma,1)}$$

$$= 2^4 \times 3^2 \times 5^1$$

Alors : $\sup(\alpha, 0) = 4 \Rightarrow \alpha = 4$

$\sup(\beta, 1) = 2 \Rightarrow \beta = 2$

$\sup(\gamma, 1) = 1 \Rightarrow \gamma = 1$ ou $\gamma = 0$

Donc les entiers naturels qui vérifient : $x \vee 15 = 720$ sont : $x = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$

ou $x = 2^4 \times 3^2 \times 5$

2) Déterminons tous les entiers naturels x tels que: $x \wedge 5880 = 84$

Soit x un entier naturel , on a : $x \wedge 5880 = 84 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{84}\right) \wedge \left(\frac{5880}{84}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{84}\right) \wedge 70 = 1$$

Et puisque : $84 = 2^2 \times 3 \times 7$; est la décomposition en produit de facteurs premiers, et 84 divise x,

Donc : il existe a de $\mathbb{N}^*$; tel que : $x = 84 \times a = 2^2 \times 3 \times 7 \times a$

Et on a : $70 = 2 \times 5 \times 7$ et $a \wedge 70 = 1$

Donc la décomposition en produit de facteurs premiers de a est sous la forme: $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$

avec : $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ et $p_i \in \mathbb{P}^* - \{2,5,7\}$

Ainsi, la décomposition de a peut contenir le nombre 3.

Et on a : $x \wedge 5880 = (2^2 \times 3 \times 7 \times a) \wedge (2^4 \times 3 \times 5 \times 7) = 2^2 \times 3 \times 7 = 84$

Donc, les nombres demandés sont : $x = 2^2 \times 3^n \times 7\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}\right)$, et: $n \in \mathbb{N}^*$

et $p_i \in \mathbb{P}^* - \{2,3,5,7\}$ et $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

Exercice 45

1) a- • Montrons que : $p^2 \equiv 1[3]$

Puisque p est premier et $p > 5$; alors : $p \equiv 1[3]$ ou $p \equiv -1[3]$,

donc : $p^2 \equiv 1[3]$

• Montrons que: $2^p \equiv 2[3]$

On a p est premier et $p \geq 5$; donc : p est un nombre impair.

Donc : $(\exists k \in \mathbb{N}^*) / p = 2k+1$

Et on a : $2^p = 2^{2k+1} = (2^2)^k \times 2$

Et puisque : $2^2 \equiv 1[3]$ alors : $2^{2k} \equiv 1[3]$

Donc : $2^{2k+1} \equiv 2[3]$, c'est-à-dire : $2^p \equiv 2[3]$

b- Déduction :

On a : $2^p \equiv 2[3]$ et $p^2 \equiv 1[3]$

Donc : $2^p + p^2 \equiv 0[3]$, ainsi : 3 divise $2^p + p^2$

Par conséquent : $2^p + p^2$ admet un diviseur propre.

Conclusion : $2^p + p^2$ n'est pas premier.

2) Montrons que si $p^2 + 2^p$ est premier, alors : $p = 3$

On a d'après la question 1) b), p est premier et $p > 5$, donc : $2^p + p^2$ n'est pas premier.

Ainsi: d'après la contraposée : $2^p + p^2$ est un nombre premier impl que $p < 5$.

On suppose que $2^p + p^2$ est premier, ainsi : $p < 5$

Et puisque p est premier positif; on a donc : $p = 2$ ou $p = 3$.

• Pour $p = 2$; on a : $2^2 + 2^2 = 8$ et 8 n'est pas premier.

• Pour $p = 3$; on a : $2^2 + 3^2 = 17$ et 17 est premier.

Donc : si $p^2 + 2^p$ est premier, alors : $p = 3$.

Exercice 46

Soit a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$; tels que: $a \wedge b = 1$ et $ab = \alpha^2$; où: $\alpha \in \mathbb{N}^*$

Si, $ab = 1$, alors : $a = 1$ et $b = 1$; dans ce cas a et b sont deux carrés parfaits.

On suppose que : $ab \neq 1$; donc : $\alpha \neq 1$

On considère : $\alpha = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, la décomposition en produit de facteurs premiers

de α; avec : $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ et $p_i \in I\!P^*$; $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$

On a : $ab = \left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} .. p_k^{\alpha_k}\right)^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} .. p_k^{2\alpha_k}$.

On a : $(\forall i \in \{1, 2, ..., k\}); p_i | ab \Rightarrow p_i | a$ ou $p_i | b$

Il n'existe aucun nombre premier p_i, avec : $1 \leq i \leq k$, qui divise a et b en même temps, car: $a \wedge b = 1$

Donc, chacun des nombres a et b s'écrit : $a = (a')^2$ et $b = (b')^2$

avec: $a' \wedge b' = 1$

Dans ce cas, chacun des nombres a et b est un carré parfait.

Exercice 47

1) Montrons que : $(\forall k \in \{1; 2; ...; p-1\}); p | C_p^k$

Soit k un élément de $\{1; 2; \cdots; p-1\}$

On a : $C_p^k = \frac{p}{k} C_p^k$; d'où : $kC_p^k = pC_p^k$, ainsi, p divise kC_p^k

Et puisque p est premier, et $k < p$; alors $p \wedge k = 1$, par suite et selon le théorème de Gauss p divise C_p^k

Donc : $(\forall k \in \{1; 2; ...; p-1\}); p | C_p^k$

2) a) Montrons: $(\forall n \in \mathbb{N}); n^p \equiv n [p]$

Pour $n = 0$; on a : $0^p \equiv 0 [p]$ car $0^p = 0$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$

On suppose que $n^p = n [p]$ et on montre que $(n+1)^p \equiv n+1 [p]$

On a : $(n+1)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k n^k = 1 + n^p + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k n^k$

Puisque : $(\forall k \in \{1; 2; ...; p-1\}); C_p^k \equiv 0 [p]$

Alors : $(\forall k \in \{1; 2; ...; p-1\}); C_p^k n^k \equiv 0 [p]$

Ainsi : $\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k n^k \equiv 0 [p]$

Donc : $(n+1)^p \equiv n^p + 1 [p]$

D'après l'hypothèse de récurrence : $n^p \equiv n [p]$

Donc : $n^p + 1 \equiv n + 1 [p]$ d'où : $(n+1)^p \equiv n+1 [p]$

Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N}); n^p \equiv n [p]$

b) Déduction :

On suppose que p ne divise pas n; et montrons que : $n^{p-1} \equiv 1 [p]$

On a p ne divise pas n et p est premier, donc : $n \wedge p = 1$

Et puisque : $n^p \equiv n[p]$, alors $p \mid n^p - n$; c'est-à-dire $p \mid n(n^{p-1} - 1)$

D'après le théorème de Gauss : $p \mid n^{p-1} - 1$; donc : $n^{p-1} \equiv 1[p]$

Ainsi: $(\forall n \in \mathbb{N}); \left(n \wedge p = 1 \Rightarrow n^{p-1} \equiv 1[p]\right)$

3) Application :

a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}); n^{13} - n \equiv 0[546]$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on a : $564 = 2 \times 3 \times 7 \times 13$ est la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre 564

Info:

$(\forall n \in \mathbb{N}); n^p = n[p]$ où p est nombre premier positif

ce résultat s'appelle le théorème de Fermat.

On a d'après le théorème de Fermat $n^{13} = n[13]$ (13 est un nombre premier; donc $13 \mid n^{13} - n$

Et on a : $n^{13} - n = n(n^{12} - 1)$

$= n(n^6 - 1)(n^6 + 1) = (n^7 - n)(n^6 + 1)$

Et puisque : $n^7 \equiv n[7]$; d'après le théorème de Fermat :

$7 \mid n^7 - n$ ainsi $7 \mid n^{13} - n$

Donc : $7 \wedge 13 = 1$ et $13 \mid n^{13} - n$ et $7 \mid n^{13} - n$; d'où : $7 \times 13 \mid n^{13} - n$

Et on a : $n^{13} - n = n(n^6 + 1)(n^6 - 1)$

$= n(n^6 + 1)(n^2 - 1)(n^4 + n^2 + 1)$

$= (n^3 - n)(n^6 + 1)(n^4 + n^2 + 1)$

Et puisque : $n^3 \equiv n[3]$; (d'après le théorème de Fermat); alors : $3 \mid n^3 - n$ d'où $3 \mid n^{13} - n$

Ainsi : $7 \times 13 \mid n^{13} - n$ et $3 \mid n^{13} - n$ d'où $3 \wedge (7 \times 13) = 1$

D'où : $3 \times 7 \times 13 \mid n^{13} - n$

Et on a : $n^{13} - n = n(n^6 + 1)(n^6 - 1)$

$= n(n^6 + 1)(n^3 - 1)(n^3 + 1)$

$= (n^2 - n)(n^6 + 1)(n^3 + 1)(n^3 + n + 1)$

Et puisque : $n^2 - n[2]$; d'après le théorème de Fermat : $2 \mid n^2 - n$ ainsi $2 \mid n^{13} - n$

Donc : $3 \times 7 \times 13 \mid n^{13} - n$ et $2 \mid n^{13} - n$ et : $2 \wedge (3 \times 7 \times 13) = 1$

D'où : $2 \times 3 \times 7 \times 13 | n^{13} - n$

c'est-à-dire : $546 | n^{13} - n$

Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N}); n^{13} - n \equiv 0[546]$

b) Montrons que l'equation : $3x^2 + 3x + 7 = y^3$; n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$

On utilise le raisonnement par l'absurde :

On suppose qu'il existe un couple $(a;b)$ de $\mathbb{Z}^2$ tel que . $3a^2 + 3a + 7 = b^3$

On a : $b^3 = 3(a^2 + a + 2) + 1$; d'où : $b^3 \equiv 1[3]$

D'après le théorème de Fermat : $b^3 \equiv b[3]$ donc : $b \equiv 1[3]$

Par suite : $(\exists k \in \mathbb{Z}); b = 1 + 3k$

Et puisque : $b^3 = 3(a^2 + a + 2) + 1$; alors :

$1 + 9k + 27k^2 + 27k^3 = 3(a^2 + a + 2) + 1$

D'où : $a^2 + a + 2 = 3(k + 3k^2 + 3k^2)$

Donc : $a^2 + a + 2 \equiv 0[3]$

On montre que ce résultat est impossible

Si on a : $a \equiv 0[3]$, alors : $a^2 + a + 2 \equiv 2[3]$

Si on a : $a \equiv 1[3]$, alors : $a^2 + a + 2 \equiv 1[3]$

Si on a : $a \equiv 2[3]$, alors : $a^2 + a + 2 \equiv 2[3]$

Conclusion, notre hypothèse est fausse, donc il n'existe pas de couple de $\mathbb{Z}^2$, vérifiant l'équation : $y^3 = 3x^2 + 3x + 7$

Exercice 48

On a : d'après le théorème de Fermat : $2^p \equiv 2[p]$ donc : $p | 2^p - 2$

Ainsi : $\begin{cases} p | 2^p + 1 \\ p | 2^p - 2 \end{cases} \Rightarrow p | 3$

Et puisque : p est premier; alors : $p = 3$

Réciproquement :

On a : $2^3 + 1 = 9$ et $3 | 9$

Donc, le seul nombre qui vérifie : $p | 2^p + 1$ est $p = 3$

Exercice 49

1) a) Montrer que l'équation : $x^2 + 1 \equiv 0[p]$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}$

On suppose que : $(\exists a \in \mathbb{Z}) / a^2 + 1 = 0[p]$

C'est-à-dire : $(\exists a \in \mathbb{Z}) / a^2 \equiv -1[p]$

D'où : $(\exists a \in \mathbb{Z}) / a^4 \equiv 1[p]$ (1)

Et puisque : $a^2 \equiv -1[p]$; alors p ne divise pas a, donc : d'après le théorème de Fermat $a^{p-1} \equiv 1[p]$ (2)

Par consequent : $p - 1 = 0[4]$ c'est-à-dire : $p \equiv 1[4]$, et ceci est en contradiction avec $p \equiv 3[4]$

Ainsi, l'équation proposée n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}$

b) Soit x et y deux éléments de $\mathbb{Z}$; montrons que $p|x^2+y^2 \Longleftrightarrow p|x$

• Si $p|x$ et $p|y$; alors : $p|x^2$ et $p|y^2$; donc : $p|x^2+y^2$

• On suppose que: $p|x^2+y^2$

Puisque : $p|x \Longleftrightarrow p|x^2$

$\Longleftrightarrow p|x^2+y^2-x^2$

$\Longleftrightarrow p|y^2$

$\Longleftrightarrow p|y$

Alors il suffit donc, de montrer que : $p|x$ ou $p|y$

On utilise le raisonnement par l'absurde; on suppose que p ne divise pas x

On a : p est premier et p ne divise pas x; d'où : $p \wedge x = 1$

D'après le théorème de Bezout $(\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^2) / \alpha p + \beta x = 1$

D'où : $\beta x \equiv 1[p]$ donc : $\beta^2 x^2 \equiv 1[p]$

Et puisque : $x^2 + y^2 \equiv 0[p]$ c'est-à-dire $\beta^2(x^2 + y^2) \equiv 0[p]$,

donc : $\beta^2 x^2 + \beta^2 y^2 \equiv 0[p]$

Ainsi : $\beta^2 y^2 \equiv -1[p]$ d'où : $(\beta y)^2 + 1 \equiv 0[p]$

Conclusions : l'équation $x^2 + 1 = 0[p]$ admet une solution dans $\mathbb{Z}$ et la solution est βy, ce qui est en contradiction avec la question précédente.

Donc : $p|x$; ainsi $p|y$

D'où : $(\forall x,y \in \mathbb{Z})$; $(p|x^2+y^2 \Longleftrightarrow (p|x$ et $p|y)$

2) a) Montrons que l'équation : $x^2 + y^2 = pz^2$ avec $x \wedge y \wedge z = 1$, n'a pas de solutions dans $(\mathbb{N}^*)^3$

On suppose : $(\exists(a,b,c) \in (\mathbb{N}^*)^3) / \begin{cases} a^2+b^2 = pc^2 \\ a \wedge b \wedge c = 1 \end{cases}$

On a : $a^2 + b^2 = c^2 p$; d'où : $p|a^2+b^2$; d'après la questions 1) b) : $p|a$ et $p|b$

C'est-à-dire : $(\exists k,k' \in \mathbb{N}^*) / a = kp$ et $b = k'p$

D'où : $a^2 + b^2 = c^2 p \iff k^2p^2 + k'^2p^2 = pc^2$

$\iff p(k^2 + k'^2) = c^2$

C'est-à-dire : $p|c^2$; ainsi, $p|c$ car p est premier

Par conséquent : $p|a$; $p|b$ et $p|c$; d'où : $p/a \wedge b \wedge c$ ainsi $p|1$ ce qui est absurde

Donc : l'équation : $x^2 + y^2 = pz^2$, avec $x \wedge y \wedge z = 1$, n'a pas de solutions dans $(\mathbb{N}^*)^3$

b) Résolvons dans $\mathbb{Z}^3$ l'équation (E) : $x^2 + y^2 = pz^2$

On a : le triplet $(0;0;0)$ est une solution de (E)

Soit $(x;y;z)$ un élément de $\mathbb{Z}^3$ vérifiant l'équation (E) ; alors le triplet $(-x;\ y;-z)$ vérifie aussi l'équation (E) (évident), il suffit de résoudre cette équation dans $(\mathbb{N}^*)^3$

On suppose qu'il existe $(x;y;z)$ de $(\mathbb{N}^*)^3$ tel que $x^2 + y^2 = pz^2$

On pose : $d = x \wedge y \wedge z$

On a : $(\exists (x',y',z') \in (\mathbb{N}^*)^3) / \begin{cases} x = dx' \\ y = dy' \\ z = dz' \text{ et } x' \wedge y' \wedge z' = 1 \end{cases}$

Ainsi : l'équation (E) implique : $\begin{cases} x'^2 + y'^2 = pz'^2 \\ (x',y',z') \in (\mathbb{N}^*)^3 \\ x' \wedge y' \wedge z' = 1 \end{cases}$

Et ceci est impossible, d'après la questions 2) a), il n'existe aucun triplet de $(\mathbb{N}^*)^3$, vérifiant $x^2 + y^2 = pz^2$

Par conséquent : l'équation (E) n'admet pas de solutions dans $(\mathbb{Z}^*)^3$

Donc, l'ensemble des solutions de (E) est : $S = \{(0,0,0)\}$

1) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $n(n^6 - 1) \equiv 0[7]$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a 7 est un nombre premier donc $n^7 \equiv n[7]$ d'après le théorème de FERMAT, d'où : $n^7 - n \equiv 0[7]$

Par suite, $(\forall n \in \mathbb{N})$; $n(n^6 - 1) \equiv 0[7]$

2) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $n(n^2 - 1) \equiv 0[6]$

On a : 3 est un nombre premier donc, d'après le théorème de FERMAT,

$n^3 \equiv n[3]$ c'est-à-dire : $n^3 - n \equiv 0[3]$ donc : $3 | n^3 - n$ (1)

et on sait que : $n(n+1)$ est un nombre pair, donc $2 | n(n+1)$ et par suite :

$2 | n(n+1)(n-1)$

d'où : $2 | n(n^2-1)$ (2)

On a : $\begin{cases} 2 | n(n^2-1) \\ 3 | n(n^2-1) \\ 2 \wedge 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow 6 | n(n^2-1)$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $n(n^2-1) \equiv 0[6]$

Exercice 51

Montrons que : $(2222)^{3333} + (3333)^{2222} \equiv 1[5]$

-On a : $2222 \equiv 2[5]$ donc $(2222)^{3333} \equiv 2^{3333}[5]$

On a : $2 \wedge 5 = 1$, donc d'après le théorème de FERMAT, on a : $2^4 \equiv 1[5]$

et on a : $3333 = 4 \times 833 + 1$

Donc : $2^{3333} \equiv (2^4)^{833} \times 2[5]$ c'est-à-dire $2^{3333} \equiv 2[5]$

D'où : $(2222)^{3333} \equiv 2[5]$ (1)

-On a : $3333 \equiv 3[5]$ donc $(3333)^{2222} \equiv 3^{2222}[5]$

On a : $3 \wedge 5 = 1$, donc d'après le théorème de FERMAT, on a : $3^4 \equiv 1[5]$

et on a : $2222 = 4 \times 505 + 2$

Donc : $3^{2222} \equiv (3^4)^{505} \times 3^2[5]$ c'est-à-dire $3^{2222} \equiv 4[5]$ (car $3^2 \equiv 4[5]$)

D'où : $(3333)^{2222} \equiv 4[5]$ (2)

Par suite, de (1) et (2), on en déduite que : $(2222)^{3333} + (3333)^{2222} \equiv 1[5]$

Exercice 52

1) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $A_n \equiv 0[5]$ et $B_n \equiv 0[5]$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

5 est premier, d'après le théorème de FERMAT : $n^5 \equiv n[5]$ c'est-à-dire :

$n^5 - n \equiv 0[5]$

D'autre part, on a : $A_n = n^5 + 4n - 5n^3$

c'est-à-dire $A_n = n^5 - n + 5n - 5n^3$

Puisque : $n^5 - n = 0[5]$ (d'après le théorème de FERMAT)

et $5n-5n^3\equiv 0[5]$ alors : $A_n\equiv 0[5]$ et $B_n\equiv 0[5]$

2) Soit a et b deux éléments de $\mathbb{Z}$

a) Montrons que : $a^5+b^5\equiv 0[5]\Longleftrightarrow a+b\equiv 0[5]$

• Supposons que : $a+b\equiv 0[5]$

On a : $a+b\equiv[5]\Longrightarrow a\equiv -b[5]$

$\Longrightarrow a^5\equiv(-b)^5[5]$

$\Longrightarrow a^5\equiv -b^5[5]$

$\Longrightarrow a^5+b^5\equiv 0[5]$

• Supposons que : $a^5+b^5\equiv 0[5]$

On a : 5 est un nombre premier, donc d'après le théorème de FERMAT, on a

$\begin{cases}a^5\equiv a[5]\\ b^5\equiv b[5]\end{cases}\Longrightarrow a^5+b^5\equiv a+b[5]$

Puisque $a^5+b^5\equiv 0[5]$ alors $a+b\equiv 0[5]$

Donc : $\forall(a;b)\in\mathbb{Z}^2\ ;\ a^5+b^5\equiv 0[5]\Longleftrightarrow a+b\equiv 0[5]$

b) Déterminons les entiers naturels p tels que :

$p^5+32=0[5]$ et $0\leqslant p\leqslant 20$

On a : $\begin{cases}p^5+32\equiv 0[5]\\ 0\leqslant p\leqslant 20\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}p^5+2^5\equiv 0[5]\\ 0\leqslant p\leqslant 20\end{cases}$

$\Longleftrightarrow\begin{cases}p+2=0[5]\text{ (d'après la question précédente)}\\ 0\leqslant p\leqslant 20\end{cases}$

$\Longleftrightarrow 5|p+2$ et $2\leqslant p+2\leqslant 22$

$\Longleftrightarrow p+2\in\{5,10,15,20\}$

$\Longleftrightarrow p\in\{3;8;13;18\}$

Donc les valeurs de l'entier naturel p sont : 3, 7, 13 et 18

VIII Système de numération

Théorème - Définition - Notation

Soit $b\in(\mathbb{N}^*-\{1\})$

Tout nombre entier naturel non nul N peut s'écrire d'une façon unique sous la forme : $N=a_kb^k+a_{k-1}b^{k-1}+\cdots+a_1b+a_0$ (1)

où $a_0;a_1;\cdots$ et a_k sont des entiers naturels vérifiant $0\leq a_i\leq b-1$ pour tout i de $\{0;1;2;\cdots;k\}$ et $a_k\neq 0$

Lécriture (1) se note $N = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0}^{(b)}$ ou $N = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0}_{b}$

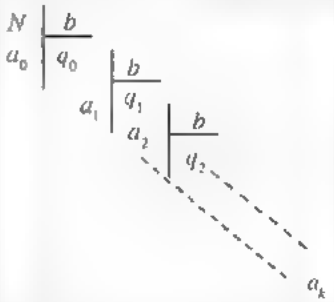
et on dit qu'on a représenté le nombre N dans le système de numération de base b

Les nombres $a_0; a; \cdots$ et a_n sont appelés chiffres

N [illegible] b

Dans le système de numération de base b, on détermine les restes a_k des divisions par b. $(0 \leqslant a_k < b)$

et on écrit : $N = \overline{a_k a_{k-1} \cdots\cdots a_1 a_0}$



Propriété

Si $x = a_n a_{n-1} \cdots\cdots a_1 a_0^{(b)}$ et $y = c_m c_{m-1} \cdots\cdots c_1 c_0^{(b)}$

alors : $m > n \Longrightarrow y > x$

$$\left(m = n \text{ et } \left(\begin{cases} c_n = a_n \\ c_{n-1} = a_{n-1} \\ \vdots \quad \text{et} \quad c_i > a_i \\ c_{i+1} = a_{i+1} \\ c_i \neq a_i \end{cases} \right) \right) \Longrightarrow y > x$$

Exercices d'application

Exercice 53

Soit N un entier naturel qui s'écrit sous la forme $ababab$; dans le système décimal

Montrer N est divisible par 10101

Exercice 54

1) Déterminer tous les entiers naturels a; tel que : a^3 divise 18360

2) En déduire les solutions de l'équation : $b \subset \mathbb{N} : b^3\left[b^4 + (1+b)^2\right] - 18360$

3) Déterminer un nombre b tel que si $A - 36723$ dans le système décimal, alors A est représenté par 442003 dans le système de numération de base b

Exercice 55

Existe t il un couple $(a;b)$ de $\mathbb{N}^2$ tels que le nombre $N = \overline{aabb}$ dans le système de numération décimal soit un carré parfait?

Exercice 56

Soit n un entier naturel tel que : $n = \overline{26x95y}$ dans le système de numération décimal.

Déterminer tous les couples $(x;y)$ de $\mathbb{N}^2$; tel que n est divisible par 3 et par 11.

Exercice 57

Soit N un entier naturel non nul, et qui s'écrit sous la forme xyz dans le système de numération de base 7 et sous la forme $\overline{zyx}$ dans le système de numération de base 9; c'est-à-dire $N = \overline{xyz}^7 = \overline{zyx}^9$

1) Montrer que $y = 25x - 40z$

2) En déduire que : $y = 0$

3) Déterminer x et z

4) Écrire N dans le système de numération décimal.

Exercice 58

Soit n un entier naturel; on pose : $A_n = 3^n + 3^{2n} + 3^{3n}$

1) Déterminer suivant les valeurs de n, les restes de la division euclidienne de 3^n par 13

2) Déterminer l'ensemble : $S = \{n \in \mathbb{N} / A_n \equiv 0[13]\}$

3) On considère les nombres $\overline{1110}_{(3)}$; $\overline{1010100}_{(3)}$ et $\overline{1001001000}_{(3)}$

Ces nombres sont-ils divisibles par 13?

Exercice 59

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ l'équation (1) : $20x - 9y = 2$

2) Déterminer l'ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 / 20x - 9y = 2 ; x \wedge y = 2\}$

3) Soit N un entier naturel tel que : $N = \overline{ca5}_{(6)}$ et $N = \overline{bbaa}_{(4)}$

Montrer que $a + 5$ est un multiple de 4 puis; déterminer a; b et c

Exercice 60

1) a) Résoudre dans : $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $3x - 8y = 0$

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation : $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$; $3x - 8y = 1$

2) Soit A un élément de $\mathbb{N}^*$; tel que : $A = \overline{b0a}_{(5)}$ et $A = \overline{abc}_{(7)}$

Déterminer les nombres a, b et c, puis en déduire l'écriture du nombre A dans le système décimal

Solutions

Exercice 53

On a : $N = a.10^5 + b.10^4 + a.10^3 + b.10^2 + a.10 + b$

$= (10a + b)10^4 + (10a + b)10^2 + (10a + b)$

$= (10a + b)(10^4 + 10^2 + 1)$

$= (10a + b)(10101)$

On a : $10a + b \in \mathbb{N}$; d'où 10101 divise N, c'est-à-dire N est divisible par 10101

Exercice 54

1) décomposons 18360

On a : $18360 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 17$

Ainsi : les nombres tels que a^3 divise 18360 sont : 2 ou 3 ou 6

2) Soit b un élément de $\mathbb{N}$; on a :

$b^3(b^2 + (1+b)^2) = 18360 \Rightarrow b^3 \mid 18360$

$\Rightarrow b = 2$ ou $b = 3$ ou $b = 6$

• Si $b = 2$, alors : $b^2 + (1+b)^2 = (3)^3 \times 5 \times 17$; c'est-à-dire $13 = (3)^3 \times 5 \times 17$ et c'est impossible

• Si $b = 3$, alors : $b^2 + (1+b)^2 = (2)^3 \times 5 \times 17$; c'est-à-dire $25 = (2)^3 \times 5 \times 17$ et c'est impossible

• Si $b = 6$, alors : $b^2 + (1+b)^2 = 5 \times 17$; c'est-à-dire $85 = 5 \times 17$ est ceci est vrai

Donc, la seule solution de l'équation proposée est : $b = 6$

3) On a : $A = 36723$ et $A = 4b^5 + 4b^4 + 2b^3 + 3$

donc : $36723 = 4b^5 + 4b^4 + 2b^3 + 3$ C'est à-dire:

$18360 = 2b^5 + 2b^4 + b^3 = b^3(b^2 + (b+1)^2) = b^3(2b^2 + 2b + 1)$

Donc : $b = 6$ (d'après la question 2)

Exercice 55

Le nombre N est un carré parfait, s'il existe un nombre k de $\mathbb{N}$, tel que $N = k^2$

On suppose qu'il existe un entier k de $\mathbb{N}$ tel que : $k^2 = N$

On a : $N = a.10^3 + a.10^2 + b..0 + b = 1100a + 11b = 11(100a + b)$

Ainsi : $k^2 = 11(100a + b)$; donc : $11|k^2$

D'où : $11|k$; donc : $(\exists p \in \mathbb{N})/k = 11p$

Par suite : $11p^2 = 100a + b$; c'est-à-dire : $11|100a + b$; et on a : $11|99a$

Donc : $11|a + b$

Et puisque : $0 < a \leq 9$ et $0 \leq b \leq 9$ alors $0 < a + b \leq 18$; donc : $a + b = 11$

Par conséquent : $N = 11^2(9a + 1)$

Déterminons les valeurs de a ; tels que : $9a + 1$ est un carré parfait, sachant que : $0 \leq a \leq 9$

• Pour $a = 0$; on trouve $b = 11$ (impossible)

• Pour $a = 7$; on a : $9a + 1 = 64 = 8^2$ et $b = 4$

Et on a : $N = 11^2 \times 82 = (11 \times 8)^2 = 7744$

Donc : il existe un seul couple $(a;b) = (7;4)$; tel que N est un carré parfait

Soit $(x;y)$ un élément de $\mathbb{N}^2$, tel que : $0 \leq x \leq 9$ et $0 \leq y \leq 9$

On a : $n \equiv 0[3] \Leftrightarrow 2 + 6 + x + 9 + 5 + y \equiv 0[3]$

$\Leftrightarrow x + y + 1 \equiv 0[3]$

Et $n \equiv 0[11] \Leftrightarrow -2 + 6 - x + 9 - 5 + y \equiv 0[11]$

$\Leftrightarrow y - x + 8 \equiv 0[11]$

D'où : $\begin{cases} n = 0[3] \\ n \equiv 0[11] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \equiv 2[3] \\ y - x \equiv 3[11] \\ 0 \leq x \leq 9 \text{ et } 0 \leq y \leq 9 \end{cases}$

Et on a : $\begin{cases} x + y \equiv 2[3] \\ y - x \equiv 3[11] \end{cases} \Leftrightarrow (\exists (k,p) \in \mathbb{Z}^2)/\begin{cases} x + y = 3p + 2 \\ y - x = 11k + 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (\exists (k,p) \in \mathbb{Z}^2)/\begin{cases} 2x = 3p - 11k - 1 \\ 2y = 3p + 11k + 5 \end{cases}$

Et puisque : $0 \leq x \leq 9$ et $0 \leq y \leq 9$, alors : $0 \leq x + y \leq 18$ et $-9 \leq y - x \leq 9$

Donc; p et k sont de $\mathbb{Z}$ qui vérifient:

$\begin{cases} 0 \leq 3p + 2 \leq 18 \\ -9 \leq 11k + 3 \leq 9 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} k \in \{-1;0\} \\ p \in \{0;1;2;3;4;5\} \end{cases}$

• Si $k = -1$; alors : $\begin{cases} 2x = 3p + 10 \\ 2y = 3p - 6 \end{cases}$, ainsi : p doit être un nombre pair.

• Pour $p = 0$; on trouve : $y < 0$, une solution à rejeter.

• Pour $p = 2$; on trouve : $x = 8$ et $y = 0$

• Pour $p = 4$; on trouve : $x = 11$, une solution à rejeter.

Dans ce cas : $(x;y) = (8;0)$

• Si $k = 0$; alors $\begin{cases} 2x = 3p - 1 \\ 2y = 3p + 5 \end{cases}$; ainsi p doit être un nombre impair.

• Pour $p = 1$; on trouve $x = 1$ et $y = 4$

• Pour $p = 3$; on trouve $x = 4$ et $y = 7$

• Pour $p = 5$; on trouve $y = 10$ une solution à rejeter.

Dans ce cas : $(x;y) \in \{(1;4),(4;7)\}$

Par conséquent les couples $(x;y)$ demandés sont : $(4;7)$; $(8,0)$ et $(1;4)$

1) Montrons que : $y = 25x - 40z$

On a : $N = \overline{xyz}^7 = x.7^2 + y7 + z = 49x + 7y + z$

Et : $N = \overline{zyx}^9 = z.9^2 + y.9 + x = 81z + 9y + x$

D'où : $49x + 7y + z = 81z + 9y + x$, ainsi $y = 24x - 40z$

2) Déduisons que : $y = 0$

On a d'après la question 1) ; $y = 24x - 40z$; d'où : $y = 8(3x - 5z)$

Donc : y est un multiple de 8 ; et on a : $0 \leq y < 7$; d'où : $y = 0$

3) Déterminons x et z

D'après la question 2) $y = 0$, donc : $24x = 40z$; d'où : $3x = 5z$

On a : $\begin{cases} 3 \mid 5z \\ 3 \wedge 5 = 1 \end{cases}$; d'après le théorème de Gauss : $3 \mid z$; d'où z est un multiple de 3

Et puisque $1 \leq z < 7$; alors : $z = 3$ ou $z = 6$

• Si $z = 6$, alors : $x = 10$ et ceci est impossible, car $0 < x < 7$

Par conséquent $z = 3$ et $x = 5$

4) Déterminons le nombre N dans le système de numération décimal

D'après la question 3) ; on a : $N = \overline{503}^7 = \overline{305}^9$

Déterminons l'écriture de N dans le système de numération décimal

$N = \overline{503}^{7} = 5.7^2 + 3 = 5 \times 49 + 3 = 248$

$N = \overline{305}^{9} = 3.9^2 + 5 = 3 \times 81 + 5 = 248$

Donc : $N = 248$ est l'écriture de N dans le système de numération décimal

Exercice 58

1) Déterminons les restes de la division euclidienne de 3^n par 13, suivant les valeurs de n

On a : $3 \equiv 3[13]$, $3^2 \equiv 9[13]$ et $3^3 \equiv 1[13]$, d'où : $3^{3k} \equiv 1[13]$ pour tout k de $\mathbb{N}$

Donc : le reste de la division euclidienne de 3^n par 13, dépend du reste de la division euclidienne de n par 3

Ainsi : les restes de la division euclidienne de 3^n par 13 sont :

• Le nombre 1 si : $n = 3k$; $k \in \mathbb{N}$

• Le nombre 3 si : $n = 3k+1$; $k \in \mathbb{N}$

• Le nombre 9 si : $n = 3k+2$; $k \in \mathbb{N}$

2) Déterminons l'ensemble (S)

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on a :

• Si $n \equiv 0[3]$ alors : $3^n \equiv 1[13]$, d'où : $A_n \equiv 3[13]$

• Si $n \equiv 1[3]$ alors : $3^n \equiv 3[13]$, d'où : $A_n \equiv 3 + 3^2 + 3^3[13]$ c'est-à-dire $A_n \equiv 0[13]$

• Si $n \equiv 2[3]$ alors : $3^n \equiv 9[13]$ d'où : $A_n \equiv 9 + 9^2 + 9^3[13]$

$A_n \equiv 3^2 + 3^4 + 3^6[13]$; c'est-à-dire $A_n \equiv 9 + 3 + 1[13]$; donc : $A_n \equiv 0[13]$

Par suite : $S = \{3k + 1/k \in \mathbb{N}\} \cup \{3k + 2/k \in \mathbb{N}\}$

3) Les nombres proposés sont-ils divisibles par 13 ?

• On a : $\overline{1110}_{(3)} = 3^3 + 3^2 + 3 = A_3$

Et puisque : $A_3 \equiv 0[13]$; alors : $\overline{1110}_{(3)}$ est divisible par 13

• On a : $\overline{1010100}_{(3)} = 3^6 + 3^4 + 3^2 = A_2$

Et puisque : $A_2 \equiv 0[13]$; alors : $\overline{1010100}_{(3)}$ est divisible par 13

• On a : $\overline{1001001000}_{(3)} = 3^9 + 3^6 + 3^3 = A_3$

Et puisque : $A_3 \equiv 3[13]$; alors : $\overline{1001001000}_{(3)}$ n'est pas divisible par 13

Exercice 59

1) Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (1) : $20x - 9y = 2$

On remarque que le couple $(1;2)$ est une solution de (1)

Soit $(x;y)$ un élément de $\mathbb{Z}^2$; on a :

$$20x - 9y = 2 \iff 20x - 9y = 20 \times 1 - 9 \times 2$$
$$\iff 20(x-1) = 9(y-2)$$

On a : $9 \mid 20(x-y)$ et $20 \wedge 9 = 1$, alors d'après le théorème de Gauss : $9 \mid x-1$

C'est-à-dire : $(\exists k \in \mathbb{Z}) / x = 1 + 9k$; et on remplace on obtient $y = 2 + 20k$; $k \in \mathbb{Z}$

Réciproquement : le couple $(1 + 9k ; 2 + 20k)$; $k \in \mathbb{Z}$ vérifie l'équation (1)

Par conséquent, l'ensemble des solutions de (1)) est :

$S = \{(1+9k ; 2+20k) / k \in \mathbb{Z}\}$

2) Déterminons l'ensemble E

Soit $(x;y)$ un élément de $\mathbb{Z}^2$; tel que : $20x - 9y = 2$

On pose $d = x \wedge y$ avec $d \in \mathbb{N}^*$

On a : $d \mid x$ et $d \mid y$; d'où : $d \mid 20x - 9y$; ainsi $d \mid 2$; et puisque 2 est un nombre premier, alors : $d = 2$ ou $d = 1$

On a : $y = 2 + 20k$; avec $k \in \mathbb{Z}$; d'où : y est un nombre pair

Donc : pour que $d = 2$; il faut et il suffit que x soit pair

C'est-à-dire : $2 \mid 1 + 9k$; donc k est impair, d'où : $(\exists p \in \mathbb{Z}) / k = 2p + 1$

Par conséquent : $(x, y) \in E \iff (\exists p \in \mathbb{Z}) / x = 10 + 18p$ et $y = 22 + 40p$

Ainsi : $E = \{(10 + 18p ; 22 + 40p) / p \in \mathbb{Z}\}$

3) Montrons que : $a + 5$ est un multiple de 4

On a : $N = \overline{ca5}_{(\omega)} = c6^2 + 6a + 5 = 36c + 6a + 5$

Et on a : $N = \overline{bbaa}_{(4)} = b4^3 + b4^2 + a4 + a = 64b + 16b + 4a + a$
$= 80b + 5a$

D'où : $80b + 5a = 36c + 6a + 5$; donc : $a + 5 = 4(20b - 9c)$

Ainsi : $a + 5$ est divisible par 4

• Déterminons a, b et c

On a : $0 \leq a \leq 5$ d'où : $5 \leq a + 5 \leq 8$

Et puisque : $a + 5$ est un multiple de 4 ; alors : $a + 5 = 8$; d'où : $a = 3$

Et on a : $a+5=4(20b-9c)$; alors : $20b-9c=2$

C'est-à-dire : le couple $(b;c)$ est solution de l'équation (1)

Ainsi : $(\exists k\in\mathbb{Z})/\ c=2+20k$, et $b=1+9k$

Et puisque : $0\leq b\leq 3$; alors $0\leq 1+9k\leq 3$, d'où : $-\frac{1}{9}\leq k\leq\frac{2}{9}$

Donc : $k=0$; d'où : $b=1$ et $c=2$

Et on a : $N=\overline{235}_{(6)}=36c+6a+5=95$

D'où : $N=\overline{1133}_{(4)}=80b+5a=95$

Par conséquent : $a=3$; $b=1$ et $c=2$

Exercice 6

1) a) Soit (S) l'ensemble des solutions de l'équation : $3x-8y=0$

On a : $3\wedge 8=1$

Soit (x,y) un élément de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$; on a : $(x,y)\in(S)\Rightarrow 3x=8y$

$\Rightarrow 3|8y$

et $3\wedge 8=1$; d'après le théorème de Gauss : on a : $3|y$; d'où : $(\exists k\in\mathbb{Z})/y=3k$

D'où : $(x,y)\in(S)\Rightarrow 3x=8y$

$\Rightarrow 3x=8\times 3\times k\ /k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow x=8k\ /k\in\mathbb{Z}$

Réciproquement : on a : $3x-8y=3(8k)-8(3k)=k.24-k.24=0$

Donc : $(S)=\{(8k;3k)/k\in\mathbb{Z}\}$

b) Déduction: on a : $(3;1)$ est une solution de l'équation : $3x-8y=1$; d'où :

$3(x-3)-8(y-1)=0$

$3(x-3)-8(y-1)=0\Leftrightarrow x-3=8k$ et $y-1=3k\ /k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=3+8k$ et $y=1+3k\ /\ k\in\mathbb{Z}$

Donc : $(S)=\{(3+8k;1+3k)/k\in\mathbb{Z}\}$

2) Déterminons a ; b et c :

On a : $A=\overline{b0a}_{(8)}\Leftrightarrow A=25b+a$ et $b\neq 0$

et on a: $A=\overline{abc}_{(7)}\Leftrightarrow A=49a+7b+c$ et $a\neq 0$

D'où : $49a+7b+c=25b+a$; c'est-à-dire : $18b-48a=c$; ainsi :

$6(3b-8a)=c$

On a : $0\leq c<7$; donc : $c=0$ ou $c=6$

1er cas . Si $c=0$, alors : $3b-8a=0$; d'où : $(\exists k\in\mathbb{Z})$; $a=3k$ et $b=8k$

Et on a : $0<a<7$ et $0<b<7$; ainsi ce cas n'est pas possible

2ème cas : Si $c = 6$, alors : $3b - 8a = 1$; d'où : $(\exists k \in \mathbb{Z})$; $a = 1 + 3k$

et $b = 3 + 8k$

Et on a : $0 < a < 7$ et $0 < b < 7$; ainsi $0 < 3 + 8k < 7$ et $0 < 1 + 3k < 7$

C'est-à-dire : $k = 0$; ainsi $a = 1$ et $b = 3$

En résumé : $a = 1$; $b = 3$ et $c = 6$

Vérification : $A = \overline{b0a}_{(5)} = 25b + a = 76$

$A = \overline{abc}_{(7)} = 49a + 7b + c = 49 + 21 + 6 = 76$

Exercices de synthèse

Exercice 61

1) Soit a et b deux éléments de $\mathbb{Z}^*$

On pose : $A = 2a + 3b$ et $B = 9a + 5b$

a) Montrer que : $17 | A \iff 17 | B$

b) Montrer que si : $a \wedge b = 1$, alors : $A \wedge B = 1$ ou $A \wedge B = 17$

2) Résoudre dans $(\mathbb{Z}^*)^2$ l'équation : $(E): (2x + 3y)(9x + 5y) = 1156$ et $x \wedge y = 2$

Exercice 62

On considère dans l'ensemble $\mathbb{R}$, l'équation: $(E): x^3 + x^2 + 1 = 0$

1) Soit p et q deux éléments de $\mathbb{Z}^*$

Montrer que : $p \wedge q = 1 \iff p \wedge q^3 = 1$

2) Soit x une solution de l'équaton (E).

On suppose que : $x = \frac{p}{q}$; avec : p et q deux éléments de $\mathbb{Z}^*$ et $p \wedge q = 1$

a- Montrer que p divise q^3.

b- En déduire que : $p = 1$ ou $p = -1$ et que q et $-q$ sont solutions de l'équation (E') où : $(E'): 1 + x + x^3 = 0$

c- Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{Z})$; $n^3 + n + 1 \equiv 1[2]$; que peut-on déduire?

Exercice 63

1) a- Soit x un élément de $\mathbb{Z}$, déterminer le reste de la division euclidienne de x^2 par 5.

b- Montrer que : $(\forall m, n \in \mathbb{Z}^*)$; $(2m^2 + n^2 \equiv 0[5] \Rightarrow m \equiv 0[5]$ et $n \equiv 0[5])$

c- Soit m et n deux éléments de $\mathbb{Z}$; avec : $m \wedge n = 1$

Montrer que : $5 \wedge (2m^2 + n^2) = 1$

2) On considère dans l'ensemble $\mathbb{R}$, l'équation : $(E): 2x^3 + x - 5 = 0$

a- Montrer que l'équation (E) admet une seule solution α, et que : $1 < \alpha < 2$

b- On suppose que : $\alpha = \frac{m}{n}$, avec m et n deux entiers naturels non nuls tels que : $m \wedge n = 1$

i- Vérifier que: $(2m^2 + n^2)m - 5n^3$, puis montrer que : m 5

ii- Déduire que le nombre α n'est pas rationnel.

Exercice 64

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation: $(E): 11x - 24y - 1$

2) On pose : $d = (10^{11} - 1) \wedge (10^{24} - 1)$

a Montrer que :$9|10^{24} - 1$ et $9|10^{11} - 1$

b- Soit le couple $(n;m)$ de $\mathbb{N}^2$ solution de l'équation (E).

Montrer que : $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$

c- En déduire qu'il existe un couple $(M;N)$ de $\mathbb{N}^2$, tel que:

$(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9$; puis déduire la valeur de d.

Exercice 65

1) Montrer que pour tout couple (a,b) de $(\mathbb{Z}^*)^2$:

$$a \wedge b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a \wedge (a + b) = 1 \\ a \wedge b(a + b) = 1 \end{cases}$$

2) On considère l'équation : $(x;y)$ de $(\mathbb{N}^*)^2$ (1) $x(43 - x) = y(x + y)$

Soit $(x;y)$ une solution de (1)

On pose : $x = da$ et $y = db$, avec : $d = x \wedge y$

a- Montrer que : $a(43 - da) = bd(a + b)$

b Montrer que $a|d$; on pose, donc : $d - ac$

c- Montrer que : $c(a^2 + ab + b^2) = 43$; puis déduire que : $c = 1$

d- Déterminer les solutions de l'équation (1)

Exercice 66

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \ ; \ u_0 = 0 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer $u_2; u_3; u_4; u_5$ et u_6

2) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = 2u_n + 1$

b- En déduire le plus grand diviseur commun de deux termes consécutifs de

la suite (u_n).

3) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = 2^n - 1$

b- Déterminer $PGCD(2^n - 1; 2^{n+1} - 1)$

1) a- Vérifier que : $(\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2); u_{n+p} = u_n(1 + u_p) + u_n$

En déduire que : $(\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2); PGCD(u_n; u_p) = PGCD(u_n; u_{n-p})$

b- Soit a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$ et r est le reste de la division euclidienne de a par b.

i) Montrer que: $\begin{cases} PGCD(u_b; u_r) = PGCD(u_a; u_b) \\ PGCD(u_a; u_b) = u_{PGCD(a;b)} \end{cases}$

ii) Calculer $PGCD(u_{2004}; u_{804})$

Exercice 67

I- Soit x un élément de $\mathbb{R}$.

Montrer que le polynôme $x^4 + 4$ s'écrit comme produit de deux trinômes.

II- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.

On pose : $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$, et soit: $d = A \wedge B$

1) Montrer que : $n^4 + 4$ n'est pas premier.

2) On suppose que n est un nombre impair.

a- Montrer que : d divise $4n$.

b- Montrer que d est un nombre impair et que d divise n.

c- Déduire que : $d = 1$.

3) On suppose n est un nombre pair.

a- Montrer que : 4 ne divise pas A.

b- Déduire que : $d = 2p$ où p un nombre impair.

c- En déduire que : p divise n, puis que : $d = 2$.

Exercice 68

Soit n un entier naturel non nul. On note le nombre premier d'ordre n par p_n.

(par exemple : $p_1 = 2$ et $p_2 = 3$ et $p_3 = 5$...)

1) Si: $n \geq 2$, montrer que : $p_n \leq (p_1 \times p_2 \times ... \times p_{n-1}) + 1$

2) a) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}; p_n \leq (p_{n-1})^{n-1} + 1$

b- Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); p_n \leq 2^{2^{n-1}}$

I- 1) Soit n un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$,

a- Montrer que les nombres : $n!+2$; $n!+3$;... et $n!+n$ ne sont pas premiers.

b- En déduire six nombres entiers naturels consécutifs et non premiers.

2) Cas général.

Soit p un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$

Déterminer p entiers naturels consécutifs non premiers.

II- Soit n un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$, p_1, p_2;... ; p_r sont des nombres premiers, distincts deux à deux et plus petits ou égaux à n.

1) On pose : $M = p_1 \times p_2 \times ... \times p_r$

Montrer que les nombres : $M+2$; $M+3$;... ; $M+n$ ne sont pas premiers.

2) a) En déduire six nombres entiers naturels consécutifs et tous non premiers.

b) Comparer ces nombres avec les nombres obtenus dans la question I-2).

Exercice 70

1) Soit p un nombre premier; et $p \geq 5$

Montrer que le nombre p s'écrit sous la forme: $6k+1$ ou $6k+5$; avec $k \in \mathbb{N}$.

2) On considère E l'ensemble des nombres premiers, qui s'écrivent, sous la forme $6k+5$; $k \in \mathbb{N}$

On suppose que E est fini, et soit p le plus grand élément de E.

a- Montrer que le produit de m nombres de la forme $6k+1$ s'écrit sous la forme $6k+1$; avec : $(m \in \mathbb{N})$; $m \geq 2$

b- On pose : $N = (2 \times 3 \times 5 \times ... \times p) - 1$

Montrer qu'il existe un élément q de l'ensemble E qui divise N.

c- En déduire que E est un ensemble infini.

Exercice 71

I- Soit p un nombre premier, tel que : $p \geq 3$; montrer que : $p \equiv 1[4]$ ou $p \equiv 3[4]$

II- Soit E l'ensemble des nombres premiers qui s'écrivent sous la forme $4k+3$; avec: $k \in \mathbb{N}$

On veut montrer que E est un ensemble infini. On pourra utiliser le

raisonnement par l'absurde, en supposant que l'ensemble est fini,

en posant : $E = \{p_1, p_2, ..., p_r\}$

1) Si r est pair, on considère le nombre $a = p_1 p_2 ... p_r + 2$

a- Montrer que : $a \equiv 3[4]$;

b- Montrer que tout diviseur du nombre a n'appartient pas à l'ensemble E.

c- En déduire que : $a \equiv 1[4]$.

2) Si r est un nombre impair, on considère le nombre: $b = p_1 p_2 ... p_r + 4$

a- Montrer que : $b \equiv 3[4]$

b- Montrer que : $b \equiv 1[4]$

3) Déduire de ce qui précède que E est un ensemble infini.

Soit p un nombre premier, tel que : $p \geq 5$

1) Montrer que : $(p-1)(2p-1) \equiv 0[6]$

2) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \left(\sum_{k=0}^{p-1} (n+k)^2\right) \equiv 0[p]$

Exercice 73

1) Soit n un élément de $\mathbb{N}$; tel que : $n > 2$ et $n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i}$ la décomposition en facteurs premiers de n.

Montrer que le nombre de diviseurs positifs de n est :

$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)...(1+\alpha_m)$

2) Application 1: Déterminer deux nombres x et y, tels que : x admet 21 diviseurs, y admet 10 diviseurs et $x \wedge y = 18$.

3) Application 2: Soit a un entier naturel non nul, et admettant exactement 3 diviseurs positifs.

Montrer que a est un carré parfait.

Soit n de $\mathbb{N}$; tel que : $(n > 1)$

1) Soit $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ la décomposition en produit de facteurs premiers de n.

Montrer que le nombre de diviseurs de n est : $\prod_{i=1}^{k} (1+\alpha_i)$

2) Soit n un entier naturel, admettant exactement 9 diviseurs.

Montrer que : $n = a^8$ ou $n = a^2 b^2$ où a et b sont deux nombres premiers distincts.

3) on veut déterminer tous les nombres entiers naturels qui vérifient :

$\begin{cases} (1)\ n \text{ admet exactement 9 diviseurs} \\ (2)\ 39p+1=n \text{ et } p \text{ est un nombre premier} \end{cases}$

a- Montrer que : n ne peut pas s'écrire sous la forme a^8.

b- Montrer que : $p=5$ ou $p=37$; puis déduire les valeurs de n.

Exercice 75 BAC 2020 (session Normale) :

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(D): 7x^3 - 13y = 5$

1) Soit $(x;y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ une so ution de l'équation (D)

a) Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.

b) En déduire que : $x^{12}\equiv 1[13]$

c) Montrer que : $x^3\equiv 10[13]$

d) En déduire que : $x^{12}\equiv 3[13]$

2) Déduire des questions précédentes, que l'équation (D) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

Exercice 76 BAC 2019 (session normale) :

On admet que 2969 (année amazighe actuelle) est un nombre premier.

Soient n et m deux entiers naturels vérifiant : $n^8+m^8\equiv 0[2969]$

1) On suppose dans cette question que 2969 ne divise pas n.

a) En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que :

$$(\exists u\in\mathbb{Z}),\ u\times n\equiv 1[2969]$$

b) En déduire que : $(u\times m)^8\equiv 1[2969]$ et que $(u\times m)^{2968}\equiv -1[2969]$

(On remarque que : $2968=8\times 371$)

c) Montrer que 2969 ne divise pas $u\times m$.

d) En déduire qu'on a aussi $(u\times m)^{2968}\equiv -1[2969]$

2) a) En utilisant les résultats précédents, montrer que 2969 divise n.

b) Montrer que : $n^8+m^8\equiv 0[2969]\Longleftrightarrow n\equiv 0[2969]$ et $m\equiv 0[2969]$

Exercice 77 BAC 2018 (session normale) :

Soit p un nombre premier tel que : $p=3+4k$ où $(k\in\mathbb{N}^*)$.

1) Montrer que pour tout entier relatif x, si $x^2\equiv 1[p]$ alors $x^{p-5}\equiv 1[p]$

2) Soit x un entier relatif vérifiant : $x^{p-5}\equiv 1[p]$

a) Montrer que x et p sont premiers entre eux.

b) Montrer que : $x^{p-1} \equiv 1[p]$

c) Vérifier que : $2+(k-1)(p-1)=k(p-5)$

d) En déduire que : $x^2 \equiv 1[p]$

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^{62} \equiv 1[67]$

Exercice 78 BAC 2017 (session normale) :

On admet que le nombre 2017 est premier et que : $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$

Soit p un nombre premier tel que : $p \geq 5$

1) Soit le couple $(x;y)$ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que : $px + y^{p-1} = 2017$

a) Vérifier que : $p < 2017$

b) Montrer que p ne divise pas y.

c) Montrer que $y^{p-1} \equiv 1[p]$ et en déduire que p divise 2016.

d) Montrer que : $p = 7$

2) Déterminer, suivant les valeurs de p, les couples $(x;y)$ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant : $px + y^{p-1} = 2017$

Exercice 79 BAC 2016 (session normale) :

Première partie :

Soit $(a;b)$ un élément de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que le nombre premier 173 divise a^3+b^3.

1) Montrer que : $a^{171} \equiv -b^{171}[173]$ (Remarquer que : $171 = 3 \times 57$)

2) Montrer que : 173 divise a si et seulement si 173 divise b.

3) On suppose que 173 divise a, montrer que 173 divise $(a+b)$.

4) On suppose que 173 ne divise pas a.

a) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que : $a^{172} \equiv b^{172}[173]$

b) Montrer que : $a^{171}(a+b) \equiv 0[173]$

c) En déduire que 173 divise $(a+b)$.

Deuxième partie :

On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation suivante : (E): $x^3 + y^3 = 173(xy+1)$

Soit $(x;y)$ un élément de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ solution de (E), on pose : $x + y = 173k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$

1) Vérifier que : $k(x-y)^2 + (k-1)xy = 1$

2) Montrer que $k = 1$ puis résoudre l'équation (E).

Exercice 80 **BAC 2015 (session normale) :**

Soit x un nombre entier relatif tel que : $x^{1439} \equiv 1436[2015]$

1) Sachant que : $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$, montrer que 1436 et 2015 sont premiers entre eux.

2) Soit d un diviseur commun de x et 2015.

a) Montrer que d divise 1436.

b) En déduire que : $x \wedge 2015 = 1$

3) a) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que : $x^{1440} \equiv 1[5]$ et $x^{1440} \equiv 1[13]$ et $x^{1440} \equiv 1[31]$ (Remarquer que : $2015 = 5 \times 13 \times 31$)

b) Montrer que : $x^{1440} \equiv 1[65]$ puis que : $x^{1440} \equiv 1[2015]$

4) Montrer que : $x \equiv 1051[2015]$

Exercice 81 **BAC 2015 (session rattrapage) :**

I/ 1) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que si a et 13 sont premiers entre eux, alors : $a^{2016} \equiv 1[13]$

2) On considère dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $x^{2015} \equiv 2[13]$.

Soit x une solution de (E).

a) Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.

b) Montrer que : $x \equiv 7[13]$

3) Montrer que l'ensemble de solutions de l'équation (E) est :

$$S = \{7 + 13k / k \in \mathbb{Z}\}$$

II/ Une urne U contient 50 boules numérotées de 1 à 50 et indiscernables au toucher

1) On tire au hasard une boule de l'urne.

Quelle est la probabilité que le numéro de la boule tirée soit solution de l'équation (E) ?

2) On tire au hasard une boule de l'urne, on marque son numéro puis on la remet dans l'urne. On répète trois fois cette expérience.

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois une boule dont le numéro est solution de l'équation (E) ?

Exercice 82 **BAC 2014 (session normale) :**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = \underbrace{333...31}_{n \text{ fois}}$ (n fois le chiffre 3)

1) Vérifier que les deux nombres a et a_2 sont premiers.

2) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $3a_n + 7 = 10^{n+1}$

3) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$: $10^{30k+2} \equiv 7\,[31]$

4) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$: $3a_{30k+} \equiv 0\,[31]$, puis en déduire que 31 divise a_{30k+1}

5) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $n \equiv 1\,[30]$ alors l'équation $a_n x + 31y = 1$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{N}^2$.

Exercice 83 **BAC 2013 (session normale) :**

L'objectif de l'exercice est de déterminer les entiers naturels n strictement supérieurs à 1 et qui vérifient la propriété suivante : (R): $3^n - 2^n \equiv 0\,[n]$

1) On suppose que n vérifie la propriété (R) et soit p le plus petit diviseur premier positif de n.

a) Montrer que : $3^n - 2^n \equiv 0\,[p]$, en déduire que $p \geq 5$

b) Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1\,[p]$ et $3^{p-1} \equiv 1\,[p]$

c) Montrer qu'il existe un couple $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $an - b(p-1) - 1$

d) Soient r et q respectivement le reste et le quotient de la division euclidienne de a par $p-1$.

($a = q(p-1) + r$ avec $0 \leq r < p-1$ et $q \in \mathbb{Z}$)

Montrer qu'il existe un entier naturel k tel que : $nr = 1 + k(p-1)$

2) En déduire de tout ce qui précède qu'il n'existe pas d'entier naturel n strictement supérieur à 1 vérifiant (R).

Exercice 84 **BAC 2012 (session normale) :**

Dans $\mathbb{Z}^2$, on considère l'équation : $143x - 195y = 52$

1) a. Déterminer le plus grand commun diviseur de 195 et 143.

En déduire que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

b. Sachant que $(-1,-1)$ est une solution particulière de l'équation (E), trouver toutes les solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

2) Soit n un nombre entier naturel non nul premier avec 5.

Montrer que pour tout nombre entier naturel k : $n^{4k} \equiv 1[5]$

3) Soit x et y deux nombres entiers naturels non nuls tels que: $x \equiv y[4]$

a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $n^x \equiv n^y[5]$

b. En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $n^x = n^y[10]$

4) Soit x et y deux nombres entiers naturels non nuls tels que le couple (x,y) soit solution de l'équation (E)

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les nombres n^x ont le même chiffre d'unités dans le système de numérotation décimale.

Exercice 85 **BAC 2012 (session rattrapage) :**

1) a. Vérifier que 503 est un nombre premier.

b. Montrer que $7^{502} \equiv 1[503]$ puis en déduire que $7^{2008} \equiv 1[503]$

2) On considère dans $\mathbb{Z}^2$,l'équation : $49x - 6y = 1 \qquad (E)$

Sachant que (1,8) est une solution particulière de (E) , résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E). (On donnera toutes les étapes de la résolution).

3) On pose: $N = 1 + 7 + 7^2 + ... + 7^{2007}$

a) Montrer que $(7^{2006}; N)$ est une solution de l'équation (E)

b) Montrer que $N \equiv 0[4]$ et $N \equiv 0[503]$

c) En déduire que N est divisible par 2012.

Exercice 86 **BAC 2011 (session normale) :**

Soit N le nombre entier naturel dont l'écriture dans le système décimal est.

$N = \underbrace{111...11}_{2010 \text{ fois}}$

1) Montrer que le nombre N est divisible par 11

2) a Vérifier que le nombre 2011 est premier et que: $10^{2010} - 1 = 9N$

b- Montrer que le nombre 2011 divise le nombre $9N$

c- En déduire que le nombre 2011 divise le nombre N

3) Monter que le nombre N est divisible par 22121

Info: Critère de divisibilité par 11

Soit $N = a_n a_{n-1} ... a_1 a_0$ un entier naturel écrit en système décimal (en base 10) ; il contient $(n+1)$ chiffres.

$N = a_0 + a_1 \times 10 + a_2 \times 10^2 + ... + a_n \times 10^2$

On a: $N \equiv a_0 - a_1 + a_2(-1)^2 + ... + a_n(-1)^n \ [11]$

$N \equiv a_0(-1)^0 + (-1)^1 a_1 + (-1)^2 a_2 + ... + a_n(-1)^n \ [11]$

$N \equiv a_0 - a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}(-1)^{n-1} + a_n(-1)^n \ [11]$

Donc: $11/N$ si et seulement $11/a_0 - a_1 + a_2 + ... + a_n(-1)^n$

Exercice 87 **BAC 2011 (session rattrapage) :**

Soit x un nombre entier naturel tel que: $10^x = 2\,[19]$

1) a) vérifier que: $10^{x+1} \equiv 1\,[19]$

b) Montrer que: $10^{18} \equiv 1\,[19]$

2) Soit d le plus grand diviseur commun des deux nombres 18 et $x+1$

a) Montrer que: $10^d \equiv 1\,[19]$

b) Montrer que: $d = 18$

c) En déduire que: $x \equiv 17\,[18]$

Exercice 88 **BAC 2010 (session Normale) :**

1) Déterminer les nombres entiers naturels m tels que: $m^2 + 1 = 0\,[5]$

2) Soit p un nombre premier tel que: $p = 3 + 4k$ où $k \in \mathbb{N}$ et soit n un nombre entier naturel tel que: $n^2 + 1 \equiv 0\,[p]$

a) Vérifier que: $(n^2)^{1+2k} \equiv -1\,[p]$

b) Montrer que les nombres n et p sont premiers entre eux.

c) En déduire que: $(n^2)^{1+2k} \equiv 1\,[p]$

d) En déduire , de ce qui précède , qu'il n'existe pas un nombre entier naturel n qui vérifie: $n^2 + 1 \equiv 0\,[p]$

Solutions

1) a) Montrons que : $17|A \iff 17|B$

Méthode (1)

On a : $17|A \iff 2a + 3b \equiv 0[17]$

$\iff 3b \equiv -2a[17]$

$\iff 3b \equiv 15a[17]$

$\iff b \equiv 5a[17]$ $(3 \wedge 17 = 1)$

Et on a: $17|B \iff 9a + 5b \equiv 0[17]$

$\iff 5b \equiv -9a[17]$

$\iff 5b \equiv 25a[17]$

$\iff b \equiv 5a[17](5 \wedge 17 = 1)$

Ainsi on a: $17|A \iff 17|b - 5a$

$\iff 17\ B$

Donc : $17|A \iff 17|B$

Méthode (2)

On a : $B + 4A = 9a + 5b + 8a + 12b = 17a + 17b = 17(a + b)$

C'est-à-dire : $17|B + 4A$

* Si $17|A$ alors : $17|4A$

D'où; on a : $\begin{cases} 17|4A \\ 17|B + 4A \end{cases} \Rightarrow 17|B$

Donc : $17|A \Rightarrow 17|B$

* Si $17|B$, alors : on a : $\begin{cases} 17|B \\ 17|B + 4A \end{cases} \Rightarrow 17|4A$

Ainsi : $17\ 4A$ et $4 \wedge 17 = 1$; d'après le théorème de GAUSS; On a : $17\ A$

Donc : $17|B \Rightarrow 17|A$

Par conséquent : $17|A \iff 17|B$

b- Montrons que si : $a \wedge b = 1$, alors : $A \wedge B = 1$ ou $A \wedge B = 17$

Soit : $d = A \wedge B$, avec : $d \in \mathbb{N}^*$

On a : $\begin{cases} d|A \\ d\ B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|2a + 3b \\ d|9a + 5b \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} d|10a + 15b \\ d|27a + 15b \end{cases}$ et $\begin{cases} d|18a + 27b \\ d|18a + 10b \end{cases}$

$\Rightarrow d|17b$ et $d|17a$

Donc : $d|17a \wedge 17b$

On a : $17a \wedge 17b = 17(a \wedge b) = 17$ (car : $a \wedge b = 1$)

Ainsi : $d|17$ et 17 est un nombre premier et $d \in \mathbb{N}^*$

Donc : $d = 1$ ou $d = 17$

D'où : $a \wedge b = 1 \Rightarrow (A \wedge B = 17$ ou $A \wedge B = 1)$

2) Résolvons dans $(\mathbb{Z}^*)^2$ l'équation (E):

Soit $(x; y)$ un élément de $(\mathbb{Z}^*)^2$; et qui vérifie l'équation (E)

On a : $x \wedge y = 2 \iff (\exists a, b \in \mathbb{Z}^*) / x = 2a$; $y = 2b$ et $a \wedge b = 1$

Donc : $(2x + 3y)(9x + 5y) = 1156 \iff (2a + 3b)(9a + 5b) = 289$

Ainsi, l'équation (E) devient : $(2a + 3b)(9a + 5b) = 17^2$; $a \wedge b = 1$; $x = 2a$ et $y = 2b$

Et d'après la question 1)b) on a :

$$\begin{cases} (2a+3b)(9a+5b) = 17^2 \\ (2a+3b) \wedge (9a+5b) = 1 \\ x = 2a \text{ et } y = 2b \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} (2a+3b)(9a+5b) = 17^2 \\ (2a+3b) \wedge (9a+5b) = 17 \\ x = 2a \text{ et } y = 2b \end{cases}$$

D'après la question 1 a); on a : $\begin{cases} 2a + 3b = 17 \\ 9a + 5b = 17 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2a + 3b = -17 \\ 9a + 5b = -17 \end{cases}$

$$\{x = 2a \text{ et } y = 2b \text{ ou } \{x = 2a \text{ et } y = 2b$$

En résolvant les systèmes précédents on obtient les couples :

$(a;b) = (2;-7)$ ou $(a;b) = (-2;7)$

Par conséquent l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$S = \{(4,-14),(-4,14)\}$

Exercice 62

1) Montrons que : $p \wedge q = 1 \iff p \wedge q^3 = 1$

* Si on a : $p \wedge q = 1$, alors d'après le théorème de BEZOUT

$(\exists u, v \in \mathbb{Z}) / up + vq^3 = 1$

D'où : $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{Z}) / \alpha p + \beta q = 1$ avec : $\alpha = u$ et $\beta = vq^2$

Donc : $p \wedge q = 1$, selon le théorème de BEZOUT.

* Si on a : $p \wedge q = 1$

Méthode (1): En utilisant : $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Rightarrow a \wedge bc = 1$

On a : $p \wedge q^2 = 1$; d'où : $p \wedge q^3 = 1$

Méthode (2); on pose : $d \in \mathbb{N}^*$; $d = p \wedge q^3$

On a : $\begin{cases} d|p \\ d|q^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|p^3 \\ d|q^3 \end{cases}$

$\Rightarrow d|p^3 \wedge q^3$

Et puisque : $p \wedge q = 1$, alors : $p^3 \wedge q^3 = 1$

D'où : $d|1$ et $d = 1$ car $d \in \mathbb{N}^*$

Méthode (3): On pose : $d \in \mathbb{N}^*$ $d = p \wedge q^3$

On suppose que : $d \neq 1$, d'où il existe un nombre r premier positif, tel que : $r|d$

Et puisque : $d|p$ et $d|q^3$ alors : $r|p$ et $r|q^3$

On a : r premier et $r|q^3$; donc : $r|q$; d'où : $r|p \wedge q$

Et puisque : $p \wedge q = 1$ alors : $r|1$; d'où : $r = 1$, et ceci est impossible car 1 n'est pas premier, par suite : $d = 1$

Méthode (4)

On a : $(\exists u, v \in \mathbb{Z}) / up + vq = 1$

D'où : $(up + vq)^3 = 1$; c'est-à-dire : $u^3p^3 + v^3q^3 + 3uvpq(up + vq) = 1$

Ainsi : $p(u^3p^2 + 3uvq(up + vq)) + v^3q^3 = 1$

Ainsi : $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{Z}) / \alpha p + \beta q^3 = 1$

D'où : $p \wedge q^3 = 1$

2) a- Montrons que p divise q^3 :

On a : $x = \frac{p}{q}$ est une solution de l'équation (E);

C'est à dire : $\frac{p^3}{q^3} + \frac{p^2}{q^2} + 1 = 0$; d'où : (1): $p^3 + qp^2 + q^3 = 0$

Donc : $q^3 = p(-p^2 - qp)$; par suite : p divise q^3.

b- Déduction :

* Puisque : $p|q^3$, alors : $p \wedge q^3 = |p|$

Et on a : $p \wedge q = 1$, donc : $p \wedge q^3 = 1$

Ainsi : $|p = 1$, c'est-à-dire : $p = 1$ ou $p = -1$

* Si $p = 1$, alors : l'égalité (1), s'écrit : $1 + q + q^3 = 0$

Donc : le nombre q est solution de l'équation (E').

* Si $p = -1$, alors : l'égalité (1), s'écrit : $-1 + q + q^3 = 0$

C'est-à-dire : $1 + (-q) + (-q)^3 = 0$

D'où : $-q$ est une solution de l'équation (E').

Donc : les nombres q et $-q$ sont deux solutions de l'équation (E')

c- * Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n^3 + n + 1 \equiv 1[2]$

Soit n un élément de $\mathbb{Z}$;

On a : $n \equiv 0[2]$ ou $n \equiv 1[2]$

Et on a : $n^3 + n = n(n^2 + 1)$

Si : $n \equiv 0[2]$ alors : $n(n^2 + 1) \equiv 0[2]$, d'où : $n^3 + n + 1 \equiv 1[2]$

Si : $n \equiv 1[2]$ alors : $n^2 + 1 \equiv 0[2]$; d'où : $n(n^2 + 1) \equiv 0[2]$, donc : $n^3 + n + 1 \equiv 1[2]$

Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{Z})\ ; n^3 + n + 1 \equiv 1[2]$

* Déduction :

On a : $(\forall n \in \mathbb{Z})\ ; n^3 + n + 1 \equiv 1[2]$

Donc les solutions de l'équation (E') dans $\mathbb{Z}$ n'existent pas; et ceci en contradiction avec le fait que q et q sont dans $\mathbb{Z}$ et solutions de (E').

Par suite notre hypothèse : $x = \frac{p}{q}$ solution de (E) avec : $p \wedge q = 1$ et p et q sont des éléments de $\mathbb{Z}$ est fausse.

Par conséquent l'équation (E) n'a pas de solutions dans $\mathbb{Q}$.

[redacted]

a) Déterminons le reste de la division euclidienne de x^2 par 5.

Soit r le reste de la division euclidienne du nombre x par 5.

Puisque : $x \equiv r[5]$ et $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Alors : $x^2 = r^2[5]$ et $r^2 \in \{0, 1, 4, 9, 16\}$

Et on a : $9 \equiv 4[5]$ et $16 \equiv 1[5]$

Donc : le reste de la division euclidienne de x^2 par 5 peut être soit 0; 1 ou 4

b) Soit m et n de $\mathbb{Z}$, montrons que :

$5m^2 + n^2 \equiv 0[5] \Rightarrow m \equiv 0[5]$ et $n \equiv 0[5]$

On a : $m^2 \equiv r[5]$, où : $r \in \{0, 1, 4\}$ et $8 \equiv 3[5]$

Donc : $2m^2 \equiv k[5]$, avec : $k \in \{0, 2, 3\}$

Ainsi : $n^2 \equiv k'[5]$, avec : $k' \in \{0, 1, 4\}$

Je propose le tableau suivant, pour déterminer le reste de la division euclidienne du nombre $2m^2 + n^2$ par 5:

$2m^2$ \ n^2	0	1	4
0	0	1	4
2	2	3	1
3	3	4	2

On remarque, d'après le tableau que : $2m^2 + n^2 = 0[5]$ dans le seul cas où: $n^2 \equiv 0[5]$ et $2m^2 \equiv 0[5]$

Donc : $n^2 \equiv 0[5]$ équivaut $n \equiv 0[5]$ (car 5 est premier)

Ainsi : $2m^2 \equiv 0[5]$ équivaut $m \equiv 0[5]$ (car 5 est premier et $2 \wedge 5 = 1$)

Par suite : $2m^2 + n^2 \equiv 0[5] \Rightarrow n \equiv 0[5]$ et $m \equiv 0[5]$

c) Soit m et n de $\mathbb{Z}^*$, tels que : $m \wedge n = 1$

Montrons que $(2m^2 + n^2) \wedge 5 = 1$:

On a : $m \wedge n = 1$; d'où : 5 ne divise pas m et n simultanément, c'est-à-dire : $m \not\equiv 0[5]$ ou $n \not\equiv 0[5]$ d'après la question b) $2m^2 + n^2 \not\equiv 0[5]$ (par contraposée)

Donc : 5 ne divise pas $2m^2 + n^2$ et 5 est premier, d'où: $(2m^2 + n^2) \wedge 5 = 1$

2° a) Montrons que l'équation (E) admet une seule solution α de $\mathbb{R}$, et que : $1 < \alpha < 2$:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = 2x^3 + x - 5$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = 6x^2 + 1$

Ainsi : la fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R})$ et $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Et puisque : $0 \in \mathbb{R}$; alors il existe un seul réel α; tel que : $f(\alpha) = 0$

Et on a : $f(1) = -2$ et $f(2) = 13$; d'où : $f(1) < 0 < f(2)$

Et par suite l'équation (E) admet une seule solution α et que: $1 < \alpha < 2$

b) i) * Vérifions que : $(2m^2 + n^2)m = 5n^3$

On a : $f(\alpha) = 0 \iff 2\alpha^3 + \alpha - 5 = 0$

$$\iff 2\left(\frac{m}{n}\right)^3 + \frac{m}{n} = 5$$

$$\iff 2m^3 + mn^2 = 5n^3$$

D'où : $(2m^2 + n^2)m = 5n^3$

* Montrons que : $m = 5$

Et puisque : $(2m^2 + n^2)m$ — $5n^3$; d'où : m divise $5n^3$

Et on a : $m \wedge n = 1$, d'où : $m \wedge n^3 = 1$

D'après le théorème de GAUSS; m divise 5.

Et on a : 5 divise $(2m^2 + n^2)m$, et puisque : $5 \wedge (2m^2 + n^2) = 1$

D'où : 5 divise m, d'après le théorème de GAUSS : $m = 5$

ii) Déduction:

On suppose que : α est un nombre rationnel, avec $\alpha - \frac{m}{n}$, $m \wedge n - 1$ et $m,n \in \mathbb{N}^*$

D'après la question i), on a : $m - 5$ d'où : $\alpha = \frac{5}{n}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et puisque : $1 < \alpha < 2$ alors : $1 < \frac{5}{n} < 2$; ainsi : $\frac{5}{2} < n < 5$

Donc : n 3 ou n 4; on a : α $\frac{5}{3}$ ou α $\frac{5}{4}$ et on a: $f\left(\frac{5}{3}\right) \neq 0$ et $f\left(\frac{5}{4}\right) \neq 0$

C'est-à-dire : $\frac{5}{3}$ et $\frac{5}{4}$ ne sont pas solutions de (E); donc : α n'est pas un nombre rationnel.

1) Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation: (E): $11x - 24y = 1$

On a : $24 = 2 \times 11 + 2$ et $11 = 2 \times 5 + 1$

Donc : $1 = 11 - 5 \times 2 = 11 - 5 \times (24 - 2 \times 11) = 11 \times 11 - 5 \times 24$

Ainsi, le couple $(11;5)$ est une solution particulière de l'équation (E).

Soit $(x;y)$ un élément de $\mathbb{Z}^2$; on a :

$$11x - 24y = 1 \iff 11x - 24y = 11 \times 11 - 5 \times 24$$
$$\iff 11(x - 11) = 24(y - 5)$$

Donc : $24 | 11(x - 11)$; et puisque : $24 \wedge 11 - 1$, alors d'après le théorème de GAUSS: $24 | x - 11$

C'est-à-dire : $(\exists k \in \mathbb{Z}) / x = 11 + 24k$; d'où : $y = 5 + 11k$

Réciproquement : on vérifie que tout couple de la forme $(11 + 24k;5 + 11k)$; avec $k \in \mathbb{Z}$ est une solution de (E).

Donc : l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$S = \{(11 + 24k, 5 + 11k) / k \in \mathbb{Z}\}$

2) a) Montrons que : $9 \mid 10^{24} - 1$ et $9 | 10^{11} - 1$

On a : $10 \equiv 1[9]$; donc : $10^{24} \equiv 1[9]$ et $10^{11} \equiv 1[9]$

C'est-à-dire : $10^{24} - 1 \equiv 0[9]$ et $10^{11} - 1 \equiv 0[9]$

D'où : $9|10^{24} - 1$ et $9|10^{11} - 1$

b) Montrons que : $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$ où $(n;m)$ est une solution de (E).

On a : $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 10^{11n} - 1 - 10 \times 10^{24m} + 10$

$= 10^{11n} - 10 \times 10^{24m} + 9$

$= 10^{11n} - 10^{24m+1} + 9$

Et puisque : $11n - 24m = 1$; alors : $11n = 24m + 1$

D'où : $10^{11n} = 10^{24m+1}$ c'est-à-dire : $10^{11n} - 10^{24m+1} = 0$

Donc : $10^{11n} - 10^{24m+1} + 9 = 9$; ainsi : $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$

c) * Déduction

On a : $10^{24} - 1 \equiv 0[10^{24} - 1]$ donc : $10^{24} \equiv 1[10^{24} - 1]$

Ainsi : $10^{24m} \equiv 1[10^{24} - 1]$; d'où : $10^{24m} - 1 \equiv 0[10^{24} - 1]$

Donc : $10^{24} - 1 | 10^{24m} - 1$

De même; on trouve : $10^{11} - 1 | 10^{11n} - 1$

On peut retrouver ce résultat autrement :

$10^{11n} - 1 = (10^{11})^n - 1$

$= (10^{11} - 1)(1 + (10^{11}) + (10^{11})^2 + \ldots + (10^{11})^{n-1})$

$= (10^{11} - 1)\sum_{k=0}^{n-1} 10^{11k}$

Donc : $10^{11} - 1 | 10^{11n}$ et $10^{24} - 1 | 10^{24m} - 1$

Ainsi : $(\exists (p,q) \in \mathbb{N}^2) / \begin{cases} 10^{11n} - 1 = p(10^{11} - 1) \\ 10^{24m} - 1 = q(10^{24} - 1) \end{cases}$

Et on a : $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$

Donc : $p(10^{11} - 1) - 10q(10^{24} - 1) = 9$

On prend : $N = p$ et $M = 10q$

On a alors : $(\exists (M,N) \in \mathbb{N}^2) | (10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9$

* Déterminons la valeur de d :

On a : $d = (10^{11} - 1) \wedge (10^{24} - 1)$

D'où : $d | (10^{11} - 1)$ et $d | 10^{24} - 1$

Donc $d|(10^{11}-1)N-(10^{24}-1)M$ c'est-à-dire : $d|9$

On a d'après la question 2° a) $9|10^{11}-1$ et $9|10^{24}-1$

D'où : $9|(10^{11}\quad 1)\wedge(10^{24}\quad 1)$; donc : $9|d$

Par suite : $d=9$

Ex 10

1) • Montrons que : $\left(\forall(a;b)\in(\mathbb{Z}^*)^2\right);a\wedge b=1\Rightarrow a\wedge(a+b)=1$

On pose : $d=a\wedge(a+b)$

On a : $\begin{cases}d|a\\d|a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d|a\\d|(a+b)-a\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}d|a\\d|b\end{cases}$

$\Rightarrow d|a\wedge b$

$\Rightarrow d|1$

$\Rightarrow d=1$

Donc : $\left(\forall(a;b)\in(\mathbb{Z}^*)^2\right),a\wedge b=1\Rightarrow a\wedge(a+b)=1$

• Montrons que : $\left(\forall(a;b)\in(\mathbb{Z}^*)^2\right);a\wedge b=1\Rightarrow a\wedge b(a+b)=1$

Méthode 1:

On pose : $\delta=a\wedge b(a+b)$

On a : $\begin{cases}\delta|a\\\delta|b(a+b)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\delta|ab\\\delta|b^2+ab\\\delta|a^2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}\delta|a^2\\\delta|b^2\end{cases}$

$\Rightarrow\delta|a^2\wedge b^2$

$\Rightarrow\delta|(a\wedge b)^2$

$\Rightarrow\delta|1$

$\Rightarrow\delta=1$

Donc : $\left(\forall(a;b)\in(\mathbb{Z}^*)^2\right);a\wedge b=1\Rightarrow a\wedge b(a+b)=1$

Méthode 2:

On a: $\begin{cases}a\wedge b=1\\a\wedge(a+b)=1\end{cases}$ (d'après ce qui précède)

donc: $a\wedge b(a+b)=1$

-2 a) Montrons que : $a(43-da)=bd(a+b)$

On a : $x(43-x)=y(x+y) \Rightarrow da(43-da)=db(da+db)$

$\Rightarrow a(43-da)=bd(a+b)$

Donc : $a(43-da)=bd(a+b)$

b) Montrons que : $a|d$

On a : $d=x\wedge y$; $x=ad$ et $y=bd$; donc: $a\wedge b=1$

D'où : $a(43-da)=d.b(a+b) \Rightarrow a|db(a+b)$

D'après la question 1) on a: $a\wedge b(a+b)=1$ d'après le théorème de GAUSS

$a|d$, d'où : $a|d$, par suite : $(\exists c\in\mathbb{N})\,;d=ac$

c) Montrons que : $c(a^2+ab+b^2)=43$

On a : $d=ac$

D'où : $a(43-da)=bd(a+b) \Rightarrow a(43-a^2c)=abc(a+b)$

$\Rightarrow 43=bc(a+b)+a^2c$ (car $(a\in\mathbb{N}^*)$

$\Rightarrow 43=c(a^2+ab+b^2)$

* Déduisons que : $c=1$

On a : 43 est un nombre premier, donc : $c=1$ ou $c=43$

Si on suppose que : $c=43$; on a, alors : $a^2+ab+b^2=1$

Et puisque: $a\in\mathbb{N}^*$ et $b\in\mathbb{N}^*$, alors : $a^2+ab+b^2\geq 3$

Ainsi le cas : $c=43$ n'est pas possible; par conséquent . $c=1$

d- Déterminons les solutions de (1):

D'après ce qui précède, on a : $a^2+ab+b^2=43$ et $a\wedge b=1$

D'où : $(a=6$ et $b=1)$ ou $(a=1$ et $b=6)$

Et on a : $d=ac$ et $c=1$ donc : $(x=36$ et $y=6)$ ou $(x=1$ et $y=6)$

Conclusion : $(36,6)$ et $(1,6)$ sont les solutions de l'équation (1)

1) Calculons u_2; u_3; u_4; u_5 et u_6 :

On a : • $u_2=3u_1-2u_0=3$ • $u_3=3u_2-2u_1=7$

• $u_4=3u_3-2u_2=15$ • $u_5=3u_4-2u_3=31$

• $u_6=3u_5-2u_4=63$

2) a- Montrons que : $(\forall n\in\mathbb{N})\,,\ u_{n+1}-2u_n+1$

On utilise le raisonnement par récurrence :

• Initialisation : Pour $n=0$; on a : $u_1=1=2\times 0+1=2u_0+1$

Donc : la propriété est vraie pour $n=0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$;

on suppose que : $u_{n+1} = 2u_n + 1$, et on montre que : $u_{n+1} = 2u_{n+1} + 1$

On a : $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n = 3u_{n+1} - 2\left(\frac{u_{n+1} - 1}{2}\right)$

$= 3u_{n+1} - u_{n+1} + 1 = 2u_{n+1} + 1$

Donc la propriété est vraie pour $n+1$.

D'après, le principe de récurrence: $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n = 2u_n + 1$

b- Déduisons $u_{n+1} \wedge u_n$ avec $n \in \mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = 2u_n + 1$; d'où : $u_{n+1} - 2u_n = 1$

D'après le théorème de Bezout, on en déduit que : $u_{n+1} \wedge u_n = 1$

3) a- Montrons que : $(\forall n \in)$; $u_n = 2^n - 1$

On utilise le raisonnement par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 0$; on a : $u_0 = 0$ et $2^0 - 1 = 0$

Donc : la propriété est vraie pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose que: $u_n = 2^n - 1$ et on montre que : $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

On a : $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$

Donc : la propriété est vraie pour $n+1$.

Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = 2^n - 1$

b- Déterminons $PGCD(2^{n+1} - 1; 2^n - 1)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $u_n = 2^n - 1$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

D'après la question 2) b); on a : $PGCD(u_n; u_{n+1}) = 1$

Donc : $PGCD(2^{n+1} - 1; 2^n - 1) = 1$

4) a- Vérifions que : $(\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2)$; $u_{n+p} = u_n(1 + u_p) + u_p$

Soit n et p de $\mathbb{N}$, on a:

$u_n(1 + u_p) + u_p = u_n + u_n u_p + u_p$

$= 2^n - 1 + (2^n - 1)(2^p - 1) + 2^p - 1$

$= 2^n - 1 + 2^{n+p} - 2^n - 2^p + 1 + 2^p - 1$

$= 2^{n+p} - 1$

$= u_{n+p}$

Donc : $(\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2)$; $u_{n+p} = u_n(1 + u_p) + u_p$

* Deduction :

-Soit n et p de $\mathbb{N}$, tels que : $n > p$

On a : $0 \leq u_p < u_n$ (car (u_n) est croissante et positive)

D'où : u_n est le reste de la division euclidienne de u_{n+p} par u_n.

Donc : $PGCD(u_{n+p};u_n) = PGCD(u_n;u_p)$

-Si $n < p$; alors on peut écrire : $u_{n+p} = u_p(1+u_n)+u_n$

et on utilise le même raisonnement.

-Si $n = p$ alors : $u_{n+p} = u_n(2+u_n)$

Ainsi : $PGCD(u_{n+p};u_n) = u_n = PGCD(u_n;u_p)$

Donc : $(\forall (n;p) \in \mathbb{N}^2)$; $PGCD(u_{n+p};u_n) = PGCD(u_n;u_p)$

b- i)• Montrons que : $PGCD(u_b;u_r) = PGCD(u_a;u_b)$

On a : r est le reste de la division euclidienne de a par le nombre b.

Soit q le quotient de cette division euclidienne; on a: $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$

En utilisant: $(\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2)$; $PGCD(u_n;u_p) = PGCD(u_n;u_{n+p})$

On a : $u_b \wedge u_r = u_b \wedge u_{b+r} = u_b \wedge u_{2b+r} = \ldots = u_b \wedge u_{bq+r} = u_b \wedge u_a$

Donc : $PGCD(u_a;u_r) = PGCD(u_a;u_b)$

• En utilisant : $PGCD(u_a;u_b) = PGCD(u_r;u_b) = \ldots = PGCD(u_{r_n};u_0)$

où r_n est le dernier reste non nul, par la méthode des divisions successives du nombre a sur b; c'est-à-dire du nombre a sur b.

Ainsi : $r_n = PGCD(a;b)$

Et puisque : $u_0 = 0$ alors : $PGCD(u_n;0) = u_n$

Par conséquent : $PGCD(u_a;u_b) = u_{r_n} = u_{PGCD(a;b)}$

ii) Calculons $PGCD(u_{2004};u_{804})$

D'après ce qui précède; on a : $u_{2004} \wedge u_{804} = u_{PGCD(2004;804)} = u_{12}$

car: $PGCD(2004;804) = 12$ et $u_{12} = 2^{12} - 1 = 4095$

Donc: $u_{2004} \wedge u_{804} = 4095$.

Exercice 6

I- Montrons que $x^4 + 4$ s'écrit comme produit de deux trinômes :

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a : $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 \quad 4x^2 = (x^2+2)^2 \quad (2x)^2$

$= (x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

Donc le polynôme $x^4 + 4$ s'écrit comme produit de deux trinômes:

x^2+2x+2 et x^2-2x+2.

I- Soit $n \in \mathbb{N}$; tel que : $n \geq 2$.

1) Montrons que: n^4+4 n'est pas premier :

On a : $n^4+4=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)$

Et puisque : $n^2+2n+2-(n+1)^2+1$ et $n^2-2n+2-(n-1)^2+1$

et puisque : $n \geq 2$ alors : $n^2-2n+2 \geq 2$ et $n^2+2n+2 \geq 10$

Donc : $n^2 \quad 2n+2 \neq 1$ et $n^2-2n+2 < n^4+1$; ainsi : $n^2 \quad 2n+2$ est un diviseur propre du nombre n^4+4.

Par conséquent : le nombre n^4+4 n'est pas premier.

2) a- Montrons que d divise $4n$.

On a : $d = A \wedge B$, donc: $d|A$ et $d|B$; d'où : $d|B \quad A$; et on a : $B-A=4n$;

d'où : $d|4n$

b- • Montrons que d est impair :

On a : n est un nombre impair, d'où : n^2 est impair;

et puisque: $2n+2$ et $2n+2$ sont deux nombres pairs; alors: $A=n^2 \quad 2n+2$ et $B=n^2+2n+2$ sont impairs.

Et on a : d divise A et B ; donc : d un nombre impair.

* Montrons que d divise n.

Puisque : d un nombre impair, alors : 2 ne divise pas d, et 2 est premier;

ainsi : $d \wedge 2=1$; d'où : $d \wedge 2^2=1$

Donc : $d|4n$ et $d \wedge 4=1$, (d'après le théorème de GAUSS) $d|n$

c- Déduction :

On a: $d|n$ et $d|n^2+2n+2$; d'où : $d|n(n+2)$ et $d|n^2+2n+2$.

Par suite : $d|n^2+2n+2-n(n+2)$; ainsi : $d|2$.

Et puisque 2 est premier; et $d \in \mathbb{N}^*$; alors : $d=1$ ou $d=2$; et d'après ce qui précède d est impair, donc : $d=1$

3) a- Montrons que 4 ne divise pas A :

On a : n est pair donc: $2|n$; ainsi : $2|n-2$; donc : $4|n(n-2)$; par suite: $n(n-2) \equiv 0[4]$.

Par suite : $A = n(n-2)+2$ et $2 \equiv 2[4]$, alors : $A \equiv 2[4]$

par suite: 4 ne divise pas A.

b- Déduction :

On a : n est une nombre pair, d'où n^2 est pair.

Ainsi : A et B sont tous les deux pairs; et 4 ne divise pas A ; d'où : $d = 2p$ avec p impair.

c) On a : $p \mid d$; d'où : $p \mid A$ et $p \mid B$

Donc: $p \mid B - A$ c'est-à-dire : $p \mid 4n$

Et puisque p est impair; alors : $p \wedge 2 = 1$, d'où: $p \wedge 2^2 = 1$ ainsi : $p \wedge 4 = 1$

D'après le théorème de Gauss: $p \mid n$

Et puisque : n est pair, et p est impair, alors : $p = 1$; par conséquent $d = 2$

1) On suppose que : $n > 2$, montrer que : $p_n < (p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_{n-1}) + 1$

Puisque l'ensemble des nombres premiers est infini; alors p_n est définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

On utilise le raisonnement par l'absurde.

On suppose que : $p_n > (p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_{n-1}) + 1$

Donc : $\exists i \in \{1; 2; \ldots; n-1\} : p_i \mid \prod_{k=1}^{n-1} p_k + 1$

Et puisque : $p_i \mid \prod_{k=1}^{n-1} p_k$ alors : $p_i \mid 1$ et ceci est en contradiction avec le fait que p_i est premier.

Donc : $p_n \leq (p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_{n-1}) + 1$

2) a- Déduisons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})\ ; p_n \leq (p_{n-1})^{n-1} + 1$

On a : $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_{n-1}$

D'où : $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_{n-1} \leq (p_{n-1})^{n-1}$

Ainsi : $1 + p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_{n-1} \leq (p_{n-1})^{n-1} + 1$

Et d'après la première question 1) : $p_n \leq p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_{n-1} + 1$

D'où : $p_n \leq (p_{n-1})^{n-1} + 1$

b- Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ; p_n \leq 2^{2^{n-1}}$

• Initialisation: Pour $n = 1$, on a $p_1 = 2$ et $2 = 2^{2^0}$, donc la propriété est

vraie pour $n = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que : $\forall k \in \{1;2;...;n\}$; $p_k \leq 2^{2^{k-1}}$

Et montrons que : $p_{n+1} \leq 2^{2^n}$

D'après la question 1); on a : $p_{n+1} \leq p_1 \times p_2 \times ... \times p_n + 1$

Et d'après l'hypothèse de récurrence : $\forall k \in \{1,2 \ ..n\}$, $p_k \leq 2^{\cdot}$

Donc : $p_{n+1} \leq 2^{1+2+2^2+...+2^{n-1}} + 1$

Et puisque : $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1} = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$ et $1 \leq 2^{2^{n-1}}$

Alors : $p_{n+1} \leq 2^{2^{n-1}} + 2^{2^{n-1}}$

Donc : $p_{n+1} < 2^{2^n}$, d'après le principe de récurrence $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $p_n < 2^{2^n}$

Exercice 69

1- Soit n un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$,

a- Soit $k \in \{2;3;...;n\}$

On a : $n! = n \times (n-1) \times ... \times k \times (k-1) \times ... \times 2 \times 1$

D'où : $n! + k = k[n(n-1) \times ... \times (k-1) \times ... \times 2 \times 1 + 1]$

Donc : $n! + k$ n'est pas un nombre premier.

Par conséquent: les nombres $n! + 2; n! + 3; ... n! + n$, ne sont pas de nombres premiers.

b- Déterminons six nombres premiers consécutifs et non premiers.

Il suffit de prendre $n = 7$; d'où les nombres:

$7! + 2; 7! + 3; 7! + 4; 7! + 5; 7! + 6; 7! + 7$

c'est à dire : $5042; 5043; 5044; 5045; 5046, 5047$; sont six nombres consécutifs et non premiers.

2) Soit p un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$, et: $k \in \{2;3;...;p+1\}$

On a : $(p+1)! = (p+1) \times p \times ... \times k \times (k-1) \times ... \times 2 \times 1$

D'où : $(p+1)! + k = k[(p+1)p \times ... \times (k-1)...2 \times 1 + 1]$

Donc : $(p+1)! + k$ n'est pas premier.

Et par conséquent : les nombres $(p+1)! + 2; (p+1)! + 3; ...$

et $(p+1)! + p + 1$ sont p nombres consecutifs non premiers.

II- Soit $p \in \mathbb{N}^* - \{1\}$,

1- On a : $M = p_1 \times p_2 \times ... \times p_n$; montrons que les nombres : $M+2; M+3; ...$ et $M+n$ sont des nombres non premiers.

Soit : $k \in \{2;3;...;n\}$

• Si k est premier, alors : $\exists i \in \{1;2;...;r\}; k = p_i$

Et puisque : $p_i \nmid M$; alors : $p_i \mid M + k$; d'où : $M+k$ est un nombre non premier.

• Si k n'est pas premier, a ors: $\exists i \in \{1;2;...;r\}; p_i \mid k$ (car: $2 < k < n$) et $p_i \nmid M$ c'est-à-dire : $p_i \mid M + k$ ainsi $M+k$ n'est pas premier.

Par conséquent · les nombres $M+2; M+3;$ et $M+n$ ne sont pas premiers.

2) a) On pose : $M = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

On a : $M+2; M+3; M+4; M+5; M+6; M+7$; six nombres consécutifs non premiers.

b) Comparaison : $212; 213, 214; 215; 216$ et 217 sont six nombres consécutifs non premiers. (c'est une liste de nombres plus petits que les nombres obtenus dans la liste de la partie I)2).

Exercice 11

1) Montrons que : $p \equiv 1[6]$ ou $p \equiv 5[6]$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}); (\exists! r \in \{0;1;2;3;4;5\}) / n \equiv r[6]$

Et puisque les nombres qui s'écrivent sous la forme $6k; 6k+2; 6k+3$ et $6k+4$, avec $k \in \mathbb{Z}$ sont des nombres non premiers, alors: $p \equiv 1[6]$ ou $p \equiv 5[6]$

2) a Soit $q_2; q_3; \ldots$ et q_m des nombres qui s'écrivent sous la forme $6k+1$; on a : $q_i \equiv 1[6]$; pour tout i de $\{1,2,..,m\}$; donc : $q_1.q_2...q_m \equiv 1[6]$

C'est-à-dire : $(\exists k \in \mathbb{N}); q_1.q_2...q_m = 1+6k$

b- Montrons que : $(\exists q \in E); q \mid N$

On a : $N - (2 \times 3 \times 5 \times ... \times p) = 1 - (6 \times 5 \times ... \times p) - 1$

Donc : $N \equiv -1[6]$ c'est-à-dire : $N \equiv 5[6]$

Et on a : $N > p$ et $N \equiv 5[6]$ (c'est-à-dire: $k \in \mathbb{N}; N = 6k+5$)

Et puisque p est le plus grand élément de E; alors N n'est pas premier.

Si tous les diviseurs premiers du nombre N, s'écrivent sous la forme $6k+1$; alors d'après la question 2) a)

On a alors : $N \equiv 1[6]$ ce qui est en contradiction avec : $N \equiv 5[6]$

Ainsi, il existe un nombre premier q de E; tel que . $q < p$ et q divise N.

C'est-à-dire : $(\exists q \in E); q|N$

c- Déduction :

On a : $q|2\times 3\times ...p$ et $q|N$; d'où : $q_1(2\times 3\times 5\times ..\times p)-N$ ainsi : $q|1$; ce qui est absurde.

Donc : E est infini.

I- Vérifions que : $p\equiv 1[4]$ ou $p\equiv 3[4]$

On a : p est un nombre premier et $p\geq 3$ donc p est un nombre impair, c'est-à-dire : $p=2k+1$; avec : $k\in\mathbb{N}^*$

* Si k est pair, alors : $k=2m; m\in\mathbb{N}^*$; d'où : $p=4m+1$; ainsi : $p\equiv 1[4$

* Si k est impair, alors: $k=2m+1; m\in\mathbb{N}^*$, d'ou : $p=4m+3$; ainsi : $p\equiv 3[4]$

II-1) a- Montrons que : $a\equiv 3[4]$

On a : $(\forall i\in\{1,2,...,r\}); p_i\equiv 3[4]$, d'où : $p_1\times p_2\times ...\times p_r\equiv 3^r[4]$

Et puisque : $3\equiv 3[4]$ et $3^2\equiv 1[4]$; alors :

$3^n\equiv 1[4]$ si n est pair et $3^n\equiv 3[4]$ si n est impair,

Ainsi : $3^r\equiv 1[4]$, car r est pair; c'est-à-dire : $p_1\times p_2\times ..\times p\equiv 1[4]$

Et on a : $2\equiv 2[4]$; donc : $p_1\times p_2\times ...\times p_r+2\equiv 3[4]$, c'est-à-dire : $a\equiv 3[4]$

b- Montrons que tout diviseur premier du nombre a n appartient pas à E.

On a : $a\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ d'où a admet un diviseur premier positif,

On suppose que : $(\exists p_\alpha\in E); p_\alpha|a; 1\leq\alpha\leq r$

Donc : $p_\alpha|a$ et $p_\alpha|p_1p_2..p_r$, ainsi : $p_\alpha|a-p_1p_2...p_r$; d'où : $p_\alpha|2$

Ainsi : $p_\alpha=2$; ce qui est impossible; car 2 n'appartient pas à E

Par conséquent : il n'existe aucun diviseur premier du nombre a qui appartient à E.

c- Déduisons que : $a\equiv 1[4]$

Soit : $a=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}...q_m^{\alpha_m}$ la décomposition en produit de facteurs de nombres premiers du nombre a

Et puisque : $a\equiv 3[4]$; alors les nombres : $q_1;q_2;..;q_m$ sont des nombres impairs.

Et d'après la question 1) b); on a : $(\forall i\in\{1,2,...m\}); q_i\notin E$; ainsi :

$(\forall i \in \{1,2,...m\}); q_i \equiv 1[4]$

C'est-à-dire : $(\forall i \in \{1,2,...m\}), q_i^{\alpha_i} \equiv 1[4]$, par conséquent : $a \equiv 1[4]$

2) a- Montrons que : $b \equiv 3[4]$

On a : $(\forall i \in \{1,2,...r\}); p_i \equiv 3[4]$

D'où : $p_1 \times p_2 \times .. \times p_r \equiv 3^r[4]$

Et puisque : $3^r \equiv 3[4]$ (car r est impair); alors : $b \equiv 3[4]$

b- Montrons que : $b \equiv 1[4]$

On suppose que b admet un diviseur premier p_m, appartient à E

On a : $p_m \mid b$ et $p_m \mid p_1p_2...p_r$; d'où : $p_m \mid b - p_1p_2...p_r$ c'est-à-dire : $p_m \mid 4$

Ceci est en contradiction avec : $p_m \equiv 3[4]$

Par conséquent b n'admet aucun diviseur premier de E,

Soit $b = \prod_{i=1}^{m} q_i^{\beta_i}$, la décomposition en produit de facteurs de nombres premiers de b.

On a : $(\forall i \in \{1,2,...m\}); q_i \notin E$; d'où : $(\forall i \in \{1,2,...;m\}); q_i^{\beta_i} \equiv 1[4]$;

donc: $b \equiv 1[4]$

3) Déduction :

* On a si n est pair : $a \equiv 1[4]$ et $a \equiv 3[4]$; ce qui est impossible.

* On a si n est impair: $b \equiv 1[4]$ et $b \equiv 3[4]$; ce qui est impossible.

Donc l'ensemble E est infini.

1) Montrons que : $(p-1)(2p-1) \equiv 0[6]$

Puisque : $2 \times 3 = 6$ et $2 \wedge 3 = 1$, il suffit de montrer que : $2 \mid (p-1)(2p-1)$ et $3 \mid (p-1)(2p-1)$

On a : p est premier, et $p \geq 5$, alors p est impair.

D'où : $p \equiv 1[2] \Rightarrow p - 1 \equiv 0[2]$

$\Rightarrow (p-1)(2p-1) \equiv 0[2]$

Donc : $2 \mid (p-1)(2p-1)$

Et on a : $p \wedge 3 = 1$ (car p et 3 sont premiers entre eux)

Donc : 3 ne divise pas p; d'où : $p \equiv 1[3]$ ou $p \equiv -1[3]$

* $p \equiv 1[3] \Rightarrow p - 1 \equiv 0[3]$

$\Rightarrow (p-1)(2p-1) \equiv 0[3]$

* $p \equiv -1[3] \Rightarrow 2p \equiv 1[3]$

$\Rightarrow 2p - 1 \equiv 0[3]$

$\Rightarrow (p-1)(2p-1) \equiv 0[3]$

Donc : $3 \mid (p-1)(2p-1)$

Ainsi : $\begin{cases} 2 \mid (p-1)(2p-1) \\ 3 \mid (p-1)(2p-1) \\ 2 \wedge 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow 6 \mid (p-1)(2p-1)$

2) Déduction :

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p-1}(n+k)^2 &= \sum_{k=0}^{p-1}(n^2 + 2nk + k^2) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} n^2 + \sum_{k=0}^{p-1} 2nk + \sum_{k=0}^{p-1} k^2 \\ &= n^2 \sum_{k=0}^{p-1} 1 + 2n \sum_{k=0}^{p-1} k + \sum_{k=0}^{p-1} k^2 \\ &= n^2 . p + 2n\left(\frac{p(p-1)}{2}\right) + \frac{p(p-1)(2p-1)}{6} \\ &= p\left(n^2 + n(p-1) + \frac{(p-1)(2p-1)}{6}\right) \end{aligned}$$

et puisque : $(p-1)(2p-1) = 0[6]$; alors : $a = \dfrac{(p-1)(2p-1)}{6} \in \mathbb{N}$

On pose : $\alpha = n^2 + n(p-1) + a$; $\alpha \in \mathbb{N}^*$

Donc : $(\exists \alpha \in \mathbb{N}^*)$; $\sum_{k=0}^{p-1}(n+k)^2 = \alpha p$, c'est-à-dire : $\sum_{k=0}^{p-1}(n+k)^2 = 0[p]$

Exercice 73

1) Soit n un élément de $\mathbb{N}$; tel que : $n \geq 2$ et $n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i}$ la décomposition en produit de facteurs premiers de n.

Soit d un diviseur positif de n.

On a : $d = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\beta_i}$ avec : $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ pour tout $i \in \{m; \ldots; 2; 1\}$

Et puisque : $Card\{0; 1; 2; \ldots; \alpha_i\} = 1 + \alpha_i$

Alors, le nombre des cas possibles pour β est $1 + \alpha$ pour tout $i \in \{m; \ldots; 2; 1\}$

Ainsi le nombre de diviseurs positifs du nombre n est :

$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ \ (1+\alpha_m)$ (d'après le principe fondamental du dénombrement)

2) Déterminons x et y de $\mathbb{N}$ tels que : $CardD_x^* = 10$; $CardD_y^* = 2$ et $x \wedge y = 18$

Soit x de $\mathbb{N}$; tel que : $x \geq 2$ et $x = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$, la décomposition en facteurs premiers de x.

On a : $CardD_x^* = 21 \iff (1+\alpha_1) = 21$ ou $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2) = 7 \times 3$

$\iff \alpha_1 = 20$ ou $(\alpha_1 = 6$ et $\alpha_2 = 2)$ ou $(\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 6)$

Ainsi : $x = p_1^{20}$ ou $x = p_2^6 p_3^2$ avec $p_2 < p_3$ ou $x = p_4^2 p_5^6$ avec $p_4 < p_5$

Soit $y \in \mathbb{N}$, et $y \geq 2$ on a : $y = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\beta_i}$, la décomposition de y en produit de facteurs premiers.

$CardD_y^* = 10 \iff (1+\beta_1) = 10$ ou $(1+\beta_1)(1+\beta_2) = 5 \times 2$

$\iff \beta_1 = 9$ ou $(\beta_1 = 4$ et $\beta_2 = 1)$ ou $(\beta_1 = 1$ et $\beta_2 = 4)$

D'où : $y = p_1^9$ ou $y = p_2^4 p_3$ avec : $p_2 < p_3$ ou $y = p_4 p_6^4$ avec : $p_4 < p_5$

Et puisque : $x \wedge y = 2 \times 3^2$; alors : $x \neq p_6^{20}$ et $y \neq q_1^9$

Donc : $x = 2^\alpha 3^\beta$ et $y = 2^\gamma \times 3^\lambda$ avec : $Min(\alpha;\gamma) = 1$ et $Min(\beta;\lambda) = 2$

Par conséquent : $x = 2^6 \times 3^2 = 576$ et $y = 2 \times 3^4 = 162$

3) Soit a un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$; et admettant 3 diviseurs positifs.

Et puisque : $3 = 1 \times 3$, alors : $a = p_1^{\alpha_1}$ avec p est un nombre premier positif,

Et on a : $1 + \alpha_1 = 3$ c'est-à-dire : $\alpha_1 = 2$; par conséquent : $a = p^2$ donc : a est le carré d'un nombre premier, d'où a est un carré parfait

1) Voir exercice

2) Soit n un entier naturel ayant exactement 9 diviseurs.

Montrons que : $n = a^8$ ou $n = a^2 b^2$ où a et b sont premiers et distincts.

D'après la question 1) le nombre de diviseurs n est :

$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_k)$

Et puisque : $9 = 1 \times 9$ ou $9 = 3 \times 3$

Alors : $\forall i \in \{2;\ldots;k\}; 1+\alpha_i = 1$ et $1+\alpha_1 = 9$

ou : $\forall i \in \{3;...;k\}; 1 + \alpha_i = 1$ et $1 + \alpha_i = 1 + \alpha_2 = 3$

c'est-à-dire : $\left((\forall i \in \{2;3;...;k\})\ \alpha_i = 1\right)$ et $\alpha_1 = 8$

ou $(\forall i \in \{3;4;...;k\}); \alpha_i = 1$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$

Ainsi : $n = p_1^2 p_2^2$ ou $n = p_1^8$

On pose : $a = p_1$ et $b = p_2$; donc : $n = a^8$ ou $n = a^2 b^2$ avec a et b sont premiers et distincts.

3) n possède 9 diviseurs (1)

$n = 39p + 1$ (2); où $n \in \mathbb{N}$ et p est un nombre premier.

a- Montrons que n ne peut s'écrire sous la forme a^8

Par l'absurde : on suppose que : $n = a^8$; alors : $39p + 1 = a^8$

• Si p est pair; alors : $p - 2$; d'où : a^8 79, et ceci n'est pas impossible.

• Si p est impair; alors : $p \equiv 1[2]$; d'où : $a^8 \equiv 0[2]$.

Donc : $a \equiv 0[2]$, et puisque a est un nombre premier, alors : a 2.

Par conséquent : $2^8 = 39p + 1$; d'où : $39p = 255$ ce qui est impossible;

Donc : $n \neq a^8$

Ainsi : $n = a^2 b^2$

b- Montrons que: $p = 5$ ou $p = 37$; puis déterminons n.

On a : $n = a^2 b^2$ et $39p + 1 = n$; d'où : $39p = a^2 b^2 - 1$

Donc : $39p = (ab - 1)(ab + 1)$

Ainsi : $p \mid (ab - 1)(ab + 1)$

Et puisque p est premier, alors : $p \mid ab - 1$ ou $p \mid ab + 1$

1er cas : p divise $ab + 1$: $(\exists k \in \mathbb{N}); ab + 1 = pk$

Donc : $39(ab + 1) = 39pk$

C'est-à-dire : $39(ab + 1) = k(ab - 1)(ab + 1)$ d'où $k(ab - 1) = 39$

Donc : $ab - 1 \mid 39$

Ainsi : $ab - 1 = 13$ ou $ab - 1 = 3$ ou $ab - 1 = 1$ ou $ab - 1 = 39$

* Si : $ab - 1 = 1$, alors : $ab + 1 = 3$ et $k = 39$

D'où : $39p = ab + 1 = 3$, et ceci est impossible.

* Si : $ab - 1 = 3$, alors : $ab + 1 = 5$ et $k = 13$

Donc : $13p = ab + 1 = 5$ et ceci n'est pas possible.

* Si : $ab - 1 = 13$, alors : $k = 3$ et $3p = ab + 1 = 15$

Donc : $3p = 15$; ainsi : $p = 5$

* Si : $ab - 1 = 39$, alors : $k = 1$; d'où : $p = ab + 1 = 41$

Ainsi : $p = 41$

2ème cas : p divise $ab - 1$:

En utilisant la même démarche que précédemment, on obtient : $p = 37$; et les autres cas sont impossibles.

Ainsi : les valeurs possibles pour p sont : 5; 37 et 41.

• Si : $p = 41$, alors : $ab = 40$; ce qui est impossible car a et b sont deux nombres premiers.

• Si : $p = 37$, alors : $ab = 38$; d'où : ($a = 2$ et $b = 19$)

Dans ce cas : $n = 2^2 \times 19^2 = 144$

• Si : $p = 5$, alors : $ab = 14$; par conséquent $ab = 2 \times 7$ (c'est-à-dire : $a = 2$ et $b = 7$)

Dans ce cas : $n = 2^2 \times 7^2 = 196$

Donc : les nombres qui vérifient les deux conditions (1) et (2) sont : ($p = 37$ et $n = 144$) ou ($p = 5$ et $n = 196$).

Exercice 75 **BAC 2020 (session normale) :**

1) Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $(D): 7x^3 - 13y = 5$

a) Montrons x et 13 sont premiers entre eux :

Posons $d = x \wedge 13$, donc $d | x$ et $d | 13$ donc: $d | 7x^3$ et $d | -13y$; ainsi : $d | 7x^3 - 13y$

Donc : $d | 5$; d'où : $d = 1$ ou $d = 5$ $(d > 0)$

Et puisque : $d | 13$; alors : $d = 1$

Par conséquent : x et 13 sont premiers entre eux

b) Déduisons que : $x^{12} \equiv 1[13]$

On a : 13 est premier et $x \wedge 13 = 1$; d'après le théorème de Fermat : $x^{12} \equiv 1[13]$

c) Montrons que : $x^3 \equiv 10[13]$

On a : $7x^3 - 13y = 5$; donc : $7x^3 = 5 + 13y$

D'où : $7x^3 \equiv 5[13]$

Ainsi : $14x^3 \equiv 10[13]$

Et puisque $14 \equiv 1[13]$; alors : $x^3 \equiv 10[13]$

d) Déduisons que $x^{12} \equiv 3[13]$:

On a : $x^3 \equiv 10[13]$; d'où : $(x^3)^2 \equiv 100[13]$

Ainsi : $x^6 \equiv 7 \times 13 + 9 [13]$

D'où : $x^6 \equiv 9 [13]$

Ainsi : $x^6 \equiv -4 [13]$

D'où : $x^{12} \equiv 16 [13]$

Par conséquent : $x^{12} \equiv 3 [13]$

2) Déduisons que l'équation (D) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

Supposons que l'équation (D) admet (x, y) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ comme solution.

D'après la question 1) b) on a: $x^{12} \equiv 1 [13]$ et d'après 1) d) on a: $x^2 \equiv 3 [13]$

D'où : $1 \equiv 3 [13]$ ce qui est absurde.

Ainsi : l'équation (D) n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$

Exercice 76 **BAC 2019 (session normale) :**

1) Montrons que $(\exists u \in \mathbb{Z}) ; u \times n \equiv 1 [2969]$:

On suppose que 2969 ne divise pas n.

Et puisque 2969 est un nombre premier, alors : $2969 \wedge n = 1$

D'après le théorème de BEZOUT : $(\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2) ; nu + 2969v = 1$

D'où : $2969v = 1 - nu$

Ainsi : 2969 divise $1 - nu$

Donc : $1 - nu \equiv 0 [2969]$

D'où : $nu \equiv 1 [2969]$

D'une autre façon : $(\exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2) ; nu + 2969v = 1$

On a : $nu + 2969v \equiv 1 [2969]$

Donc : $nu \equiv 1 [2969]$

Conclusion : $(\exists u \in \mathbb{Z})$ tel que : $nu \equiv 1 [2969]$

a) Déduisons que : $(um)^4 \equiv -1 [2969]$ et que $(u \times m)^{2019} \equiv 1 [2969]$

• On a : $n^8 + m^8 \equiv 0 [2969]$

Donc : $u^8 n^8 + u^8 m^8 \equiv 0 [2969]$

Ainsi : $(un)^8 + (um)^8 \equiv 0 [2969]$

Et puisque : $(nu)^8 \equiv 1 [2969]$ car $nu \equiv 1 [2969]$

Alors : $1 + (um)^8 \equiv 0 [2969]$

Par conséquent : $(um)^8 \equiv -1 [2969]$

• On a : $(um)^8 \equiv -1[2969]$

D'où : $((um)^8)^{371} \equiv (-1)^{371}[2969]$

Donc : $(um)^{2968} \equiv -1[2969]$

c) Montrons que 2969 ne divise pas $u.m$:

Par l'absurde :

Supposons que : $um \equiv 0[2969]$

Donc : $(um)^{2968} \equiv 0[2969]$

Ce qui contred't le résultat précédent : $(um)^{2968} \equiv -1[2969]$

Ainsi : 2969 ne divise pas $u.m$

d) Déduisons que $(u\,m)^{2968} \equiv 1[2969]$:

On a : 2969 est un nombre premier qui ne divise pas mu.

Alors : $2969 \wedge mu = 1$

On a : $2969 \wedge mu = 1$

2969 est premier; d'après le théorème de Fermat

$(mu)^{2969-1} \equiv 1[2969]$

C'est-à-dire : $(mu)^{2968} \equiv 1[2969]$

2) a) Montrons que 2969 divise n :

Par l'absurde, supposons que : 2969 ne divise pas n.

Alors, d'après les résultats de la première question;

$(um)^{2968} \equiv 1[2969]$ et $(um)^{2968} \equiv -1[2969]$

Donc : $1 \equiv -1[2969]$

D'où : $2 = 0[2969]$; ce qui est absurde.

Par conséquent : 2969 divise n.

info :

Théorème de Fermat.

Si n est premier et ne divise pas a alors:

$a^{n-1} \equiv 1[n]$

b) Montrons que $n^8 + m^8 \equiv 0[2969] \Longleftrightarrow n \equiv 0[2969]$ et $m \equiv 0[2969]$:

• Supposons que $n \equiv 0[2969]$ et $m \equiv 0[2969]$

Donc : $n^8 \equiv 0[2969]$ et $m^8 \equiv 0[2969]$

Ainsi : $n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$

• Réciproquement :

Si $n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$, alors : d'après la question 2)a)

2969 divise n ; d'où : $n \equiv 0[2969]$

Ainsi : $n^8 \equiv 0[2969]$

Or $n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$; donc : $m^8 \equiv 0[2969]$

Puisque : 2969 divise m^8 et 2969 est premier

Alors : 2969 divise m ; par conséquent : $m \equiv 0[2969]$

info :

Si $a \equiv b[n]$ alors :

$(\forall p \in \mathbb{N}^*) ; a^p = b^p[n]$

Exercice 77 **BAC 2018 (session normale) :**

1) Soit p un nombre premier tel que : $p = 3 + 4k$ où $(k \in \mathbb{N}^*)$:

Montrons que pour tout entier relatif x ; si $x^2 \equiv 1[p]$ alors : $x^{p-5} \equiv 1[p]$

On a : $p = 3 + 4k \Rightarrow p - 5 = 4k - 2 = 2(2k-1) ; (k \in \mathbb{N}^*)$

Soit $x \in \mathbb{Z}$; on a : $x^2 \equiv 1[p] \rightarrow (x^2)^{2k} \equiv (1)^{2k}[p]$; (car $2k \in \mathbb{N}^*$)

$$\Rightarrow x^{2(2k-1)} \equiv 1[p]$$
$$\Rightarrow x^{4k-2} \equiv 1[p]$$
$$\Rightarrow x^{p-5} \equiv 1[p]$$

Donc : pour tout entier relatif x ; si $x^2 \equiv 1[p]$ alors : $x^{p-5} \equiv 1[p]$

2) a) Montrons que x et p sont premiers entre eux :

On a : $x^{p-5} \equiv 1[p]$, alors il existe k' de $\mathbb{Z}$ tel que : $x^{p-5} = 1 + k'p$

D'où : $x^{p-5} - k'p = 1$

Ainsi : $x^{p-6} \times x - k'p = 1 \quad (p-6 \in \mathbb{N}^*)$

D'où : $\exists (u;v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $xu + vp = 1$; avec : $u = x^{p-6}$ et $v = -k'$

D'après le théorème de Bezout : $x \wedge p = 1$

Donc : x et p sont premiers entre eux.

b) Montrons que $x^{p-1} \equiv 1[p]$:

On a : p est un nombre premier et $x \wedge p = 1$.

D'après le théorème de Fermat : $x^{p-1} \equiv 1[p]$

c) Vérifions l'égalité proposée :

On a : $2 + (k-1)(p-1) = 2 + (k-1)(4k+3-1)$
$= 2 + (k-1)(4k+2)$
$= 2 + 4k^2 + 2k - 4k - 2$
$= 4k^2 - 2k$
$= k(4k-2)$
$= k(p-5)$

d) Déduisons que $x^2 \equiv 1[p]$:

On a : $x^{p-5} \equiv 1[p] \Rightarrow (x^{p-5})^k \equiv 1^k[p]$ (car $k \in \mathbb{N}^*$)

$\Rightarrow x^{k(p-5)} \equiv 1[p]$

$\Rightarrow x^{2+(k-1)(p-1)} \equiv 1[p]$ (1)

D'autre part on a : $x^{p-5} \equiv 1[p]$

D'où : $(x^{p-5})^{k-1} \equiv 1^{k-1}[p]$

Ainsi : $x^{(p-5)(k-1)} \equiv 1[p]$

Donc : $x^2 x^{(p-5)(k-1)} \equiv x^2[p]$

C'est-à-dire : $x^{2+(p-5)(k-1)} \equiv x^2[p]$ (2)

info :

Si $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$

alors : • $a \times c \equiv b \times d[n]$

• $a^p \equiv b^p[n]$; $p \in \mathbb{N}^*$

De (1) et (2) on en déduit : $x^2 \equiv 1[p]$

3) Résolvons dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^{62} \equiv 1[67]$

On a pour tout entier relatif $x^2 - 1[p] \Longleftrightarrow x^{p-5} \equiv 1[p]$ avec p est un nombre premier tel que : $p = 3 + 4k$; $(k \in \mathbb{N}^*)$

• Soit $p = 67$

$x^{62} \equiv 1[67] \Longleftrightarrow x^{67-5} \equiv 1[67]$

$\Longleftrightarrow x^2 \equiv 1[67]$ (d'après ce qui précède)

$\Longleftrightarrow (x-1)(x+1) \equiv 0[67]$

$\Longleftrightarrow x - 1 \equiv 0[67]$ ou $x + 1 \equiv 0[67]$ (car 67 est premier).

$\Longleftrightarrow x = 1 + 67k$ ou $x = -1 + 67k / k \in \mathbb{Z}$

Ainsi : $S = \{67k + 1 ; 67k - 1 ; k \in \mathbb{Z}\}$

Autrement : $x^{62} \equiv 1[67] \Longleftrightarrow x^{67-5} \equiv 1[67]$

$\Longleftrightarrow x^2 \equiv 1[67]$

$\Longleftrightarrow 67 | x^2 - 1$

$\Longleftrightarrow 67 | (x-1)(x+1)$

$\Longleftrightarrow 67 | x - 1$ ou $67 | x + 1$ (car 67 est premier)

$\Longleftrightarrow x - 1 = 67k$ ou $x + 1 = 67k$ où $k \in \mathbb{Z}$

$\Longleftrightarrow x = 1 + 67k$ ou $x = 67k - 1$ où $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 78 **BAC 2017 (session normale) :**

1) a) Vérifions que : $p < 2017$

Soit $(x;y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $px + y^{p-1} = 2017$

On a : $px - 2017 = -y^{p-1}$ et $-y^{p-1} < 0$

D'où : $px - 2017 < 0$

Ainsi : $px < 2017$. Et puisque : $x \geq 1$, alors : $px \geq p$

D'où : $p \leq px < 2017$; ainsi : $p < 2017$

Méthode 2:

Soit $(x;y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $px + y^{p-1} = 2017$

Par l'absurde :

Si $p \geq 2017$ alors : $px \geq 2017$ et on a : $y^{p-1} \geq 1$

D'où : $px + y^{p-1} \geq 2018$ ce qui est absurde.

Donc : $p < 2017$

info :
$\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2 \ \ (c|a \text{ et } c|b) \Rightarrow \forall (\alpha;\beta) \in \mathbb{Z}^2 ; c|\alpha a + \beta b$

b) Montrons que p ne divise pas y :

Supposons que $p|y$ et on a : $p|px$

D'où : $p|y^{p-1} + px$; donc : $p|2017$ ce qui est absurde (car 2017 est un nombre premier).

Donc : p ne divise pas y.

c) • Montrons que $y^{p-1} \equiv 1[p]$ et déduisons que p divise 2016 :

p est un nombre premier et p ne divise pas y ; alors d'après le théorème de Fermat $y^{p-1} \equiv 1[p]$

• On a : $px + y^{p-1} = 2017$

Donc : $px + y^{p-1} \equiv 2017[p]$

D'où : $0 + 1 \equiv 2017[p]$

Ainsi : $2016 \equiv 0[p]$

Donc : p divise 2016.

Méthode 2:

On a : $\begin{cases} y^{p-1} \equiv 1[p] \\ px + y^{p-1} = 2017 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p|y^{p-1} - 1 \\ px + y^{p-1} - 1 = 2016 \end{cases}$

$\Rightarrow p|2016$

d) Montrons que $p = 7$:

On a : p est premier et divise 2016 et $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$, donc : $p = 2$

ou $p=3$ ou $p=7$ (ceci d'après le théorème de Gauss $p|2^3\times 3^2\times 7$) .

Et puisque : $p\geq 5$, alors : $p=7$

2) Déterminons les couples $(x;y)$ de $(\mathbb{N}^*)^2$ vérifiant : $px+y^{p-1}=2017$ où p est un nombre premier et $p\geq 5$

D'après la question (1), on a : $p=7$

Donc : $px+y^{p-1}=2017 \Leftrightarrow 7x+y^6=2017$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ 7x=2016 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=2 \\ 7x=1953 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=3 \\ 7x=1288 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=228 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=2 \\ x=279 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=3 \\ x=184 \end{cases}$$

Donc : $S=\{(288;1),(279;2),(184;3)\}$

Méthode 2:

D'après la première question : $px+y^{p-1}=2017 \Rightarrow p=7$

• Donc : Si $p\neq 7$, alors l'équation n'a pas de solution.

Si $p=7$, alors l'équation devient : $7x+y^6=2017$

D'où : $y^6=2017-7x$

Ainsi : $1\leq y^6\leq 2010$

Donc : $1\leq y\leq \sqrt[6]{2010}$ $\quad(\sqrt[6]{2010}\simeq 3,55)$

Par conséquent : $y\in\{1;2;3\}$

On remplace y puis on calcule x.

On retrouve : $S=\{(288;1);(279;2);(184;3)\}$

Exercice 79 **BAC 2016 (session normale) :**

Première partie :

Soit $(a;b)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tel que : 173 divise a^3+b^3.

1) Montrons que : $a^{171}\equiv -b^{171}[173]$

On a : $173|a^3+b^3 \Rightarrow a^3+b^3\equiv 0[173]$

$\Rightarrow a^3\equiv -b^3[173]$

$\Rightarrow (a^3)^{57}\equiv(-b^3)^{57}[173]$

$\Rightarrow a^{171}\equiv -b^{171}[173]$

2) Montrons que : 173 divise a si et seulement si 173 divise b

On a : $173|a^3$; et : $173|a^3+b^3$, donc : $173|a^3+b^3-a^3$

D'où : $173|b^3$. Ainsi : $173|b$ car 173 est premier.

Réciproquement :

Comme les nombres a et b jouent le même rôle,

Donc : $173|b \Rightarrow 173|a$

Conclusion :

$173|a \Leftrightarrow 173|b$

info :

Si p est premier, alors : $p|ab \Rightarrow p|a$ ou $p|b$

c'est un cas particulier du théorème de Gauss.

3) On suppose que 173 divise

a; montrons que 173 divise $a+b$:

On suppose que 173 divise a; donc 173 divise b (d'après la question précèdente)

D'où : $173|a+b$

info :

Si $d|a$ et $d|b$ alors d divise toute combinaison linéaire de a et b.

4) On suppose que 173 ne divise pas

a.

a) Montrons que : $a^{172} \equiv b^{172}[173]$

On a : 173 ne divise pas a, alors 173 ne divise pas b. (d'après ce qui précède)

D'après le théorème de Fermat : $b^{172} - 1[173]$ et a^{172} $1[173]$

D'où : $a^{172} \equiv b^{172}[173]$

b) Montrons que : $a^{171}(a+b) \equiv 0[173]$

On a : $a^{172} \simeq b^{172}[173]$

Et on a : $a^{171}(a+b) = a^{172}+a^{171}b$

Et puisque : $a^{171} \equiv -b^{171}[173]$ (d'après la question 1))

Alors : $b.a^{171} = -bb^{171}[173]$

D'où : $ba^{171}+b^{172} \equiv 0[173]$

On a : $a^{171}(a+b) = a^{172}+a^{171}b$

et on a : $a^{172} \equiv b^{172}[173]$ et a^{17} $-$ b^{17} $[173]$ (d'après la question 1)

D'où : $a^{172} \equiv b^{172}[173]$ et $ba^{171} \equiv -bb^{171}[173]$

Ainsi : $a^{172} \equiv b^{172}[173]$ et $ba^{171} \equiv -b^{172}[173]$

Donc : $a^{172} + ba^{171} \equiv b^{172} - b^{172}[173]$

D'où : $a^{171}(a+b) \equiv 0[173]$

c) Déduisons que 173 divise $(a+b)$:

On a : $173 | a^{171}(a+b)$ (d'après la question c) et 173 est un nombre premier et 173 ne divise pas a.

Donc : $173 | a+b$ (d'après le théorème de Gauss)

info :

Si $a \wedge b = 1$ alors $a^m \wedge b^n = 1$ pour tout n et m de $\mathbb{N}^*$.

Deuxième partie :

1) Vérifions que : $k(x-y)^2 + (k-1)xy = 1$

Soit $(x;y)$ solution de (E); on a : $x^3 + y^3 = 173(xy+1)$

Donc : $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 173(xy+1)$

D'où : $173k((x-y)^2 + xy) = 173(xy+1)$ (car $x+y = 173k$)

Ainsi : $k(x-y)^2 + kxy = xy + 1$

D'où : $k(x-y)^2 + (k-1)xy - 1$

2) Montrons que $k = 1$, puis résolvons l'equation (E)

On a : x, y et k des éléments de $\mathbb{N}^*$

Si $k \geq 2$ alors : $(k \quad 1)xy \geq 1$

D'où : $(k-1)xy + k(x-y)^2 \geq 1 + k(x-y)^2$

Ainsi : $1 \geq 1 + k(x-y)^2$

Donc : $0 \geq k(x-y)^2$ ce qui est absurde car $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \neq y$

Donc : $k = 1$

Méthode 2:

On a : $k \in \mathbb{N}^*$; donc : $k \geq 1$; ainsi : $k = 1$ ou $k > 1$

• Si $k > 1$ alors : $k - 1 > 0$

D'où : $\begin{cases} (k-1)xy > 0 \\ k(x-y)^2 > 1 \end{cases} ; x \neq y$

Ainsi : $(k-1)xy+k(x-y)^2>1$

Donc : $1>1$ ce qui est absurde. D'où: $k=1$

• Résolvons l'équation (E) :

On a : $\begin{cases} x+y=173\times k=173 \\ 1(x-y)^2+(1-1)xy=1 \end{cases}$

D'où : $\begin{cases} x+y=173 \\ (x-y)^2=1 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x+y=173 \\ x-y-1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+y=173 \\ x-y--1 \end{cases}$

Ainsi : $(x;y)=(87;86)$ ou $(x;y)=(86;87)$

Désignons par S l'ensemble des solutions de l'équation (E) dans $(\mathbb{N}^*)^2$.

$(x;y)\in(S)\Rightarrow(x;y)=(87;86)$ ou $(x;y)=(86;87)$

Réciproquement :

$\begin{cases} 87^3+86^3=1294559 \\ 173(87\times86+1)=1294559 \end{cases}$

Donc : $87^3+86^3-173(87\times86+1)$

D'où : $(87;86)\in S$ et $(86;87)\in S$

Conclusion : $S=\{(87;86);(86;87)\}$

Exercice 80 **BAC 2015 (session normale) :**

1) Montrons que 1436 et 2015 sont premiers entre eux :

On a : $1436\times1051-2015\times749=1$

Donc, il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $1436u+2015v=1$; en prennant $u=1051$ et $v=-749$ d'où: d'après le théorème de Bezout, 1436 et 2015 sont premiers entre eux.

info : Théorème de Bezout

$a\wedge b=1\Leftrightarrow\exists(u,v)\in\mathbb{Z}^2, au+bv=1$

2) a) Montrons que d divise 1436 :

On a : $x^{1439}\equiv1436[2015]\Rightarrow(\exists k\in\mathbb{Z}); x^{1439}=1436+2015k$

$\Rightarrow(\exists k\in\mathbb{Z}); x^{1439}-2015k=1436$ (1)

Et on a : $d|x$ et $d|2015$

Donc : $d|x^{1439}$ et $d|2015k$

info :

Si $d|x$ alors $d|x^n$ où $n\in\mathbb{N}^*$

Ainsi : $d|x^{1439}-2015k$

D'où : $d|1436$

b) Déduisons que x et 2015 sont premiers entre eux :

Soit : $\delta = x \wedge 2015$

On a : $\delta|x$ et $\delta|2015$; d'où : $\delta|1436$ (d'après (1))

Par suite : $\delta|2015$ et $\delta|1436$

D'où : $\delta|2015 \wedge 1436$

Ainsi : $\delta|1$ (car d'après la question 1) 2015 et 1436 sont premiers entre eux).

Donc : $\delta = 1$

Conclusion : 2015 et 1436 sont premiers entre eux.

3) a) Montrons que : $x^{1440} \equiv 1[5]$ et $x^{1440} \equiv 1[13]$ et $x^{1440} \equiv 1[31]$

On a : 5 est premier et ne divise pas x (car $2015 \wedge x - 1$)

Donc : d'après le théorème de Fermat.

$x^4 - 1[5]$; ainsi : $(x^4)^{360} \equiv 1[5]$ D'où : $x^{1440} \equiv 1[5]$

On montre de même que : $x^{1440} \equiv 1[13]$ et $x^{1440} \equiv 1[31]$

info :

$1440 - 360 \times 4$

$= 120 \times 12$

$= 30 \times 48$

b) Montrons que : $x^{1440} \equiv 1[65]$ et que : $x^{1440} \equiv 1[2015]$

On a : $x^{1440} \equiv 1[5]$ et $x^{1440} \equiv 1[13]$

Donc : $5|(x^{1440}-1)$ et $13|(x^{1440}-1)$

Et comme : $5 \wedge 13 = 1$; alors : $5 \times 13|(x^{1440}-1)$

D'où : $65|x^{1440}-1$

Ainsi : $x^{1440} \equiv 1[65]$

info :

Si $\begin{cases} a|n \\ b|n \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$, alors : $ab|n$

On a : $x^{1440} = 1[65]$ et $x^{1440} = 1[31]$

Donc : 31 divise $x^{1440} - 1$ et 65 divise $x^{440} - 1$ et $65 \wedge 31 - 1$

D'où : 65×31 divise $(x^{440}-1)$

Ainsi : 2015 divise $x^{1440} - 1$.

Donc : $x^{1440} \equiv 1[2015]$

4) Montrons que : $x = 1051[2015]$

On a : d'après l'énoncé : $x^{1439} \equiv 1436[2015]$

Donc : $x^{1439} \times 1051 \equiv 1051 \times 1436[2015]$

$(1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1)$

D'où : $x^{1439} \times 1051 \equiv 2015 \times 749 + 1[2015]$

Ainsi : $1051x^{1439} \equiv 1[2015]$

D'où : $1051x^{1439} \times x \equiv 1 \times x[2015]$

Donc : $1051x^{1440} \equiv x[2015]$

or $x^{1440} \equiv 1[2015]$

Ainsi : $1051 \times 1 \equiv x[2015]$

Par conséquent : $x \equiv 1051[2015]$

Méthode 2:

On a : $\begin{cases} x^{1439} \equiv 1436[2015] \\ x^{1440} \equiv 1[2015] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{1439} \times x \equiv 1436 \times x[2015] \\ x^{1440} \equiv 1[2015] \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^{1440} \equiv 1436x[2015] \\ x^{1440} \equiv 1[2015] \end{cases}$

$\Rightarrow 1436x \equiv 1[2015]$

On a : $\begin{cases} 1436x \equiv 1[2015] \\ 1436 \times 1051 \equiv 1[2015] \end{cases} \Rightarrow 1436(x - 1051) \equiv 0[2015]$

$\Rightarrow 2015 | 1436(x - 1051)$

$\Rightarrow 2015 | x - 1051$

$\Rightarrow x \quad 1051[2015]$ (D'après le théorème de Gauss)

Exercice 81 **BAC 2015 (session rattrapage) :**

I/ 1) Soit $a \in \mathbb{Z}$; montrons que : $a^{2016} \equiv 1[13]$

On a : 13 est un nombre premier et $a \wedge 13 = 1$; alors d'après le théorème de Fermat.

$a^{13-1} \equiv 1[13]$; donc : $a^{12} \equiv 1[13]$

Ainsi : $(a^{12})^{168} \equiv 1^{168}[13]$

D'où : $a^{2016} \equiv 1[13]$

2 a) Montrons que x et 13 sont premiers entre eux :

Soit x une solution de (E); donc : $x^{2015} \equiv 2[13]$

On a : $x \wedge 13 = 1$ ou $13 \wedge x = 13$ car 13 est un nombre premier.

Si on suppose que $x \wedge 13 = 13$; alors : $13 | x$; d'où : $x \quad 0[13]$

Ainsi : $x^{2015} \quad 0[13]$ ce qui est absurde; car $x^{2015} \quad 2[13]$

Donc : $x \wedge 13 = 1$; d'où 13 et x sont premiers entre eux.

b) Montrons que : $x \equiv 7[13]$

On a : $x^{2015} \equiv 2\,[13]$; d'où : $x^{2016} \equiv 2x\,[13]$

Et on a : $x^{2016} \equiv 1\,[13]$ (d'après la question I)1)

D'où : $2x \equiv 1\,[13]$

Ainsi : $7(2x) \equiv 7\,[13]$

Donc : $14x \equiv 7\,[13]$

Par conséquent : $13x + x \equiv 7\,[13]$

Donc : $x \equiv 7\,[13]$

3) Montrons que $S = \{7 + 13k / k \in \mathbb{Z}\}$:

On a démontré que si x est solution de (E) alors : $x = 7\,[13]$

Donc : $x = 7 + 13k$; où $k \in \mathbb{Z}$

Réciproquement : supposons que $x \equiv 7\,[13]$

Montrons que : x est solution de (E)

C'est-à-dire . $x^{2015} \equiv 2\,[13]$

On a : $x \equiv 7\,[13]$; donc : $x^{2015} \equiv 7^{2015}\,[13]$

Il suffit de montrer que : $7^{2015} \equiv 2\,[13]$

On a : $7 \wedge 13 = 1$; donc : $7^{12} \equiv 1\,[13]$; (théorème de Fermat)

Ainsi : $(7^{12})^{167} \equiv 1\,[13]$ $\qquad (2015 = 12 \times 167 + 11)$

D'où : $7^{12 \times 167} \times 7^{11} \equiv 7^{11}\,[13]$

Donc : $7^{2015} \equiv 7^{11}\,[13]$

On a : • $7 \equiv 7\,[13]$

• $7^2 \equiv 49\,[13]$

$7^2 \equiv 13 \times 4 - 3\,[13]$

Donc : $7^2 \equiv -3\,[13]$

• $7^3 \equiv -21\,[13]$

D'où : $7^3 \equiv 5\,[13]$

• $7^4 \equiv 9\,[13]$

• $7^{11} \equiv 7^3 \times (7^4)^2\,[13]$

$7^{11} \equiv 5 \times (9)^2\,[13]$

$7^{11} \equiv 405\,[13]$

$7^{11} \equiv 31 \times 13 + 2\,[13]$

Par conséquent : $7^{11} \equiv 2\,[13]$

D'où : $7^{2015} \equiv 2[13]$

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation E est :

$$S = \{7 + 13k / k \in \mathbb{Z}\}$$

II/ l'urne U contient 50 boules numérotées de 1 à 50, indiscernables au toucher.

1) Déterminons la probabilité que la boule tirée soit solution de l'équation (E) :

On tire au hasard une boule de l'urne, cette boule porte le numéro n.

Pour que n soit solution de (E) ; il suffit qu'elle s'écrit sous la forme $7 + 13k$ où $k \in \mathbb{Z}$

On a : $1 \leq n \leq 50$; donc : $1 \leq 7 + 13k \leq 50$

D'où : $-\frac{6}{13} \leq k \leq \frac{43}{13}$

Ainsi : $k \in \{0;1;2;3\}$

D'où : $(7 + 13k) \in \{7;20;33;46\}$

Donc : $A = \{7;20;33;46\}$

$p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$ (car les boules sont indiscernables au toucher)

2) On répète l'épreuve précédente trois fois dans les mêmes conditions :

Déterminons la probabilité d'obtenir exactement deux fois une boule dont le numéro solution de (E).

On considère X le nombre de fois, où la boule tirée porte un numéro solution de l'équation; X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{2}{25}$

Ainsi : $p(X = 2) = C_3^2\left(\frac{2}{25}\right)^2\left(1 - \frac{2}{25}\right)^{3-2} = 3\left(\frac{2}{25}\right)^2\left(\frac{23}{25}\right) = \frac{276}{15625}$

Exercice 82 **BAC 2014 (session normale) :**

1) Vérifions que les deux nombres a_1 et a_2 sont premiers :

On a : $a_1 = 31$ et 31 est un nombre premier.

Pour $n = 2$: $a_2 = 331$ et $\sqrt{331} \simeq 18,19$

Les nombres premiers positifs inférieurs à $\sqrt{331}$ sont 2; 3; 5; 7; 11; 13 et 17.

Et chacun de ces nombres ne divise pas 331; donc 331 est un nombre premier; d'où a_2 est premier.

2) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 3a_n + 7 = 10^{n+1}$:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $3a_n + 7 = \underbrace{999..93}_{n\ fois} + 7$

$= 1\ \underbrace{00..0}_{(n+1)zéros} = 10^{n+1}$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*; 3a_n + 7 = 10^{n+1}$

3) Montrons que $(\forall k \in \mathbb{N})$; $10^{30k+2} \equiv 7[31]$:

On a : 31 est un nombre premier et ne divise pas 10, donc d'après le théorème de Fermat : $10^{31-1} \equiv 1[31]$

D'où : $10^{30} \equiv 1[31]$

Ainsi : $(10^{30})^k \equiv 1[31]$

Donc : $10^{30k+2} \equiv 10^2[31]$

Par conséquent : $10^{30k+2} \equiv 7[31]$ (car $10^2 = 3 \times 31 + 7$)

Ainsi : $10^{30k+2} = 7[31]$

4) • Soit $k \in \mathbb{N}$; Montrons que $3a_{30k+1} \equiv 0[31]$:

Soit $k \in \mathbb{N}$; on a : $3a_{30k+1} + 7 = 10^{30k+2}$ (d'après la question précédente)

D'où : $3a_{30k+1} + 7 = 10^{30k+2}$

D'autre part : $10^{30k+2} \equiv 7[31]$

Donc : $3a_{30k+1} + 7 \equiv 7[31]$

Ainsi : $3a_{30k+1} \equiv 0[31]$

• Déduisons que 31 divise a_{30k+1} :

• On a : $3a_{30k+1} \equiv 0[31]$, donc : 31 divise $3a_{30k+1}$ et $3 \wedge 31 = 1$; d'après le théorème de Gauss $31 | a_{30k+1}$

5) Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $n \equiv 1[30]$ alors $a_n x + 31y = 1$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{N}^2$:

Soit $n \in \mathbb{N}$; tel que : $n \equiv 1[30]$; donc $(\exists k \in \mathbb{N}); n = 1 + 30k$

D'où : $a_n = a_{1+30k}$ d'où : 31 divise par a_n (d'après la question 4)

Si $a_n x + 31y = 1$ admet une solution $(x; y)$ alors $31 | a_n$ et $31 | 31y$

D'où : $31 | a_n x + 31y$; donc : $31 | 1$ ce qui est absurde.

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $n \equiv 1[30]$ alors l'équation $a_n x + 31y = 1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$.

info :

Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1;2;3\}$

Si n n'est pas premier alors il existe un nombre premier positif tel que :

$p | n$ et $p \leq \sqrt{n}$

Exercice 83 **BAC 2013 (session normale) :**

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$; n vérifie la propriété (R) :

• Montrons que : $3^n - 2^n \equiv 0[p]$

On a : $3^n - 2^n \equiv 0[n]$, donc : n divise $3^n - 2^n$; et comme p divise n donc p divise $3^n - 2^n$;

D'où : $3^n - 2^n \equiv 0[p]$

Méthode 2:

On a : $3^n - 2^n \equiv 0[n]$; donc : $\exists k \in \mathbb{Z}$; tel que : $3^n - 2^n = nk$

D'où : $3^n - 2^n = pk'k$ (car $p|n$ d'où : $\exists k' \in \mathbb{Z}$; $n = k'p$)

Ainsi : $3^n - 2^n = p(k')$ où $k'' = kk'$

Donc : $3^n - 2^n \equiv 0[p]$

• Déduisons que $p \geq 5$, on a p est premier.

• Si $p = 2$ alors : $3^n - 2^n \equiv 0[p]$; d'où : $3^n \equiv 0[2]$ (car $2^n = 0[2]$; $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$)

Ainsi : $1 \equiv 0[2]$ ce qui est impossible.

• Si $p = 3$

Alors : $3^n - 2^n \equiv 0[3]$ d'où $-2^n \equiv 0[3]$ (car $3^n - 2^n = 0[3]$ et $3^n = 0[3]$)

D'où : $2^n \equiv 0[3]$; ainsi : $3|2^n$; d'où : $3|2$ ce qui est absurde.

Donc : $p \neq 3$

On a donc p est un nombre premier positif et $p \neq 2$ et $p \neq 3$ d'où : $p > 5$

b) Montrons que : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ et $3^{p-1} \equiv 1[p]$

On a . p est un nombre premier et p ne divise pas 3 et ne divise pas 2 ($p > 5$).

D'après le théorème de Fermat $2^{p-1} \equiv 1[p]$ et $3^{p-1} \equiv 1[p]$

c) Montrons qu'il existe un couple $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $an - b(p-1) = 1$

c'est-à-dire; montrons que $n \wedge (p-1) = 1$

Par l'absurde :

Supposons que n et $p-1$ ne sont pas premiers entre eux.

Alors : n et $p-1$ admettent un diviseur commun premier q tel que : $q|n$ et $q|p-1$

On a : $q \leq p-1 < p$

D'ou : n admet un diviseur strictement positif plus petit que p ce qui est absurde.

Donc : n et $p-1$ sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bezout:

$(\exists(a;b)\in\mathbb{Z}^2)$; tel que : $an-b(p-1)=1$

d) Montrons qu'il existe un entier naturel k tel que : $nr=1+k(p-1)$

On a : $\begin{cases}a=(p-1)q+r\\ q\in\mathbb{Z};0\le r<p-1\end{cases}$

Donc : $an=nq(p-1)+nr$

D'autre part : $an=1+b(p-1)$; donc : $nq(p-1)+nr=1+b(p-1)$

D'où : $nr=1+b(p-1)-nq(p-1)$

$nr=(p-1)(b-nq)+1$

Le nombre $b-nq$ est un entier, montrons qu'il est positif.

$nr=1+(p-1)\times k$ où $k=b-nq$

• Si $k=0$ alors : $nr=1$; donc : $n=1$ ce qui est absurde.

• Si $k<0$ alors : $b-nq<0$; d'où : $b-nq\le -1$;

d'où : $(b-nq)(p-1)\le 1-p$

D'où : $(b-nq)(p-1)+1\le 2-p$; d'où : $nr\le 2-p$

or $p\ge 5$ donc : $2-p<0$, d'où : $nr<0$ ce qui est absurde, car $r>0$

et $n\ge 2$

Par conséquent : $b-nq=k$ est un entier naturel, et on a :

$nr=1+k(p-1)$

2) Déduisons qu'il n'existe aucun entier naturel n supérieur à 1 qui vérifie la propriété (R) :

Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que : $3^n\equiv 2^n[n]$

Donc : $\exists(r;k)\in\mathbb{N}^2$; $rn=1+k(p-1)$ où p est le plus petit diviseur premier de n et $p\ge 5$

Par suite : $3^{rn}\equiv 2^{rn}[p]$

C'est-à-dire : $3^{1+k(p-1)}\equiv 2^{1+k(p-1)}[p]$

D'où : $3(3^{p-1})^k\equiv 2\times(2^{p-1})^k[p]$

Ainsi : $3\times 1^k\equiv 2\times 1^k[p]$

Par conséquent : $3\equiv 2[p]$ (car $2^{p-1}\equiv 1[p]$ et $3^{p-1}\equiv 1[p]$)

Donc : $p|1$ ce qui est absurde.

Ainsi : il n'existe pas d'entier n strictement supérieur à 1 vérifiant (R).

Exercice 84 **BAC 2012 (session normale) :**

1) a) Déterminons $195 \wedge 143$

On a: $195 - 143 + 52$; $143 - 2 \times 52 + 39$; $52 - 1 \times 39 + 13$

et $39 = 3 \times 13 + 0$

Donc, le dernier reste non nul est 13: ainsi: $195 \wedge 143 = 13$

Info:

Dans $\mathbb{Z}^2$, l'equation (E) $ax + by = c$ admet des solutions si et seulement si $(a \wedge b)/c$

On a: $143 \wedge 195 = 13$ et $13/52$; donc l'équation admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$

b) Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$; l'équation (E)

Soit $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ solution de (E)

On a: $143x - 195y = 52$

En divisant par 13 ; on a: $11x - 15y = 4$

On a: $11x - 15y = 4 \Leftrightarrow 11x - 15y = 11 \times (-1) - 15(-1)$

$\Leftrightarrow 11(x+1) = 15(y+1)$

Et comme $11 \wedge 15 = 1$, alors d'après le théorème de Gauss ; on a: $15/x + 1$

$$(E) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) \begin{cases} 11(x+1) = 15(y+1) \\ x+1 = 15k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) \begin{cases} x = 15k - 1 \\ 11(15k) = 15(y+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) \begin{cases} x = 15k - 1 \\ y = 11k - 1 \end{cases}$$

Donc: L'ensemble des solutions de l'équation (E)

est $S = \{(-1 + 15k; -1 + 11k) / k \in \mathbb{Z}\}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \wedge 5 = 1$; montrons que $n^{4k} \equiv 1[5]$ pour tout k de $\mathbb{N}$

On a $n \wedge 5 = 1$ et 5 est un nombre premier, d'après le théorème de Fermat:

$n^4 \equiv 1[5]$

Soit $k \in \mathbb{N}$; on a: $(n^4)^k \equiv 1^k[5]$; d'où $n^{4k} \equiv 1[5]$

3) a) Soit x et y deux éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que: $x = y[4]$

On a: $x \equiv y[4] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}; x = y + 4k$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}; x = y + 4k$ ou $y = x + 4k$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que: $n \wedge 5 = 1$. Supposons que $x - y + 4k$

Ainsi $n^x = n^{y+4k} = n^y \times n^{4k}$; et puisque $n^{4k} \equiv 1[5]$ car $n \wedge 5 = 1$

Alors $n^x \equiv n^y[5]$

• Le résultat est le même si $y = x + 4k$; où $k \in \mathbb{N}$

- Si $n \wedge 5 \neq 1$ alors 5 divise n donc: $n^x \equiv 0$ et $n^y \equiv 0[5]$,

d'où: $n^x \equiv n^y[5]$

Dans tous les cas: $n^x \equiv n^y[5]$

Par conséquent $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $n^x \equiv n^y[5]$

b) • Déduction: Soit $(x;y) \in (\mathbb{N}^*)^2$; et $n \in \mathbb{N}^*$; montrons que $n^x \equiv n^y[10]$

Info:

Si p est premier et $p \mid ab$ alors: $p \mid a$ ou $p \mid b$

Donc: $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$; $p \mid a^k = a \times \ldots \times a \Rightarrow p \mid a$ ou .....ou $p \mid a$ donc $p \mid a$

Soit $(x;y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$

On a: $n^x \equiv n^y[2]$; car n^x et n^y ont la même parité et $n^x \equiv n^y[5]$ (d'après la question précédente)

D'où $2/(n^x - n^y)$ et $5/(n^x - y^y)$ et comme $2 \wedge 5 = 1$, a ors: $2 \times 5/(n^x - n^y)$;

d'où $10/(n^x - n^y)$; donc. $n^x - n \equiv 0[10]$; ainsi $n^x \quad n^y[10]$

4) Montrons n^x et n^y ont le même chiffre des unités dans le système de numération décimal.

Soit $(x;y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $(x;y)$ est solution de (E)

Dans $(\exists k \in \mathbb{N}^*)$; $x = -1 + 15k$ et $y = -1 + 11k$

On a $x - y - 4k$; d'où $x \equiv y[4]$

D'après la question 3) b) ; $n^x \equiv n^y[10]$ (car $x \equiv y[4]$)

Donc n^x et n^y ont le même chiffre d'unités dans le système de numération décimale.

Exercice 85 **BAC 2012 (session rattrapage) :**

1) a) Montrons que 503 est un nombre premier.

On a: $\sqrt{503} \simeq 22,428$ et les nombres premiers positifs inférieurs à $\sqrt{503}$ sont $2;3;5;7;11;13;17;19$

On vérifie aisément qu'aucun de ces nombres ne divise 503

Donc 503 est un nombre premier.

b) Montrons que $7^{502} \equiv 1[503]$ et que $7^{2008} \equiv 1[503]$

Le nombre 503 est premier et ne divise pas 7,

d'après le théorème de Fermat: $7^{503-1} \equiv 1[503]$.

D'où $7^{502} \equiv 1[503]$

Donc: $(7^{502})^4 \equiv 1[503]$

Ainsi: $7^{2008} \equiv 1[503]$

2) a) Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E): $49x - 6y = 1$

Soit $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que: $\begin{cases} 49x - 6y = 1 & (E) \\ 49 \times 1 - 6 \times 8 = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow 49(x-1) = 6(y-8)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 49(x-1) = 6(y-8) \\ 6/49(x-1) \end{cases} \quad \text{(d'après Gauss } 6 \wedge 49 = 1\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6/x-1 \\ 49(x-1) = 6(y-8) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 6k ; k \in \mathbb{Z} \\ 49 \times 6k = 6(y-8) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 6k \\ y = 8 + 49k \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

Donc $S = \{(1+6k; 8+49k) ; k \in \mathbb{Z}\}$

3) a) Soit $N = 1 + 7 + 7^2 + \ldots\ldots + 7^{2007}$

Montrons que $(7^{2006}; N)$ est une solution de l'équation (E)

On a: $N = 1 + 7 + 7^2 + \ldots + 7^{2007} = \frac{7^{2008} - 1}{7 - 1}$; donc: $6N = 7^{2008} - 1$ (1)

D'autre part: $49 \times 7^{2006} = 7^{2008}$

D'où: $6N = 49 \times 7^{2006} - 1$

Ainsi $6N - 49 \times 7^{2006} = -1$

Donc: $49 \times 7^{2006} - 6N = 1$

Ainsi $(7^{2006}; N)$ est une solution de l'équation (E).

b) Montrons que $N \equiv 0[4]$ et $N \equiv 0[503]$

On a: $7 \equiv -1[8]$; donc $7^{2008} \equiv 1[8]$ et $-6 \equiv 2[8]$

Donc: $7^{2008} - 6N \equiv 1 + 2N \quad [8]$

Or: $7^{2008} - 6N = 1$; donc $1 + 2N \equiv 1\ [8]$

Ainsi: $2N \equiv 0\ [8]$ donc $2N = 8k$; avec $k \in \mathbb{N}$. Donc: $N \equiv 0[4]$

• On a: $7^{2008} \equiv 1[503]$ (d'après 1) b) et $7^{2008} - 6N = 1$

Donc: $7^{2008} - 6N \equiv 1[503]$

D'où: $1 - 6N \equiv 1\ [503]$. Ainsi $6N \equiv 0[503]$ et comme $6 \wedge 503 = 1$

Donc $N \equiv 0[503]$

c) Déduisons que N est divisible par 2012

On a $N \equiv 0[4]$ et $N \equiv 0[503]$ et $4 \wedge 503 = 1$

$N \equiv 0[4 \times 503]$ C'est-à-dire $N \equiv 0[2012]$

Autre écriture: $\begin{cases} 4/N \\ 503/N \\ 503 \wedge 4 = 1 \end{cases} \Rightarrow 4 \times 503 / N \Rightarrow 2012 / N$

Info:

si $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ a \equiv b[m] \end{cases}$ et $m \wedge n = 1$, alors: $a \equiv b[mn]$

Exercice 86 **BAC 2011 (session normale) :**

1) Montrons que N est divisible par 11

On a: $N = \underbrace{11.....1}_{2010\ fois} = 11 + 11 \times 10^2 + 11 \times 10^4 + ... + 11 \times 10^{2008}$

$= 11(1 + 10^2 + 10^4 + ... + 10^{2008})$

Donc N est divisible par 11

Méthode 2:

On a: $N = \underbrace{11 - 11}_{2010\ fois}$

$= 1 + 1 \times 10 + 1 \times 10^2 + ... + 1 \times 10^{2009}$

$= \frac{1 - 10^{2010}}{1 - 10} = \frac{10^{2010} - 1}{9}$

Donc : $N = \frac{10^{2010} - 1}{9}$

Ainsi : $9N = 10^{2010} - 1$

On a: $10 \equiv -1\ [11]$

D'où: $10^{2010} \equiv (-1)^{2010}\ [11]$

Par suite: $10^{1020} - 1 \equiv 0 \ [11]$

Donc $9N \equiv 0 \ [11]$ et $9 \wedge 11 = 1$. D'où: $N \equiv 0 \ [11]$

Méthode 3:

utiliser le critère de divisibilité de N par 11.

2) a) • Vérifions que 2011 est un nombre premier.

On a: $\sqrt{2011} \simeq 44,8$

Les nombres premiers positifs inférieur à $\sqrt{2011}$

sont: $2;3;5;7;11;13;17;19;23;29;31;37;41$ et 43

et aucun d'entre eux ne divise 2011, donc: 2011 est premier.

• Montrons que $10^{2010} - 1 = 9N$ (Voir méthode 2) de la question 1

On a: $9N = 10^{2010} - 1$

b) Montrons que 2011 divise $9N$

2011 est premier et $2011 \wedge 10 = 1$

Donc d'après Fermat $10^{2010} \equiv 1 \ [2011]$

D'où: $10^{2010} - 1 \equiv 0 \ [2011]$

Ainsi: $9N \equiv 0 \ [2011]$

Conclusion: 2011 divise $9N$

c) Déduisons que 2011 divise N

On a: $2011/9N$ et $2011 \wedge 9 = 1$ car 2011 est premier

D'après le théorème de Gauss $2011/N$

Ainsi 2011 divise N

3) Montrons que N est divisible par 22121

On a: $11/N$ et $2011/N$; et $11 \wedge 2011 - 1$. D'où $11 \times 2011/N$

Par conséquent 22121 divise N.

Exercice 87 **BAC 2011 (session rattrapage) :**

1) Soit $x \in \mathbb{N}$ tel que: $10^x \equiv 2 \ [19]$

a) Vérifions que $10^{x+1} \equiv 1 \ [19]$

On a: $10^x \equiv 2 \ [19]$, donc $10 \times 10^x \equiv 10 \times 2 \ [19]$

Ainsi : $10^{x+1} \equiv 1 \ [19]$ (car $20 \equiv 1 \ [19]$)

b) Montrons que $10^{18} \equiv 1 \ [19]$

On a 19 est premier et $10 \wedge 19 = 1$

D'après le théorème de Fermat $10^{19-1} \equiv 1[19]$, c'est-à-dire: $10^{18} \equiv 1[19]$

2) a) Soit $d = 18 \wedge (x+1)$

Montrons que $10^d \equiv 1[19]$

On a: $d = 18 \wedge (x+1)$

Donc: $\exists (u;v) \in \mathbb{Z}$; $d = 18u + (x+1)v$ avec u et v ne sont pas de même signe. (Raisonner par l'absurde, en distinguant deux cas: cas1: $u > 0$ et $v > 0$ et cas2: $u < 0$ et $v < 0$)

Ainsi il existe: $u' \in \mathbb{N}$ et $v' \in \mathbb{N}$ / $d = -18u' + (x+1)v'$

ou $d = 18u' - (x+1)v'$. D'où: $10^{d+18u'} = 10^{(x+1)v'}$

Ainsi $10^d \times (10^{18})^{u'} = (10^{x+1})^{v'}$ [19] ; Or $(10^{18})^{u'} \equiv 1[19]$ $(10^{x+1})^{v'} \equiv 1[19]$ (à vérifier). Donc $10^d \equiv 1[19]$

b) Montrons $d = 18$

On a: $d/18$, donc $d \in \{1,2,3,6,9,8\}$ et $10^d \equiv 1[19]$

On vérifie que:

$10^1 = 10[19]$; $10^3 = 12[19]$; $10^9 = 18[19]$

$10^2 \equiv 5[19]$; $10^6 \equiv 13[19]$; $10^{18} \equiv 1[19]$

Donc : $d = 18$

c) Déduisons que $x \equiv 17[18]$

On a: $18 = 18 \wedge (x+1)$, donc: $18/x+1$; d'où $x+1 \equiv 0[18]$

Ainsi $x \equiv -1[18]$, d'où: $x \equiv 17[18]$

Exercice 88 **BAC 2010 (session normale) :**

1) Determinons les entiers naturels m tels que: $m^2 + 1 \equiv 0[5]$

Méthode 1: $m^2 + 1 \equiv 0[5] \Leftrightarrow 5/m^2 + 1$

On a $\begin{cases} 5/m^2+1 \\ 5/5 \end{cases}$, donc: $5/m^2 - 4$

Ainsi: $5/(m-2)(m+2)$

Et puisque 5 est premier, alors $5/m-2$ ou $5/m+2$

Ainsi : $5/m-2$ ou $5/m+2-5$

Donc: $m \equiv 2[5]$ ou $m \equiv 3[5]$

Méthode 2:

On commence par déterminer le tableau de congruence modulo 5

$m \equiv$	0	1	2	3	4
$m^2 \equiv$	0	1	4	4	1
$m^2+1 \equiv$	1	2	0	0	2

Ainsi $m^2+1 \equiv 0[5] \Leftrightarrow m \equiv 2[5]$ ou $m \equiv 3[5]$

$\Leftrightarrow m = 2+5k$ ou $m = 3+5k ; (k \in \mathbb{N})$

2) Soit $p \in \mathbb{N}$; $p = 3+4k$; $k \in \mathbb{N}$ et p est premier

a) Vérifier que $(n^2)^{1+2k} \equiv -1[p]$

On a: $n^2+1 \equiv 0[p]$; donc $n^2 \equiv -1[p]$

Ainsi $(n^2)^{1+2k} \equiv (-1)^{1+2k}[p]$. D'où: $(n^2)^{2k+1} \equiv -1[p]$ (car $1+2k$ est impair)

b) Montrons que les nombres n et p sont premiers entre eux

Méthode 1:

On a $n^2 \equiv -1[p]$, donc p ne divise pas n^2 et par suite p ne divise pas n car p et premier d'où: $p \wedge n = 1$

Méthode 2:

On a: $n^2+1 \equiv 0[p] \Rightarrow p \mid n^2+1$

$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}); n^2+1 = pk$

$\Rightarrow \exists (u;v) \in \mathbb{Z}^2 / up+vn = 1$

où $u = k$ et $v = -n$

Donc d'après le théorème de BEZOUT, on a: $n \wedge p = 1$

c) Déduction:

On a: $n \wedge p = 1$ et p premier, d'après le théorème de FERMAT,

on a: $n^{p-1} \equiv 1[p]$

Puisque: $p = 3+4k$ alors: $n^{2+4k} \equiv 1[p]$; c'est-à-dire: $(n^2)^{1+2k} \equiv 1[p]$

d) Montrons qu'il n'existe pas un nombre entier naturel n qui vérifie:

$n^2+1 \equiv 0[p]$

Supposons $(\exists n \in \mathbb{N})$; $n^2+1 \equiv 0[p]$

On a: $(n^2)^{1+2k} \equiv -1[p]$ et on a $(n^2)^{2k+1} \equiv 1[p]$

Donc: $-1 \equiv 1[p]$ d'où : $2 \equiv 0[p]$

Ainsi: $p \mid 2$ ce qu'est absurde, (car $p = 4k+3$)

Par suite: Il n'existe pas un nombre entier naturel n qui vérifie: $n^2+1 \equiv 0[p]$

6 Calcul de probabilités

Résumé

I Dénombrement (Analyse combinatoire)

1) Principe fondamental de l'analyse combinatoire :

Soit E une expérience nécessitant k choix.
Si le premier choix se fait de n_1 façons différentes et le deuxième choix se fait de n_2 façons différentes,... et le $k^{ième}$ choix de fait n_k façons différentes, alors le nombre de résultats possibles est le produit : $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$.

2) Les nombres A_n^p, $n!$ et C_n^p:

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

• Le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments choisis parmi n est : n^p.

• Le nombre d'arrangements sans répétition de p éléments choisis parmi n où $1 \leq p \leq n$, est; $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots (n-p+1)$
Ce nombre est noté A_n^p, et on a : $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)$.
Le nombre de permutations de n éléments est le nombre d'arrangements sans répétition de n éléments choisis parmi n : $A_n^n = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$.
Le produit : $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$ est noté $n!$ et se lit «factorielle n». On a donc : $A_n^n = n!$.
Par convention, on pose : $0! = 1$ et $1! = 1$

• Le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n est : $\frac{A_n^p}{p!}$.
Ce nombre est noté C_n^p, et on a : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

Conséquences:

Pour tout entier naturel non nul n, et pour tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$, on a :

- $C_n^p = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$
- $(p \neq 0)$; $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
- $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$
- $C_n^p = C_n^{n-p}$

- $C_n^1 = n$
- $C_n^{n-1} = n$
- $C_n^n = 1$
- $C_n^0 = 1$

$$(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2);(\forall n \in \mathbb{N}^*);(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

Exercices d'application

Exercice 1

Un sac contient 3 boules blanches, deux boules noires et une boule rouge.

1) On tire successivement et avec remise 3 boules du sac

a) Quel est le nombre de résultats possibles?

b) Quel est le nombre de résultats contenant 3 boules de même couleur?

c) Quel est le nombre de résultats contenant une boule de chaque couleur?

2) On tire maintenant successivement et sans remise 3 boules du sac.

Répondre aux questions précédentes.

3) On tire maintenant simultanément 3 boules du sac.

Répondre aux questions précédentes.

4) On tire maintenant successivement et sans remise toutes les boules du sac

a) Quel est le nombre de résultats possibles?

b) Quel est le nombre de résultats où une boule noire apparaît pour la première fois au deuxième tirage?

Exercice 2

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \sum_{k=1}^{n} C_n^k 9^k (-2)^{n-k} - 7^n - (-2)^n$

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.

Calculer :

1) $\sum_{p=1}^{n} C_n^p$

2) $\sum_{p=1}^{n+1} C_n^{p-1} x^{p-1}$ où $x \in \mathbb{R}^*$

1) Montrer que : $(\forall (n;p) \in (\mathbb{N}^*)^2)$; $p \leq n$; $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$

2) En déduire que : $\sum_{p=1}^{n} pC_n^p x^{p-1} = n(x+1)^{n-1}$ où x est un réel non nul.

Solutions

Exercice 1

Le sac contient 3 boules blanches, deux boules noires et une boule rouge. Le nombre total de boules dans le sac est 6.

1) On tire successivement et avec remise 3 boules du sac.

1) a) On tire successivement et avec remise 3 boules du sa, donc chaque tirage est un arrangement avec répétition de 3 éléments choisis parmi 6. Le nombre de résultats (tirages) possibles est donc le nombre d'arrangements avec répétition de 3 éléments choisis parmi 6 soit : $6^3 = 216$.

b) Pour obtenir 3 boules de même couleur, il faut :

• Tirer 3 boules blanches parmi 3; le nombre de choix est $3^3 = 27$

ou

• Tirer 3 boules noires (bien que dans le sac il n'y ait que 2 boules noires); le nombre de choix est $2^3 = 8$

ou

• Tirer 3 boules rouges (bien que dans le sac il n'y a qu'une seule boule rouge); le nombre de choix est $1^3 = 1$

Donc le nombre de résultats (tirages) permettant d'obtenir 3 boules de même couleur est : $27 + 8 + 1 = 36$

c) Le nombre de résultats (tirages) contenant 3 boules de couleurs différentes deux a deux (une boule de chaque couleur) est : $(3^1 \times 2^1 \times 1^1)3! = 36$

(Le nombre $3! = 6$ est le coefficient de l'ordre des couleurs : NRB ou NBR ou RNB ou RNB ou BRN ou BNR).

2) a) On tire successivement et sans remise 3 boules du sac, donc chaque tirage (résultat) est un arrangement sans répétition de 3 éléments choisis parmi 6;

donc le nombre de résultats (tirages) possible est le nombre d'arrangements sans répétition de 3 éléments choisis parmi 6; soit : $A_6^3 = 120$.

b) Obtenir 3 boules de même couleur dans ce cas c'est obtenir 3 boules blanches (car le tirage est sans remise et le nombre de boules noires est strictement inférieur à 3 de même pour les rouges); donc le nombre de résultats (tirages) dont les 3 boules sont de même couleur, est le nombre de tirages contenant 3 boules blanches, soit : $A_3^3 = 3! = 6$.

c) Le nombre de résultats (tirages) de 3 boules de couleurs deux à deux différentes (une boule de chaque couleur) est : $(A_1^1 \times A_2^1 \times A_3^1) \times 3! = 36$

(Le nombre $3! = 6$ est le coefficient de l'ordre des couleurs : NRB ou NBR ou RNB ou RNB ou BRN ou BNR).

3) a) On tire simultanément 3 boules du sac, donc chaque tirage (résultats) est une combinaison de 3 éléments choisis parmi 6. Donc le nombre de tirages possibles est le nombre de combinaisons de 3 éléments choisis parmi 6; soit : $C_6^3 = 20$

b) Dans ce cas aussi le nombre de tirages de 3 boules de même couleur est le nombre de tirages de 3 boules blanches (parmi 3) c'est donc le nombre de combinaisons de 3 éléments choisis parmi 3 soit : $C_3^3 = 1$

c) Le nombre de résultats (tirages) de 3 boules de couleurs différentes deux à deux (une boule de chaque couleur) est : $C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1 = 6$

(Remarquer que dans ce cas pas de coefficient de l'ordre des couleurs car le tirage des 3 boules se fait en même temps).

4) a) On tire successivement et sans remise toutes les boules du sac, donc chaque tirage (résultat) est une permutation de 6 éléments, donc le nombre de tirages (résultats) possibles est le nombre de permutation de 6 éléments soit : $6! = 720$.

b) Pour obtenir une boule noire pour la première fois au 2ième tirage, il faut : Tirer une boule non noire (parmi 4) au premier tirage, puis tirer une boule noire (parmi 2) au 2ième tirage, puis tirer les 4 boules restantes.

Le nombre de tirages dans ce cas est : $A_4^1 \times A_2^1 \times 4! = 192$

Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \sum_{k=1}^{n} C_n^k 9^k (-2)^{n-k} = 7^n - (-2)^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$;

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} C_n^k 9^k (-2)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k 9^k (-2)^{n-k} - (-2)^n \\ &= (9 \quad 2)^n - (-2)^n \\ &= 7^n - (-2)^n\end{aligned}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \sum_{k=1}^{n} C_n^k 9^k (-2)^{n-k} = 7^n - (-2)^n$

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$;

1) Calculons $\sum_{p=1}^{n} C_n^p$:

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{n} C_n^p &= \sum_{p=0}^{n} C_n^p \quad C_n^0 \\ &= \sum_{p=0}^{n} C_n^p 1^p \times 1^{n-p} - 1 \\ &= (1+1)^n - 1 \\ &= 2^n - 1\end{aligned}$$

Donc : $\sum_{p=1}^{n} C_n^p = 2^n - 1$

2) Calculons $\sum_{p=1}^{n+1} C_n^{p-1} x^{p-1} ; x \in \mathbb{R}^*$:

Soit $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{n+1} C_n^{p-1} x^{p-1} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \times x^k \times 1^{n-k} \\ &= (x+1)^n\end{aligned}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^*);(\forall n \in \mathbb{N}), \sum_{p=1}^{n+1} C_n^{p-1} x^{p-1} = (x+1)^n$

1) Montrons que : $\forall (n;p) \in (\mathbb{N}^*)^2 ; pC_n^p - nC_n^n$ avec $p \leq n$

Soit n et p deux entiers naturels non nuls tels que : $p \leq n$

$$pC_n^p = p \times \frac{n!}{p!(n-p)!}$$
$$= \frac{p \times n \times (n-1)!}{p \times (p-1)! \times (n-p)!}$$
$$= n \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!}$$
$$= nC_{n-1}^{p-1}$$

Donc : $\forall (n;p) \in (\mathbb{N}^*)^2 ; p \leq n ; pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$

2) Déduisons que : $\sum_{p=1}^{n} pC_n^p x^{p-1} = n(x+1)^{n-1}$

Soit $\forall (n;p) \in (\mathbb{N}^*)^2 ; p \leq n$

$$\sum_{p=1}^{n} pC_n^p x^{p-1} = \sum_{p=1}^{n} nC_{n-1}^{p-1} x^{p-1}$$
$$= n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} x^{k}$$
$$= n(x+1)^{n-1}$$

Donc : $(\forall (n;p) \in (\mathbb{N}^*)^2 ; p \leq n) ; \sum_{p=1}^{n} pC_n^p x^{p-1} = n(x+1)^{n-1}$

II Stabilité de la fréquence d'un événement – Probabilité d'un événement

1) Probabilité d'un événement

Définition

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

• Lorsque la fréquence d'un événement élémentaire $\{\omega_i\}$ se stabilise en une valeur p_i, on dit que la probabilité de l'événement $\{\omega_i\}$ est p_i et on note : $p(\{\omega_i\}) = p_i$

• Pour tout événement $A = \{\omega_1;\omega_2;\ldots;\omega_k\}$ inclus dans Ω, la probabilité de A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le compose : $p(A) = p_1 + p_2 + \ldots + p_k$

Propriétés

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

• $p(\Omega) = 1$ • $p(\phi) = 0$

• Pour tout événement A, $0 \leq p(A) \leq 1$

• Si A et B sont deux événements incompatibles $(A \cap B = \phi)$, alors :

$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

• Pour tout événement A, on a : $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ (où $\overline{A}$ est l'événement contraire de l'événement A).

• Pour tout événement A et B, on a :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

• L'événement $A \cap B$ est réalisé si les deux événements A et B sont vérifiés.

• L'événement $A \cup B$ est réalisé si au moins l'un des événements A et B est réalisé.

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

Lorsque toutes les éventualités élémentaires ont la même probabilité, on dit que la probabilité est uniforme; on dit aussi qu'on est dans le cas de l'équiprobabilité.

Dans ce cas, la probabilité d'un événement A est : $p(A) = \frac{Card A}{Card \Omega}$.

Exercices d'application

Exercice 5

Soit A et B deux événements associés à une même expérience aléatoire tels que : $p(A) = \frac{1}{2}$; $p(B) = \frac{2}{7}$ et $p(A \cap B) = \frac{3}{14}$

1) Calculer : $p(A \cup B)$ et $p(\overline{A})$.

2) a) Vérifier que : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

b) En déduire que : $p(\overline{A} \cup \overline{B})$ puis $p(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Exercice 6

On considère un dé cubique numéroté de 1 à 6 tel que :

$p(\{1\}) = p(\{2\}) = 2p(\{3\}) = 3p(\{4\}) = p(\{5\}) = p(\{6\})$

1) Calculer la probabilité d'apparition de chaque face.

2) Calculer la probabilité de l'événement A : «Obtenir un numéro pair».

Exercice 7

On considère un dé cubique numéroté de 1 à 6 tel que la probabilité d'apparition de chaque face est proportionnelle au numéro porté par cette face.

1) Calculer $p(\{i\})$ pour tout $1 \leq i \leq 6$.

2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : «Obtenir un nombre impair».

B : «Obtenir un nombre premier».

Exercice 8 (Écriture braille)

Louis Braille (1809-1852) a découvert un système d'écriture tactile à points saillants à l'usage des personnes aveugles.

Chaque caractère de ce système est formé par un à six points en reliefs représenté dans une matrice de six points sur deux colonnes.

Exemples :

1) a) Déterminer le nombre de caractères représentés par un point.

b) Déterminer le nombre de caractères représentés par deux points exactement.

2) Quel le nombre de caractères distincts possible que l'on peut écrire avec ce système?

3) On choisi au hasard un caractère de système. (Tous les caractères ont la même probabilité d'être choisi).

Calculer la probabilité de l'événement :

A : «Ce caractère est formé d'au moins 4 points».

Exercice 9

Une fourmi se déplace d'une façon aléatoire sur une grille à partir du point A pour arriver au point B. Le déplacement de cette fourni ne peut se faire que : soit vers le haut, soit vers la droite (mais ni vers la gauche ni vers le bas). (Voir figure)

1) Quel est le nombre de chemins possibles pour aller de A et B ?

2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : «Le chemin de la fourmi passe par C »

E_2 : «Le chemin de la fourmi passe par E »

E_3 : «Le chemin de la fourmi passe par les points E et F »

E_4 : «Le chemin de la fourmi passe par les points E et C ».

Exercice 10

On considère l'ensemble $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

Soit a et b deux éléments de Ω.

1) a) Quelles sont les solutions de l'équation $(E) : (2x \quad a)(4x - b) = 0$?

b) Quelles sont les valeurs de a et b de Ω pour lesquelles l'équation (E) admet deux solutions entières naturelles?

2) On lance deux dés (un rouge et un bleu) équilibrés (non pipés).

a et b sont les numéros donnés par les deux dés (respectivement).

a) Quelle est la probabilité que l'équation (E) associés à ce lancer, admette deux solutions entières naturelles?

b) En déduire la probabilité que l'équation (E) admette au moins une solution n'appartenant pas à $\mathbb{N}$.

Exercice 11 (Type de tirages)

Une urne contient 6 boules blanches, 3 boules rouges et une boule noire.

Les boules sont indiscernables au toucher.

1) On tire, au hasard, successivement et avec remise 5 boules de l'urne

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : «Obtenir 5 boules rouges».

B : «Obtenir 5 boules de même couleur».

C : «Obtenir au moins une boule rouge».

D : «Obtenir au plus une boule rouge».

E : «Obtenir une boule noire, deux boules rouges et deux boules blanches».

2) On tire maintenant (après avoir remi routes les boules tirées dans l'urne) au hasard success vement et sans remise 5 boules de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements A, B, C, D et E.

3) L'urne contient les 10 boules initiales, on tire maintenant au hasard simultanément 5 boules de l'urne.

Calculer la probabilité des événements A, B, C, D et E.

Exercice 12

Une urne contient n boules ($n \geq 9$ et n est un multiple de 3) numérotées telles que :

- Le tière de ces boules porte le n°1.
- Un autre tiere de ces boules porte le n°2.
- Le reste porte le n°3.

On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne. Les boules sont indiscernables au toucher.

1) Calculer, en fonction de n, la probabilité de l'événement :

A : «Obtenir deux boules portant le même numéro».

2) Calculer, en fonction de n, la probabilité de l'événement :

B : «La somme des nombres obtenus est un nombre impair».

Exercice 13

Un sac contient 100 jetons. Certains sont rouges, d'autres sont bleus.

Certains jetons portent le n°0 et d'autres le n°1 selon la représentation donnée par le tableau suivant :

	Jetons bleus	Jetons rouges
Jetons n°0	12	48
Jeton n°1	24	16

Les jetons sont indiscernables au toucher.

1) On tire, au hasard, un jeton de ce sac.

a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

B : «Le jeton tiré est bleu».

R : «Le jeton tiré est rouge».

C : «Le jeton tiré porte le n°1».

D : «Le jeton tiré est bleu et porte le numéro 1».

b) Le jeton tiré est bleu. Quelle est la probabilité qu'il porte le n°1?

2) On tire maintenant, au hasard, successivement et sans remise 3 jetons du sac.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E : «La somme des nombres portés par les jetons tirés est un nombre pair».

F : «Obtenir au moins un jeton rouge».

G : «Obtenir un seul jeton rouge et un seul jeton portant le n°1».

Solutions

Exercice 5

$p(A)=\frac{1}{2}$; $p(B)=\frac{2}{7}$ et $p(A\cap B)=\frac{3}{14}$

1) • Calculons $p(A\cup B)$:

On a : $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

$$-\frac{1}{2}+\frac{2}{7}-\frac{3}{14}-\frac{4}{7}$$

Donc : $p(A\cup B)=\frac{4}{7}$

• Calculons $p(\overline{A})$:

$p(\overline{A})=1-p(A)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Donc : $p(\overline{A})=\frac{1}{2}$

2) a) Vérifions que : $\overline{A\cap B}=A\cup\overline{B}$

Soit $x\in\Omega$ où Ω est 'univers.

$x\in\overline{A\cap B}\Leftrightarrow x\notin(A\cap B)$

$\Leftrightarrow x\notin A$ ou $x\in B$

$\Leftrightarrow x \in \overline{A}$ ou $x \in B$

$\Leftrightarrow x \in A \cup B$

Donc : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

b) • Déduisons $p(A \cup B)$:

On a : $p(\overline{A} \cup \overline{B}) = p(\overline{A \cap B})$

$= 1 - p(A \cap B)$

$= 1 - \frac{3}{14}$

$= \frac{11}{14}$

Donc : $p(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{11}{14}$

• Déduisons $p(\overline{A} \cap \overline{B})$:

On a : $p(\overline{A} \cup \overline{B}) = p(\overline{A}) + p(\overline{B}) - p(A \cap B)$

Donc : $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A}) + p(\overline{B}) - p(\overline{A} \cup \overline{B})$

$= \frac{1}{2} + \frac{5}{7} - \frac{11}{14}$

$= \frac{3}{7}$

Donc : $p(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{3}{7}$

Remarque :

On peut montrer (comme dans 2)a)) que : $A \cap B = A \cup B$

Donc : $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B)$

Exercice 6 (Dé pipé)

1) Calculons la probabilité d'apparition chaque face:

On a : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$ l'univers associé au lancer de ce dé.

Donc : $p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{4\}) + p(\{5\}) + p(\{6\}) = 1$

comme : $p(\{2\}) = p(\{5\}) = p(\{6\}) = p(\{1\})$

$p(\{3\}) = \frac{1}{2} p(\{1\})$

$p(\{4\}) = \frac{1}{3} p(\{1\})$

Alors : $\frac{29}{6}p(\{1\}) = 1$

D'où : $p(\{1\}) = \frac{6}{29}$

Donc : • $p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{5\}) = p(\{6\}) = \frac{6}{29}$

• $p(\{3\}) = \frac{3}{29}$

• $p(\{4\}) = \frac{2}{29}$

2) Calculons $p(A)$:

A : «est l'événement d'obtenir un nombre pair»

On a : $A = \{2;4;6\}$

Donc : $p(A) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\})$

$= \frac{6}{29} + \frac{2}{29} + \frac{6}{29}$

$= \frac{14}{29}$

Attention !

Ne pas faire ce raisonnement :

$A = \{2;4;6\}$ donc : $CardA = 3$ or $Card\Omega = 6$

Donc : $p(A) - \frac{CardA}{Card\Omega} - \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Ceci n'est pas valable car il n'y a pas équiprobabilité dans ce cas (le dé n'est pas équilibré $p(\{1\}) \neq p(\{3\})$).

Exercice 7 **(Dé pipé)**

1) Calculons $p(\{i\})$ pour tout $1 \leq i \leq 6$

On note : $p_i = p(\{i\})$

Puisque la probabilité d'apparition de chaque face est proportionnelle au numéro porté par cette face, alors :

$$\frac{p_1}{1} = \frac{p_2}{2} = \frac{p_3}{3} = \frac{p_4}{4} = \frac{p_5}{5} = \frac{p_6}{6} = \frac{\sum_{i=1}^{6} p_i}{1+2+3+4+5+6}$$

Or : $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$; donc : $\frac{p_1}{1} = \frac{p_2}{2} = \frac{p_3}{3} = \frac{p_4}{4} = \frac{p_5}{5} = \frac{p_6}{6} = \frac{1}{21}$

D'où : $p_1 = \frac{1}{21}$; $p_2 = \frac{2}{21}$; $p_3 = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$; $p_4 = \frac{4}{21}$; $p_5 = \frac{5}{21}$

et $p_6 = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

2) • Calculons $p(A)$:

A : «Obtenir un nombre impair»

On a : $A = \{1;3;5\}$

Donc : $p(A) = p_1 + p_3 + p_5$

$$= \frac{1}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21}$$

$$= \frac{9}{21}$$

$$= \frac{3}{7}$$

D'où : $p(A) = \frac{3}{7}$

• Calculons $p(B)$:

B : «Obtenir un nombre premier»

On a : $B = \{2;3;5\}$

Donc : $p(B) = p_2 + p_3 + p_5$

$$= \frac{2}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21}$$

$$= \frac{10}{21}$$

$$= \frac{3}{7}$$

D'où : $p(B) = \frac{10}{21}$

Exercice 8 (Ecriture Braille)

1) a) Déterminons le nombre de caractères représentés par un point :

Chaque caractère représenté par un point est une combinaison d'un élément choisit parmi 6.

Donc le nombre total de ces caractères est : $C_6^1 = 6$. (Cela correspond au 6 places possibles pour p acer un point sur une matrice).

b) Déterminons le nombre de caractères représentés par 2 points :

Chaque caractère représenté par deux points est une combinaison de deux éléments choisis parmi 6, donc le nombre total de ces caractères est : $C_6^2 \quad 15$.

2) Déterminons le nombre total de caractères que l'on peut écrire avec ce système :

Chaque caractère de ce système est formé d'au moins un point choisi parmi 6.

Le nombre de caractère formés de k points distincts $(1 \leq k \leq 6)$ est : C_6^k.

Donc le nombre de caractères de ce système est : $\sum_{k=1}^{6} C_6^k$.

$$\sum_{k=1}^{6} C_6^k - \sum_{k=0}^{6} C_6^k - 1$$
$$= 2^6 - 1$$
$$= 63$$

Le nombre total de caractères du ce système est 63.

On choisi au hasard un caractère de ce système.

3) Calculons $p(A)$:

où A est l'événement «le caractère est formé d'au moins 4 points»

On a : $CardA = C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 22$

$Card\Omega = 63$ (d'après la question 2)

Donc : $p(A) = \frac{22}{63}$ (car il y a équiprobabilité).

Exercice 9 (Déplacement d'une fourmi)

1) Déterminons le nombre de chemins possibles :

On désigne par :

- D : un déplacement de la fourmi vers la droite

  (1 déplacement = passage d'un noeud au noeud le plus proche)

- H : un déplacement de la fourmi vers le haut.

Tout chemin, de la fourmi, pour passer du point A au point B est formé de 5 déplacements :

  * 3 fois D (le nombre de ces choix est C_5^3)

  * 2 fois H (le nombre de ces choix est C_2^2)

Exemples de ces chemins : $(D;H;D;H;H);(H;H;D;H;D);...$

Donc le nombre de chemins possible est : $C_5^3 \times C_2^2 = 10$.

2) Calculons $p(E_K)$ pour $1 \leq K \leq 4$:

- $E_1 = \{(D;D;H;H;D);(D;D;H;D;H);(D;D;D;H;H)\}$

Donc : $CardE_1 = 3$ or $Card\Omega = 10$ (d'après la question 1).

Donc : $p(E_1) = \frac{3}{10}$ (car il y a équiprobabilité).

Remarque :

On peut calculer $Card\ E_1$ sans exploiter ces éléments :

Pour passer par le point C venant de A, il faut :

• 2 déplacements à droite : (1 seul choix)

• une fois en C, il faut effectuer 1 déplacement à droite à choisir parmi les 3 restant : (Le nombre de ces choix est : $C_3^1 = 3$).

(Après avoir choisi ce dernier déplacement à droite les 2 autres déplacements vers le haut sont fixés; 1 seul choix).

(On peut aussi choisir d'abord les 2 déplacements vers le haut à effectuer une fois en C (parmi 3) : Le nombre de ces choix est : $C_3^2 = 3$); après ce choix, le déplacement vers la droite est fixé : 1 seul choix= C_2^2).

Donc : $CardE_1 = 1 \times C_3^1 \times 1 = 3$

• E_2 : «Le chemin de la fourmi passe par E »

$E_2 = \{(D;H;D;D;H);(D;H;H;D;D);(D;H;D;H;D)$
$(H;D;D;D;H);(H;D;D;H;D),(H;D;H;D;D)\}$

Donc : $CardE_2 = 6$

D'où : $p(E_2) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

• E_3 : «Le chemin de la fourmi passe par les points E et F »

$E_3 = \{(D;H;H;D;D);(D;H;D;H;D);(H;D;D;H;D);(H;D;H;D;D)\}$

Donc : $CardE_3 = 4$

D'où : $p(E_3) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

• E_4 : «Le chemin de la fourmi passe par E et C »

On a : $E_4 = E_1 \cap E_2 = \phi$

Donc : $p(E_4) = 0$

Il est donc impossible que la fourmi passe par les points E et C en un seul chemin.

Exercice 10

1) a) Déterminons les solutions de l'équation (E)

Soit $x \in \mathbb{R}, (2x-a)(4x-b)=0 \Longleftrightarrow x=\frac{a}{2}$ ou $x=\frac{b}{4}$

Donc : $S=\left\{\frac{a}{2};\frac{b}{4}\right\}$ (a et b étant deux éléments fixés de Ω)

b) Déterminons les valeurs de a et b de Ω pour lesquelles E admet deux solutions entières

D'après la question 1) $\frac{a}{2}$ et $\frac{b}{4}$ sont les solutions de l'équation (E), et puisque a et b des éléments de $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$

alors : • $\frac{a}{2} \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow a \in \{2;4;6\}$

• $\frac{b}{4} \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow b=4$

2) On lance deux dés (un rouge et un bleu)

On considère les événements :

A : «L'équation (E) admet deux solutions dans $\mathbb{N}$»

B : «L'équation (E) admet au moins une solution n'appartenant pas à $\mathbb{N}$»

a) Calculons $p(A)$:

D'après la question 1)b) l'événement A est réalisé si $a \in \{2;4;6\}$ et $b=4$,

Les deux dés sont équilibrés, il y a donc équiprobabilité : chaque nombre de 1 à 6 a la probabilité d'apparaition égale à $\frac{1}{6}$.

Donc : $p(A)=\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

b) Calculons $p(B)$:

Remarquer que : $B=A$

Donc : $p(B)=1-p(A)=\frac{11}{12}$.

Exercice 11 (Types de tirages)

1) On tire, au hasard, successivement et avec remise 5 boules de l'urne donc chaque tirage est un arrangement avec répétition de 5 éléments choisi parmi 10, donc : $Card\Omega=10^5$ (où Ω est l'univers des éventualités).

6Ⓑ 3Ⓡ 1Ⓝ

• Calculons $p(A)$:

où A est l'événement «Obtenir 5 boules rouges»

Tout tirage de 5 boules rouges est un arrangement avec répétition de 5 éléments parmi 3,

Donc : $CardA = 3^5 = 243$

Étant donné que le tirage est au hasard, et que les boules sont indiscernables au toucher, alors il y a équiprobabilité. Donc : $p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{243}{10^5}$

Remarque : On peut aussi calculer $p(A)$ d'une autre façon :

$p(A) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \quad \left(\frac{3}{10}\right)^5 = \frac{243}{10^5}$

• Calculons $p(B)$:

où B est l'événement «Obtenir 5 boules de même couleur»

Puisque le tirage est avec remise, alors on peut obtenir la même boule plusieurs fois. Obtenir 5 boules de même couleurs, signifie qu'il faut tirer soit :

5 boules blanches (Nombre de choix : 6^5).

ou 5 boules rouges (Nombre de choix : 3^5).

ou 5 boules noires (Nombre de choix : 1^5).

Donc : $CardB = 6^5 + 3^5 + 1 = 8020$

D'où : $p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{8020}{10^5} = \frac{401}{5000} \simeq 0,0802$

• Calculons $p(C)$:

Méthode 1 (utilisation de l'événement contraire)

L'événement contraire de l'événement C est l'événement $\overline{C}$ «Ne pas obtenir de boule rouge»

On a : $p(\overline{C}) = \frac{7^5}{10^5}$, donc : $p(C) = 1 - \frac{7^5}{10^5} \simeq 0,83$

Méthode 2:

Obtenir au moins une boule rouge parmi les 5 boules tirées signifie :

- Obtenir une boule rouge et 4 boules non rouge :

Le nombre de ces choix est : $C_5^1 \times 3^1 \times (10-3)^4$

où C_5^1 est le coefficient relatif au rang de la boule rouge.

ou

- Obtenir 2 boules rouges et 3 non rouges

Le nombre de ces choix est : $C_5^2 \times 3^2 \times (10-3)^3$

ou

- Obtenir 3 boules rouges et 2 non rouges

Le nombre de ces choix est : $C_5^3 \times 3^3 \times (10-3)^2$

ou

- Obtenir 4 boules rouges et 1 non rouge

Le nombre de ces choix est : $C_5^4 \times 3^4 \times (10-3)$

ou

- Obtenir 5 boules rouges;

Le nombre de ces choix est : 3^5

Donc : $CardC = C_5^1 \times 3 \times 7^4 + C_5^2 \times 3^2 \times 7^3 + C_5^3 \times 3^3 \times 7^2 + C_5^4 \times 3^4 \times 7 + 3^5$

$$= \sum_{p=1}^{5} C_5^p \times 3^p \times 7^{5-p} = 83193$$

D'où : $p(C) = \frac{CardC}{Card\Omega} = \frac{83193}{10^5} \sim 0,83$

• Calculons $p(D)$:

où D est l'événement : «Obtenir au plus une boule rouge»

Réaliser l'événement D signifie :

- obtenir une boule rouge et 4 boules non rouge (Le nombre de ces choix est $C_5^1 \times 3^1 \times 7^4$)

ou

- obtenir 5 boules non rouges; (Le nombre de ces choix est 7^5)

Donc : $CardD = C_5^1 \times 3^1 \times 7^4 + 7^5 = 52822$

D'où : $p(D) = \frac{52822}{10^5} \simeq 0,53$

• Calculons $p(E)$:

où E est l'événement : «Obtenir 1 boule noire, 2 boules rouges et 2 boules blanches».

Pour réaliser l'événement E,

- On tire la boule noire (un seul choix $1^1 = 1$) on choisi le rang de cette boule noire parmi les cinq (le nombre de ces choix est $C_5^1 = 5$).

- On tire deux boules rouges parmi les trois (nombre de choix est $3^2 = 9$); on

choisi ensuite 2 rangs (parmi les quatre restant), le nombre de ces choix est $C_4^2 = 6$

On tire deux boules blanches (parmi 6) (le nombre de ces choix est 6^2), ces deux boules vont occuper les deux places (rang) restantes (1 seul choix $= C_2^2$).

Donc : $CardE = (C_5^1 \times 1) \times (C_4^2 \times 3^2) \times (C_2^2 \times 6^2) = 9720$

D'où : $p(E) = \frac{CardE}{Card\Omega} = \frac{9720}{10^5} = \frac{243}{2500} = 0,0972$

2) On tire maintenant successivement et sans remise 5 boules de l'urne qui retrouve sa répétition initiale

Dans ce cas, chaque tirage de 5 boules est un arrangement sans répétition de 5 éléments parmi 10, donc : $Card\Omega = A_{10}^5 = 30240$ (où Ω est le nouveau univers associé à cette expérience).

• Calculons $p(A)$:

Puisque dans cette question, on tire 5 boules successivement et sans remise, le nombre de boules rouges dans l'urne n'est que 3, il est donc impossible, d'obtenir 5 boules rouges, donc : $A = \phi$ et par suite . $p(A) = 0$.

• Calculons $p(B)$:

Obtenir 5 boules de même couleur revient à tirer 5 boules blanches (on ne pas avoir ni 5 boules rouges ni 5 boules noires).

Donc : $CardB = A_6^5 = 720$

Donc : $p(B) = \frac{A_6^5}{A_{10}^5} = \frac{720}{30240} = \frac{1}{42}$

• Calculons $p(C)$:

On a : $p(\overline{C}) = \frac{A_7^5}{A_{10}^5} = \frac{1}{12}$

Donc : $p(C) = 1 - p(\overline{C}) = \frac{11}{12}$

• Calculons $p(D)$:

Pour realiser l'événement D, il faut :

Tirer une seule boule rouge parm. 3 et 4 boules non rouges parmi 7 (le nombre de ces tirages est : $(A_3^1 \times A_7^4) \times C_5$).

où C_5 est le coefficient de l'ordre des couleurs relatif a la position de la boule rouge.

- Tirer 5 boules toutes non rouges (Le nombre de ces tirages est A_7^5)

Donc : $CardD = C_3^1(A_3^1 \times A_7^4) + A_7^5 = 15120$

D'où : $p(D) = \frac{15120}{A_{10}^5} = \frac{1}{2}$

• Calculons $p(E)$:

$$CardE = (C_5^1 \times A_1^1) \times (C_4^2 \times A_3^2) \times (C_2^2 \times A_6^2)$$

(La noire va occuper une place parmi 5) (Les 2 rouges vont occuper 2 places parmi 4)

Donc : $CardE = 5400$

D'où : $p(E) = \frac{5400}{A_{10}^5} = \frac{5}{28}$

3) On tire maintenant simultanément et au hasard 5 boules de l'urne qui retrouve sa répétition initiale.

Dans ce cas, chaque tirage de 5 boules est une combinaison de 5 éléments choisi parmi 10,

donc : $Card\Omega = C_{10}^5 = 252$ (où Ω est l'univers associé à cette expérience).

Dans ce type de tirage, l'ordre n'est pas important, et il n'y pas de répétition.

• Calculons $p(A)$:

Puisque on tire simultanément 5 boules et le nombre de boules rouges est 3, alors (il est impossible de tirer simultanément 5 boules rouges) A est l'événement impossible : $p(A) = 0$

• Calculons $p(B)$:

Avec ce type de tirage et vu que seul le nombre de boules blanches est supérieur ou égal à 5, alors B est l'événement «Obtenir 5 boules blanches»

Donc : $p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{C_6^5}{C_{10}^5} = \frac{6}{252} = \frac{1}{42}$

• Calculons $p(C)$:

C : «Ne pas obtenir de boule rouge»

On a : $Card\overline{C} = C_7^5 = 21$

Donc : $p(\overline{C}) = \frac{21}{252} = \frac{1}{12}$

D'où : $p(C)=1-p(\overline{C})=\frac{11}{12}$

• Calculons $p(D)$:

$CardD=(C_3^1\times C_7^4)+C_7^5=126$

Donc : $p(D)=\frac{126}{252}=\frac{1}{2}$

• Calculons $p(E)$:

On a : $CardE=C_1^1\times C_3^2\times C_6^2=45$

Donc : $p(E)=\frac{45}{252}=\frac{5}{28}$

Exercice 12 **(Types de tirages)**

On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne, donc chaque tirage est un arrangement sans répétition de deux éléments parmi n ; donc : $Card\Omega=A_n^2$ (où Ω est l'univers associé à cette expérience aléatoire).

Le tirage est au hasard, et les boules sont indiscernables, donc il y a equiprobabilité.

1) Calculons $p(A)$:

A est l'événement «Obtenir deux boules portant le même numéro».

Le nombre de boules portant :

• Le n°1 est : $\frac{n}{3}$

• Le n°2 est : $\frac{n}{3}$; (n est un multiple de 3)

• Le n°3 est : $\frac{n}{3}$

Rea ser l'événement A c'est :

Tirer deux boules portant le numéro 1; le nombre de ces tirages est : $A^2_{\frac{n}{3}}$

ou

-Tirer deux boules portant le numéro 2 (Nombre de ces tirages est : $A^2_{\frac{n}{3}}$)

-Tirer deux boules portant le numéro 3 (Nombre de ces tirages est : $A^2_{\frac{n}{3}}$)

Donc : $p(A)=\frac{3\times A^2_{\frac{n}{3}}}{A_n^2}=\frac{3\times\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n}{3}-1\right)}{n(n-1)}=\frac{n-3}{3(n-1)}$

2) • Calculons $p(B)$:

B est l'événement : «La somme des nombres obtenus est un nombre impair».

On rappelle que la somme de deux entiers naturels est impaire si et seulement si ces deux nombres ne sont pas de même parité (un pa r et l'autre impair).

Réaliser l'événement B c'est tirer :

- les numéros 1 et 2

ou

- les numéros 2 et 3

Ne pas oublier que l'ordre est très important dans les tirage avec et sans rem se!

$$Card B = 2\left(A_{\frac{n}{3}}^{1} \times A_{\frac{n}{3}}^{1}\right) + 2\left(A_{\frac{n}{3}}^{1} \times A_{\frac{n}{3}}^{1}\right)$$
$$= 4 \times \left(\frac{n}{3}\right)^2$$

Donc : $p(B) = \dfrac{4\left(\frac{n}{3}\right)^2}{A_n^2} = \dfrac{4n^2}{9n(n-1)}$

Exercice 13

1)

	Jeton bleu	Jeton rouge	Total
Jetons n°0	12	48	60
Jeton n°1	24	16	40
Total	36	64	100

a) • Calculons $p(B)$:

Le sac contient 100 jetons dont 36 sont bleu, donc :

$$p(B) = \frac{36}{100} = \frac{9}{25} = 0,36$$

(Il y a equiprobabilité car le tirage est au hasard et les jetons sont indiscernables au toucher).

• Calculons $p(R)$:

Méthode 1:

On a : $R = \overline{B}$ (car il n'y a que deux couleurs).

Donc : $p(R) = 1 - p(B) = \frac{16}{25} = 0,64$

Méthode 2:

Le nombre de jetons rouges est 64.

Donc : $p(R) = \frac{64}{100} = 0,64$

• Calculons $p(C)$:

C est l'événement «Le jeton tiré porte le n°1»

On a : $CardC = 40$

Donc : $p(C) = \frac{40}{100} = 0,4$

• Calculons $p(D)$:

D est l'événement «Le jeton tiré est bleu et porte le n°1»

$CardD = 24$

Donc : $p(D) = \frac{24}{100} = 0,24$

b) Le jeton tiré est bleu, on est donc dans un nouveau univers : l'ensemble des jetons bleus dont le cardinal est 36.

Parmi les jetons bleus, il y a 24 jetons qui portent le n°1.

Donc la probabilité que le jeton tiré porte le n°1 est : $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

2) On tire maintenant successivement et sans remise 3 jetons du sac.

Donc chaque tirage de 3 jetons est un arrangement sans répétition de 3 éléments choisi parmi 100,

donc : $Card\Omega = A_{100}^3 = 970200$ (où Ω est l'univers associé à cette expérience).

• Calculons $p(E)$:

où E est l'événement «la somme des nombres portés par les jetons tirés est un nombre pair».

Pour que la somme des nombres portés par les 3 jetons tirés soit pair, il faut tirer :

• 1 jeton n°0 et 2 jetons n°1 (Le nombre de ces choix est : $C_3^1 \times (A_{60}^1 \times A_{40}^2)$)

ou

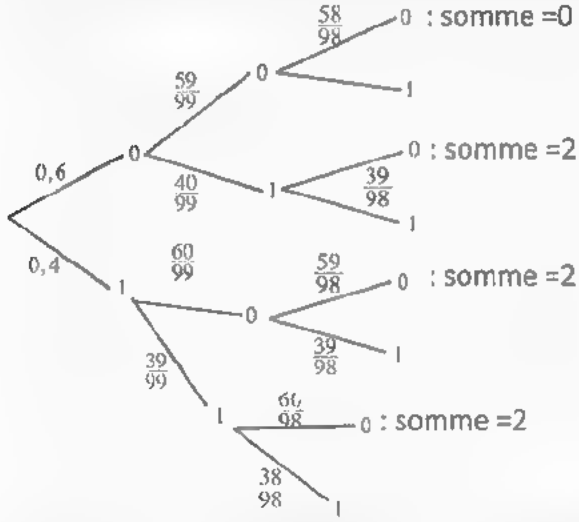
• 3 jetons n°0 (Le nombre de ces choix est : A_{60}^3)

Donc : $CardE = C_3^1 \times (A_{60}^1 \times A_{40}^2) + A_{60}^3 = 486120$

D'où : $p(E) = \frac{486120}{970200} = \frac{4051}{8085}$

Remarque :

On peut calculer $p(E)$ en s'aidant d'un arbre de probabilité.



$$p(E) = \left(0,6 \times \frac{59}{99} \times \frac{58}{98}\right) + 2 \times \left(0,4 \times \frac{60}{99} \times \frac{39}{98}\right) + \left(0,6 \times \frac{40}{99} \times \frac{39}{98}\right)$$

• Calculons $p(F)$:

L'événement contraire de l'événement F est $\overline{F}$ «Ne pas obtenir de jeton rouge».

$$\begin{aligned} p(F) &= 1 - p(\overline{F}) \\ &= 1 - \frac{A_{36}^3}{A_{100}^3} \\ &= \frac{368}{385} \end{aligned}$$

• Calculons $p(G)$:

ou G est l'événement : «Obtenir un seul jeton rouge et un seul jeton n°1»

Réaliser l'événement G c'est tirer :

* Un jeton rouge n°1 et 2 jetons non rouges et numérotés 0. Le nombre de ces tirages est : $(A_{16}^1 \times A_{72}^2) \times C_3^1$

ou

* Un jeton rouge n°0 et un jeton bleu n°1 et un jeton bleu n°0. Le nombre de ces tirages est :

$(A_{18}^1 \times A_{24} \times A_{2}) \times 3!$ (étant donné que les 3 jetons sont deux à deux distincts soit par la couleur soit par le numéro, alors le coefficient de l'ordre est le nombre de permutations de 3 éléments soit 3!).

Donc : $CardG = (A_{16}^1 \times A_{12}^2) \times C_3^1 + (A_{48}^1 \times A_{24}^1 \times A_{12}) \times 3!$

$= 89280$

D'où : $p(G) = \frac{89280}{970200} = \frac{248}{2695}$

III Probabilité conditionnelle - Indépendance de deux événements

Définition

Soit A et B deux événements associés à une même expérience a éatoire telle que : $p(A) \neq 0$

La probabil té de l'événement B, sachant que A est réalisé, est le nombre réel noté $p_A(B)$ (ou $p(B/A)$: ancienne notation) défini par

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Conséquence

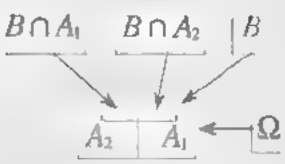
Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.

• Si A et B sont deux événements de Ω ($A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$) tels que : $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$;

Alors : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ et $p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)$

• Si A_1 et A_2 sont deux événements non vides et incompatibles de Ω tels que : $\Omega = A_1 \cup A_2$ (On dit dans ce cas que A et A_2 forment une partition de l'un vers Ω).

A ors, pour tout événement B de Ω, On a : $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)$



D'où : $p(B) = (pB \cap A_1) + (pB \cap A_2)$

$= p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B)$

(Cette loi est appelée «loi des probabilités tota es)

plus généralement : formule des probabil tés totale ·

si A_1, A_2 ..., A_n forment une partition de Ω,

Alors pour tout événement $B(B \subset \Omega)$ on a :

$$p(B) = p(A_1)p_{A_1}(B) + p(A_2)p_{A_2}(B) + .. + p(A_n)p_{A_n}(B)$$

Définition:

Soit A et B deux événements associés à une même expérience aléatoire.

On dit que les événements A et B sont indépendants si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Propriété 2:

Soit A et B deux événements associés à une même expérience aléatoire telle que . $p(A) \neq 0$

A et B sont indépendants si et seulement si : $p_A(B) = p(B)$

Si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$, alors : $p_A(B) = p(B) \Leftrightarrow p_B(A) = p(A)$

Dire que les événements A et B sont indépendants veut dire que la réalisation de l'un d'entre eux n'influe pas celle de l'autre.

Exercices d'application

Exercice 14

Soit A et B deux événements d'un même univers Ω.

1) Dans cette question, $p(A) = \frac{2}{3}$; $p(B) = \frac{1}{4}$ et $p(A \cap B) = \frac{1}{5}$

Calculer $p_B(A)$; $p_A(B)$ et $p(A \cup B)$

2) Dans cette question, $p(A) = \frac{3}{4}$; $p(B) = \frac{3}{7}$ et $p(A \cup B) = \frac{27}{28}$

a) Calculer $p_B(A)$ et $p_A(B)$

b) En déduire : $p(A \cap \overline{B})$, $p(\overline{A} \cap B)$, $p_{\overline{A}}(B)$ et $p_B(A)$

Exercice 15

Soit A et B deux événements d'un même univers Ω.

1) Dans cette question, $p(A) = \frac{7}{9}$; $p(\overline{B}) = \frac{1}{5}$ et $p(\overline{A} \cap B) = \frac{1}{6}$

Calculer : $p_{\overline{A}}(B)$, $p(A \cap B)$, $p(A \cap \overline{B})$, $p_B(A)$, $p_B(A)$ et $p(A \cup B)$.

2) Dans cette question, $p(A) = \frac{5}{6}$; $p_A(B) = \frac{3}{7}$ et $p_{\overline{A}}(B) = \frac{3}{8}$

Calculer $p(A \cap B)$, $p(B \cap \bar{A})$, $p(B)$ et $p(A \cup B)$.

Exercice 16

Soit A et B deux événements indépendants d'un même univers Ω.

1) Montrer que $\overline{A}$ et B sont indépendants.

2) Montrer que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercice 17

Soit A et B deux événements indépendants tels que : $A \subset B$

1) Montrer que : $p(A) \times p(\overline{B}) = 0$

2) Que peut-on déduire pour les événements A et B ?

Exercice 18

Dans une usine deux machines A et B assurent la production tel es que :

- La machine A produit 40% de la production totale.
- 1% des pièces produites par la machine A sont défectueuses.
- 3% des pièces produites par la machine B sont défectueuses.

1) On choisit une pièce au hasard à la sortie de l'usine; toutes les pièces sont indiscernables au toucher.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

F : «La pièce est défectueuse et produite par la machine B»

D : «La pièce est défectueuse»

2) On choisit au hasard une pièce parmi les pièces défectueuses.

Quelle est la probabilité que cette pièce est produite par la machine B ?

Exercice 19

Un carrefour est doté d'un feu tricolore.

Une étude a montrée que :

- 2% des véhicules s'arrêtent au feu vert (quand il clignote).
- 65% des véhicules s'arrêtent au feu orange.
- 97% des véhicules s'arrêtent au feu rouge.

On admet que l'état du feu à l'arrivée du véhicule est aléatoire, et que la probabilité que le feu soit vert est 0,6, celle qu'il soit orange est 0,1.

1) Représenter cette situation par un arbre du probabilité.

2) Quelle est la probabilité que le véhicule observé s'arrête?

3) Le véhicule observé est passé.

Quelle est la probabilité qu'il a brûlé un feu rouge?

Une urne U_1 contient 4 boules blanches et une boule noire.

Une urne U_2 contient 2 boules blanches et 3 boules noires.

On choisit, au hasard, l'une des deux urnes (d'une façon équiprobable) et on en tire une boule au hasard. Toutes les boules sont indescernables au toucher.

1) Construire un arbre représentant cette situation aléatoire.

2) a) Calculer la probabilité de choisir l'urne U_1 et tirer une boule noire.

b) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

N : «Obtenir une boule noire»

B : «Obtenir une boule blanche»

3) La boule tirée est blanche.

Quelle est la probabilité qu'elle soit tirée de l'urne U_1 ?

1) Soit A et B deux événements d'un même univers Ω tels que :

$$p(A) \times p(B) \neq 0$$

Montrer que : $p_B(A) = \dfrac{p_A(B) \times p(A)}{p_A(B) \times p(A) + p_{\overline{A}}(B) \times p(\overline{A})}$

2) On considère 100 dés (cubiques numérotés de 1 à 6) parmi eux 25 sont truqués (pipés).

La probabilité d'obtenir le n°6 avec un dé pipé est $\frac{1}{2}$.

On choisit, au hasard, un dé (parmi les 100) et on le lance.

Sachant que le numéro obtenu est 6, quelle est la probabilité que ce dé est pipé?

Exercice 22

Un sac contient 8 jetons :

- un jeton rouge triangulaire,
- deux jetons verts triangulaires;
- Cinq jetons rouges rectangulaires.

On tire, au hasard, simultanément deux jetons du sac. Tous les jetons sont

ndescernables au toucher.

On considère les événements :

A : «Les jetons tirés sont de même couleur»

B : «Les jetons tirés ont la même forme».

1) a) Calculer $p(A)$, $p(B)$ et $p(A \cap B)$.

b) Les événements A et B sont-ils indépendants? Justifier.

2) Les deux jetons tirés ont la même forme.

Quelle est la probabilité qu'ils aient aussi la même couleur?

Solutions

Exercice 14

1) $p(A) = \frac{2}{3}$; $p(B) = \frac{1}{4}$ et $p(A \cap B) = \frac{1}{5}$

Calculons $p_B(A)$, $p_A(B)$ et $p(A \cap B)$.

• $p_A(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{4}{5}$ • $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{3}{10}$

• $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$= \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$

$= \frac{43}{60}$

2) $p(A) = \frac{3}{4}$, $p(B) = \frac{3}{7}$ et $p(A \cup B) = \frac{27}{28}$

a) Calculons $p_B(A)$ et $p_A(B)$:

• $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$

Il faut d'abord calculer $p(A \cap B)$:

On a : $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$

$= \frac{3}{4} + \frac{3}{7} - \frac{27}{28} = \frac{3}{14}$

Donc : $p_B(A) = \dfrac{\frac{3}{14}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{2}$

• $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{\frac{3}{14}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{7}$

b) Déduisons $p(A \cap \overline{B})$; $p(\overline{A} \cap B)$; $p_{\overline{A}}(B)$ et $p_{\overline{B}}(A)$:

• On a : $A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$ (car B et $\overline{B}$ forment une partition de l'univers).

et puisque : $(A\cap B)$ et $(A\cap\overline{B})$ sont incompatibles (car $A\cap B\subset B$ et $A\cap\overline{B}\subset\overline{B}$) et $B\cap\overline{B}=\phi$

alors : $p(A)=p(A\cap B)+p(A\cap\overline{B})$

Donc : $p(A\cap\overline{B})=p(A)-p(A\cap B)$

D'où : $p(A\cap\overline{B})=\frac{3}{4}-\frac{3}{14}=\frac{15}{28}$

• On a : $B=(B\cap A)\cup(B\cap\overline{A})$ (car A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers).

Donc : $p(B)=p(B\cap A)+p(B\cap\overline{A})$

D'où : $p(B\cap\overline{A})=p(B)-p(B\cap A)$

$=\frac{3}{7}-\frac{3}{14}=\frac{3}{14}$

• $p_{\overline{A}}(B)=\frac{p(B\cap\overline{A})}{p(\overline{A})}=\frac{p(B\cap\overline{A})}{1-p(A)}=\frac{\frac{3}{14}}{\frac{1}{4}}=\frac{6}{7}$

• $p_{\overline{B}}(A)=\frac{p(A\cap\overline{B})}{p(\overline{B})}=\frac{\frac{15}{28}}{\frac{4}{7}}=\frac{15}{16}$

1) $p(A)=\frac{7}{9}$; $p(\overline{B})=\frac{1}{5}$ et $p(\overline{A}\cap B)=\frac{1}{6}$

Calculons $p_{\overline{A}}(B)$; $p(A\cap B)$; $p(A\cap B)$; $p_B(A)$; $p_{\overline{B}}(A)$ et $p(A\cup B)$.

• $p_{\overline{A}}(B)=\frac{p(\overline{A}\cap B)}{p(\overline{A})}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{9}}=\frac{3}{4}$

• On a : $B=(B\cap A)\cup(B\cap\overline{A})$ (car A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers).

Donc : $p(B)=p(B\cap A)+p(B\cap\overline{A})$

D'où : $p(B\cap A)=p(B)-p(B\cap\overline{A})$

$=\frac{4}{5}-\frac{1}{6}=\frac{19}{30}$; ($p(B)=1\quad p(\overline{B})$)

• On a : $A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$

Donc : $p(A)=p(A\cap B)+p(A\cap\overline{B})$

D'où : $p(A\cap\overline{B}) = p(A) - p(A\cap B)$

$= \frac{7}{9} - \frac{19}{30}$

$= \frac{13}{90}$

• $p_B(A) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{19}{30}}{\frac{4}{5}} = \frac{19}{24}$

• $p_{\overline{B}}(A) = \frac{p(A\cap\overline{B})}{p(\overline{B})} = \frac{\frac{13}{90}}{\frac{1}{5}} = \frac{13}{18}$

• $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$

$= \frac{7}{9} + \frac{4}{5} - \frac{19}{30} = \frac{17}{18}$

2) $p(A) = \frac{5}{6}$; $p_A(B) = \frac{3}{7}$ et $p_{\overline{A}}(B) = \frac{3}{8}$

Calculons $p(A\cap B)$; $p(B\cap\overline{A})$; $p(B)$ et $p(A\cup B)$:

• $p_A(B) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)} \Rightarrow p(A\cap B) = p(A)\times p_A(B)$

$\Rightarrow p(A\cap B) = \frac{5}{6}\times\frac{3}{7} = \frac{5}{14}$

• $p(B\cap\overline{A}) = p(\overline{A})\times p_{\overline{A}}(B)$

$= (1 - p(A))\times p_{\overline{A}}(B)$

$= \frac{1}{6}\times\frac{3}{8} = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$

• On a : $B = (B\cap A)\cup(B\cap\overline{A})$

Donc : $p(B) = p(B\cap A) + p(B\cap\overline{A})$

$= \frac{5}{14} + \frac{3}{48}$

$= \frac{47}{112}$

• $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$

$= \frac{5}{6} + \frac{47}{112} - \frac{5}{14} = \frac{43}{48}$

Exercice 16

A et B sont deux événements indépendants, donc :

$$p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$$

1) Montrons que : $\overline{A}$ et B sont indépendants.

On a : $B=(B\cap A)\cup(B\cap A)$

Donc : $p(B)=p(B\cap A)+p(B\cap A)$

D'où : $p(B\cap\overline{A})=p(B)-p(B\cap A)$

$$\begin{aligned}&=p(B)-p(B)\times p(A)\\&=p(B)(1-p(A))\\&=p(B)\times p(\overline{A})\end{aligned}$$

Ce qui signifie que B et A sont indépendants.

2) Montrons que A et B sont aussi indépendants :

Méthode 1:

On a : $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$

Donc : $p(\overline{A}\cap\overline{B})=1-p(A\cup B)$

$$\begin{aligned}&=1-p(A)-p(B)+p(A\cap B)\\&=\underbrace{1-p(A)}-p(B)+p(A)\times p(B)\\&=\quad p(A)\ +p(B)(p(A)-1)\\&=p(A)-p(B)\times p(\overline{A})\\&=p(\overline{A})(1-p(B))\\&=p(A)\times p(B)\end{aligned}$$

$p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$, donc : A et B sont indépendant.

Méthode 2:

Dans la question 1), on a montrer que si A et B sont indépendants, alors : $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants.

$$\begin{aligned}A \text{ et } B \text{ indépendants} &\Rightarrow A \text{ et } B \text{ indépendants}\\&\Rightarrow B \text{ et } \overline{A} \text{ indépendants}\\&\Rightarrow \overline{B} \text{ et } \overline{A} \text{ indépendants}\end{aligned}$$

Exercice 17

A et B sont deux événements indépendants, tels que . $A\subset B$

1) Montrons que : $p(A)\times p(B)=0$

On a : $p(A)\times p(B)=p(A)\times(1-p(B))$

$=p(A)-p(A)\times p(B)$

$=p(A)-p(A\cap B)$

$p(A)\times p(B)=p(A\cap B)$ car A et B sont indépendants).

Or $A\subset B$, donc : $A\cap B=A$. Donc : $p(A\cap B)=p(A)$. D'où, $p(A)\times p(B)=0$

2) Déduction :

On a : $p(A)\times p(\overline{B})=0$. Donc : $p(A)=0$ ou $p(\overline{B})=0$

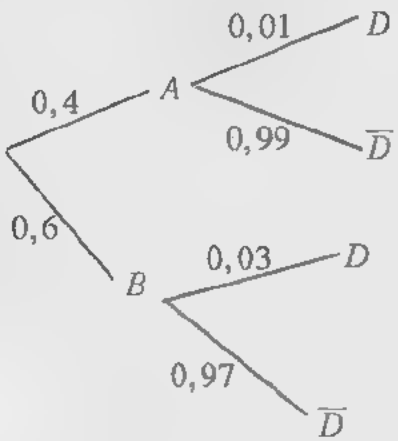
D'où : $A=\phi$ ou $B=\Omega$

On considère les événements :

A : «La pièce provient de la machine A»

B : « La pièce provient de la machine B»

Les données de l'exercices sont représentés sur l'arbre de probabilité suivantes :



1) • Calculons $p(E)$:

E est l'événement «La pièce est défectueuse et produite par la machine B»

D est l'événement «La pièce est défectueuse»

On a : $E=B\cap D$

Donc : $p(E)=p(B\cap D)$

$=p(B)\times p_B(D)$

$=0,6\times 0,03$

$=0,018$

• Calculons $p(D)$:

On a : $D = (D \cap A) \cup (D \cap B)$; (car A et B forment une partition de l'univers) et puisque les événements $(D \cap A)$ et $(D \cap B)$ sont incompatibles,

alors : $p(D) = p(D \cap A) + p(D \cap B)$

$= p(A) \times p_A(D) + p(B \cap D)$

$= 0,4 \times 0,01 + 0,018$

$= 0,022$

2) La pièce choisi est défectueuse; calculons la probabilité qu'elle soit produite par la machine B.

Il s'agit de calculer $p_D(B)$: $p_D(B) = \dfrac{p(B \cap D)}{p(D)}$

$= \dfrac{0,018}{0,022}$

$= \dfrac{9}{11}$

EXERCICE 11

On considère les événements suivants :

V : «Le feu est vert»

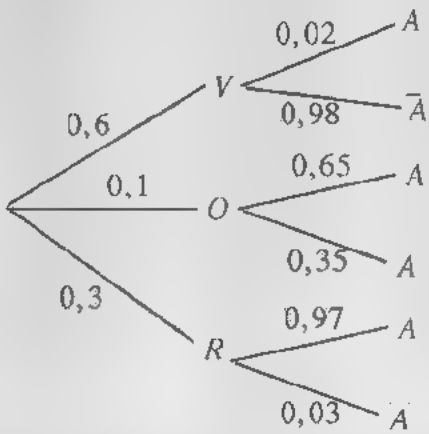
O : «Le feu est orange»

R : «Le feu est rouge»

A : «Le véhicule s'arrête au feu»

$p_V(A) = 0,02$; $p_O(A) = 0,65$; $p_R(A) = 0,97$; $p(V) = 0,6$ et $p(O) = 0,1$

1) Représentation par un arbre de probabilité :



2) Calculons $p(A)$:

On a : $A=(A\cap V)\cup(A\cap O)\cup(A\cap R)$

Les événements V , O et R forment une partition de l'univers, donc :

$p(A)=p(A\cap V)+p(A\cap O)+p(A\cap R)$

$=p(V)\times p_V(A)+p(O)\times p_O(A)+p(R)\times p_R(A)$ (d'après la loi des probabilités totales)

$=(0,6\times 0,02)+(0,1\times 0,65)+(0,3\times 0,97)$

$=0,368$

D'où : $p(A)=0,368$

3) Il s'agit de calculer $p_{\overline{A}}(R)$.

$$p_{\overline{A}}(R)=\frac{p(\overline{A}\cap R)}{p(\overline{A})}=\frac{p(R)\times p_R(\overline{A})}{1-p(A)}=\frac{0,3\times 0,03}{1-0,368}=\frac{0,009}{0,632}=\frac{9}{632}$$

Donc : $p_{\overline{A}}(R)=\frac{9}{632}\simeq 0,014$

On choisit au hasard l'une des urnes et on en tire au hasard une boule.

On considère les événements suivants :

U_i : «Choisir l'urne u_i» avec $i\in\{1;2\}$

N : «Obtenir une boule noire»

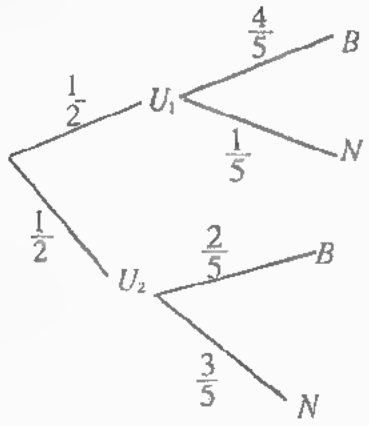
B : «Obtenir une boule blanche»

• Le choix des urnes est équiprobable,

donc : $p(U_1) = p(U_2)$ or $p(U_1) + p(U_2) = 1$ donc : $p(U) = p(U_2) = \frac{1}{2}$

• $p_{U_1}(N) = \frac{1}{5}$; $p_{U_2}(N) = \frac{3}{5}$

1) Arbre des probabilités :



2) a) Calculons $p(U_1 \cap N)$:

$$p(U_1 \cap N) = p(U_1) \times p_{U_1}(N)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$$
$$= \frac{1}{10}$$

Donc : $p(U_1 \cap N) = 0,1$

b) • Calculons $p(N)$:

Les événements U_1 et U_2 forment une partition de l'univers, donc .

$N = (N \cap U_1) \cup (N \cap U_2)$

Donc : $p(N) = p(N \cap U_1) + p(N \cap U_2)$
$= 0,1 + p(U_2) \times p_{U_2}(N)$
$= 0,1 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$
$= 0,1 + 0,3$
$= 0,4$

D'où : $p(N) = 0,4$

• Calculons $p(B)$:

On a : $B = \overline{N}$

Donc : $p(B) = p(\overline{N})$

$= 1 - p(N)$

$= 1 - 0,4$

$= 0,6$

D'où : $p(B) = 0,6$

3) Il s'agit de calculer $p_B(U_1)$

$$p_B(U_1) = \frac{p(B \cap U_1)}{p(B)}$$

$$= \frac{p(U_1) \times p_{U_1}(B)}{p(B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}}{0,6}$$

$$= \frac{0,4}{0,6} = \frac{2}{3}$$

Donc : $p_B(U_1) = \frac{2}{3}$

1) A et B sont deux événements associés à un même un vers tels que :

$$p(A) \times p(B) \neq 0$$

Montrons que : $p_B(A) = \dfrac{p_A(B) \times p(A)}{p_A(B) \times p(A) + p_{\overline{A}}(B) \times p(\overline{A})}$

On a : $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$, (car $p(B) \neq 0$)

Or A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, donc : $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$

D'où : $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$

$= p(A) \times p_A(B) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)$

(d'après la loi des probabilités totales).

D'où : $p_A(B) = \dfrac{p_A(B) \times p(A)}{p(A) \times p_A(B) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)}$

2) On considère les événements :

A : «Choisir un dé pipé»

B : «Choisir le numéro 6»

Il s'agit, dans cette question, de calculer $p_B(A)$.

On a : $p(A) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ (car $B \neq \phi$)

Donc : d'après la question 1): $p_B(A) = \frac{p_A(B) \times p(A)}{p(A) \times p_A(B) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)}$

Or $p(A) = \frac{1}{4}$; $p_A(B) = \frac{1}{2}$; $p_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{6}$

$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = \frac{3}{4}$

Donc : $p_B(A) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{6}\right)} = \frac{1}{2}$. D'où : $p_B(A) = \frac{1}{2}$

Exercice 22

On tire simultanément deux jetons du sac qui en contient 8, donc chaque tirage est une combinaison de 2 éléments parmi 8, d'où : $Card\Omega = C_8^2 = 28$

1) a) • Calculons $p(A)$ et $p(A \cap B)$:

A : «Les jetons tirés sont de même couleur»

B : «Les jetons tirés ont la même forme»

- Le sac contient 6 jetons rouges et deux jetons vert, donc :

$$CardA = C_6^2 + C_2^2 = 16$$

D'où : $p(A) = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$ (car il y a équiprobabilité).

• Calculons $p(B)$:

- Le sac contient 3 jetons triangulaires et 5 jetons rectangulaires,

Donc : $CardB = C_3^2 + C_5^2 = 13$

D'où : $p(B) = \frac{13}{28}$

• Calculons $p(A \cap B)$:

$A \cap B$ est l'événement «Les deux jetons tirés ont même couleur et même forme».

Pour réaliser cet événement, il faut :

- Tirer les deux jetons verts triangulaires

ou

- Tirer 2 jetons rouges rectangulaire parmi 5

Donc : $Card(A \cap B) = C_2^2 + C_3^2 = 11$

D'où : $p(A \cap B) = \frac{11}{28}$

b) Vérifions l'indépendance des événements A et B :

On a : $\begin{cases} p(A \cap B) = \frac{11}{28} \\ p(A) \times p(B) = \frac{4}{7} \times \frac{13}{28} = \frac{13}{49} \end{cases}$

Donc : $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$

D'où : A et B ne sont pas indépendants.

2) Calculons $p_B(A)$:

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{11}{28}}{\frac{13}{28}} = \frac{11}{13}$$

IV Indépendance de deux épreuves - Épreuves répétées

Soit $\mathscr{E}$ une expérience formée de deux épreuves $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$.

Si les résultats de l'une des épreuves sont indépendants des résultats de l'autre épreuve, on dit dans ce cas que cette expérience est formée de deux épreuves indépendantes.

Dans ce cas, si A et B sont des événements associés respectivement aux épreuves $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$, alors . $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ c'est-à-dire les événements A et B sont indépendants.

(Répétition d'épreuves identiques et indépendantes)

On considère une épreuve $\mathscr{E}$ dont le résultat est soit S «succès» de probabilité p, soit S «échec» de probabilité $1-p$.

On répète cette épreuve n fois de suite dans les mêmes conditions.

Les résultats sont 2 à 2 indépendants.

La probabilité de l'événement S_k «Le succès S est réalisé k fois exactement» est : $p(S_k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ pour tout $k = \{0;1;2;...;n\}$.

Exercices d'application

Exercice 24

- On considère un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
- Un sac contient 4 boules rouges et 3 boules vertes. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard simultanément deux boules du sac puis on lance le dé Calculer la probabilité de chacun des événements suivants.

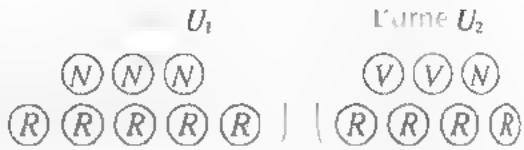
A : «Obtenir deux boules rouges et le n°5».

B : «Obtenir deux boules vertes et un numéro pair».

C : «Obtenir deux boules de couleurs différentes et un multiple de 3»

Exercice 25

- Une urne U_1 contient 5 boules rouges et 3 boules noires.
- Une urne U_2 contient 4 boules rouges, 2 boules vertes et une boule noire.



Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard deux boules de l'urne U_1 simultanément et une boule de l'urne U_2.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants:

A : «Obtenir 3 boules de même couleur».

B : «Obtenir 2 boules rouges exactement».

C : «Obtenir une boule de chaque couleur».

Exercice 25

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules blanches.

Les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne; on répète cette épreuve 9 fois de suite. (Tirage successif et avec remise de 9 boules).

1) Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge deux fois exactement.

2) Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge 6 fois exactement.

3) Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge au moins une fois.

Pour passer un examen, Ali doit répondre à 5 questions 2 à 2 indépendantes. Pour chaque question, Ali doit choir une seule réponse parm' les quatre réponses proposées. Une seule réponse parmi les quatre proposées est exacte

Al n'a pas bien préparé cet examen, et commence à réponde au hasard. (Il y a équiprobabil té dans le choix des réponses de Ali).

1) Montrer que la probabilité que Ali ait obtenu une seule bonne réponse pour les cinq questions est $\frac{405}{1024}$.

2) Calculer la probabilité que Ali ait obtenu 3 bonnes réponse exactement.

3) Calculer la probabilité que Ali ait obtenu au moins une bonne réponse.

4) Pour réussir cet examen, il faut avoir au moins 3 bonnes réponses.

Quelle est la probabilité que Ali réussisse cet examen?

Jn sac contient 4 boules rouges, 3 boules blanches et deux boules noires.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On considère l'épreuve (E) suivante :

«On tire au hasard simultanément trois boules du sac et on les remets dans le sac».

On considère les événements :

A : «Obtenir 3 boules de même couleur»

B : «Obtenir 2 boules exactement de même couleur»

C : «Obtenir au moins une boule blanche»

On répète cette éprouve 6 fois de suite.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

M : «l'événement A est réalisé une et une seule fois»

N : «l'événement B est réalise deux fois exactement»

F : «l'événement C est réalisé au moins deux fois»

Exercice 22

Une urne contient 6 boules portant les nombres -2; -1; 0; 1; 1; 2.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On considère l'épreuve suivante :

(E) : «On tire simultanément 3 boules au hasard de l'urne».

1) On considère les deux événements suivants :

A : «Parmi les boules tirées, il y a au moins une boule portant le nombre 1»

S : «La somme des nombres portés par les 3 boules tirées est nulle»

a) Calculer $p(A)$

b) Montrer que : $p(S) = \frac{1}{5}$

2) On répète l'épreuve (E) 5 fois de suite en remettant les 3 boules tirées avant d'effectuer un nouveau tirage.

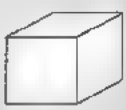
Quelle est la probabilité que l'événement S est réalisé 3 fois exactement?

Solutions

Exercice 23

$V \quad V \quad V$

$R \quad R \quad R \quad R$



L'expérience dans cet exercice est formée de deux épreuves indépendantes :

$\mathscr{E}_1$: «Tirage simultané de deux boules du sac».

$\mathscr{E}_2$: «Lancer du dé».

Calculons $p(A)$ où A est l'événement : «Obtenir deux boules rouges et e n°5».

On considère les deux événements :

E_1 : «Obtenir deux boules rouge». E_1 est associé à l'épreuve $\mathscr{E}_1$.

E_2 : «Obtenir le numéro 5». E_2 est associé à l'épreuve $\mathscr{E}_2$.

On a : $A = E_1 \cap E_2$

Or les deux épreuves $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ sont indépendantes, donc : E_1 et E_2 sont indépendants.

D'où : $p(A) = p(E_1) \times p(E_2) = \frac{C_4^2}{C_7^2} \times \frac{1}{6}$

$= \frac{1}{21}$

Calculons $p(B)$ où B est l'événement «Obtenir deux boules vertes et un nombre pair».

B est l'intersection des deux événements :

F : «Obtenir deux boules vertes». (F_1 est associé à l'épreuve $\mathcal{E}_1$)

et

F : «Obtenir un nombre pair». (F_2 est associé à l'épreuve $\mathcal{E}_2$)

or $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont indépendantes, donc F_1 et F_2 sont indépendants.

$B = F_1 \cap F_2$ et $F_2 = \{2;4;6\}$

Donc : $p(B) = p(F_1) \times p(F_2)$

$$= \frac{C_3^2}{C_7^2} \times \frac{3}{6}$$

$$= \frac{1}{14}$$

Calculons $p(C)$ où C est l'événement : «obtenir deux boules de couleurs différentes et un multiple de 3».

L'événement C est l'intersection des deux événements:

G_1 : «obtenir deux boules de couleurs différentes». (G_1 est associé à l'épreuve $\mathcal{E}_1$).

et G_2 : «obtenir un multiple de 3». (G_2 est associé à l'épreuve $\mathcal{E}_2$).

$C = G_1 \cap G_2$

Donc : $p(C) = p(G_1) \times p(G_2)$; $G_2 = \{3;6\}$

$$= \frac{C_4 \times C_3^1}{C_7^2} \times \frac{2}{6}$$

$$= \frac{4}{21}$$

L'expérience dans cet exerc ce est formée de deux épreuves indépendantes:

$\mathcal{E}_1$: «Tirage simultané de deux boule des U_1 ».

$\mathcal{E}_2$: «Tirage d'une boule de U_2 ».

Calculons $p(A)$ où A est l'événement : «obtenir 3 boules de même couleur».

Pour réaliser l'événement A, il faut :

- tirer simultanément 2 boules rouges de U_1 et une boule rouge de U_2.

ou

- tirer simultanément 2 boules noires de U_1 et une boule noire de U_2.

On considère les événements·

R_1 : «tirer simultanément deux boules rouges de U_1 ». (R est associé à l'épreuve $\mathscr{E}_1$)

R_2 : «tirer une boule rouge de U_2 ». (R_2 est associé à l'épreuve $\mathscr{E}_2$).

N : «tirer simultanément deux boules noires de U_1 ». (N_1 est associé à $\mathscr{E}_1$)

N_2 : «tirer une boule noire de U_2 ». (N_2 est associé à l'épreuve $\mathscr{E}_2$).

On a : $A = (R_1 \cap R_2) \cup (N_1 \cap N_2)$

Les événements $R_1 \cap R_2$ et $N \cap N_2$ sont incompatibles, donc :

$$\begin{aligned} p(A) &= p(R_1 \cap R_2) + p(N_2 \cap N_2) \qquad \text{(car } R_1 \text{ et } R_2 \text{ sont indépendants de même que } N_1 \text{ et } N_2\text{)} \\ &= p(R_1) \times p(R_2) + p(N_1) \times p(N_2) \\ &= \frac{C_5^2}{C_8^2} \times \frac{C_4^1}{C_7^1} + \frac{C_3^2}{C_8^2} \times \frac{C_4^1}{C_7^1} \\ &= \frac{10}{49} + \frac{3}{196} \\ &= \frac{43}{196} \end{aligned}$$

Calculons $p(B)$ où B est l'événement : «obtenir exactement 2 boules rouges».

Pour réaliser l'événement B, il faut :

- tirer simultanément 2 boules rouges de U_1 et une boule non rouge de U_2.

ou

- tirer simultanément une boule rouge et une boule noire de U_1 et une boule rouge de U_2.

Soit B_1 l'événement: «tirer simultanément une boule rouge et une boule noire de U_1 ».

On a alors : $B = (R_1 \cap R_2) \cup (B_1 \cap R_2)$

Les événements $R_1 \cap R_2$ et $B \cap R_2$ sont incompatibles.

Donc : $p(B) = p(R_1 \cap R_2) + p(B_1 \cap R_2)$

$= p(R_1) \times p(R_2) + p(B_1) \times p(R_2)$; (car les événements R et R_2 sont indépendants ainsi que B_1 et R_2)

$= \frac{C_5^2}{C_8^2} \times \frac{C_3^1}{C_7^1} + \frac{C_5^1 \times C_3^1}{C_8^2} \times \frac{C_4^1}{C_7^1}$

$= \frac{15}{98} + \frac{15}{49}$

$= \frac{45}{98}$

Calculons $p(C)$ où C est l'événement « obtenir une boule de chaque couleur».

Pour réaliser l'événement C, il faut tirer simultanément une boule rouge et une boule noire de U_1 et tirer une boule verte de U_2.

Soit V_2 l'événement: «tirer une boule verte de U_2 ».

On a : $C = B_1 \cap V_2$

Donc : $p(C) = p(B) \times p(V_2)$ (car B_1 et V_2 sont indépendants)

$= \frac{C_5^1 \times C_3^1}{C_8^2} \times \frac{C_3^1}{C_7^1}$

$= \frac{15}{98}$

Exercice 25

On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur puis on la remet dans l'urne. On répète cette épreuve 9 fois de suite dans les mêmes conditions, le résultat de chaque épreuve est soit S «obtenir une boule rouge», soit $\overline{S}$ son événement contraire.

La probabilité de l'événement S est : $p = \frac{3}{7}$.

Donc la probabilité de l'événement S_k «obtenir k fois exactement une boule rouge» est : $p(S_k) = C_9^k p^k (1-p)^{9-k}$ pour tout $k \in \{0;1;...;9\}$

1) Calculons la probabilité de l'événement A «obtenir une boule rouge deux fois exactement».

On a : $p(A) = p(S_2)$

$= C_9^2 p^2 (1-p)^7$

$= C_9^2 \left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{4}{7}\right)^7$

$= 0,1315$

2) Calculons $p(B)$ où B est l'évenement «obtenir une boule rouge 6 fois exactement».

On a : $B = S_6$; donc : $p(B) = C_9^6\left(\frac{3}{7}\right)^6 \times \left(\frac{4}{7}\right)^3 \simeq 0,0971$

3) Calculons $p(C)$ où C est l'événement «obtenir une boule rouge au moins une fois».

L'événement contraire de l'événement C est :

$\overline{C}$ «Ne pas obtenir de boule rouge».

On a : $\overline{C} = S_0$

Donc : $p(C) = p(S_0) = C_9^0\left(\frac{3}{7}\right)^0 \times \left(\frac{4}{7}\right)^9 = \left(\frac{4}{7}\right)^9$

D'où : $p(C) = 1 - p(\overline{C}) = 1 - \left(\frac{4}{7}\right)^9 \simeq 0,9935$

Passer cet examen, c'est répondre aux cinq question 5, c'est donc une répétition 5 fois de suite dans les mêmes conditions d'une même épreuve «Répondre au hasard à une question»,

Les épreuves sont 2 à 2 indépendantes, le résultat de chaque épreuve est soit S «La réponse choisie est bonne» soit $\bar{S}$ son événement contraire. On a : $p(S) = \frac{1}{4}$.

La probabilité de l'événement S_k «Ali ait obtenu k réponses justes exactement». est $p(S_k) = C_5^k\left(\frac{1}{4}\right)^k \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{5-k}$ pour tout $K \in \{0;1;2,3;4;5\}$.

1) Montrons que : $p(A) = \frac{405}{1024}$

A est l'événement : «Ali a obtenu une seule réponse exacte».

On a : $A = S_1$

Donc : $p(A) = p(S_1) = C_5^1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{405}{1024}$

2) Calculons $p(B)$ où B est l'événement «Ali a obtenu 3 bonnes réponses exactement».

On a : $B = S_3$

Donc : $p(B) = p(S_3) = C_5^3\left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{45}{512}$

3) Calculons $p(C)$ où C est l'événement «Ali a obtenu au moins une bonne réponse».

L'événement contraire de C est :

$\overline{C}$ «Ali n'a obtenu aucune réponse exacte».

On a : $\overline{C} = S_0$

Donc : $p(\overline{C}) = p(S_0) = \left(\frac{3}{4}\right)^5$

D'où : $p(C) = 1 - p(\overline{C}) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{781}{1024}$

4) Calculons $p(D)$ où D est l'événement «Ali a obtenu au moins 3 réponses exactes».

On a : $D = S_3 \cup S_4 \cup S_5$

Or, les événements S_3, S_4 et S_5 sont 2 à 2 incompatibles,

donc : $p(D) = p(S_3) + p(S_4) + p(S_5)$

D'où : $p(D) = p(B) + C_5^4\left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right) + C_5^5\left(\frac{1}{4}\right)^5$

$= \frac{45}{512} + \frac{15}{1024} + \frac{1}{1024}$

$= \frac{53}{512}$

Donc la probabilité pour que Ali réussisse cet examen en répondant au hasard à toutes les questions est : $\frac{53}{512}$ soit environ 0,1.

Exercice 27

E : «On tire simultanément 3 boules du sac».

A : «Obtenir 3 boules de même couleur».

B : «Obtenir 2 boules exactement de même couleur»

C : «Obtenir au moins une boule blanche»

On répète l'épreuve E 6 fois de suite dans les mêmes conditions.

• Calculons $p(M)$ où M est l'événement : «L'événement A est réalisé une et une seule fois»

• $p(M) = C_6^1 p(A) \times (1 - p(A))^5$

• $p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega}$ (car il y a équiprobabilité)

On a : $CardA = C_4^1 + C_3^1 = 5$

$Card\Omega = C_9^3 = 84$

Donc : $p(A) = \frac{5}{84}$

D'où : $p(M) = C_6^1 \times \frac{5}{84} \times \left(\frac{79}{84}\right)^5 \simeq 0,26$

• Calculons $p(N)$ où N est l'événement : «L'événement B est réalisé deux fois exactement»

$p(N) = C_6^2 (p(B))^2 \times (1 - p(B))^4$

• Calculons $p(B)$:

Soit D l'événement : «Obtenir 3 boules de couleur distincts deux à deux»

On a : $A \cup B \cup D = \Omega$

et puisque les événements A, B et D sont deux à deux incompatibles,

alors : $p(B) = 1 - p(A) - p(D)$

$$= 1 - \frac{5}{84} - \frac{C_4^1 \times C_3 \times C_2}{C_9^3}$$

$$= \frac{79}{84} - \frac{2}{7}$$

$$= \frac{55}{84}$$

$p(N) = C_6^2 \times \left(\frac{55}{84}\right)^2 \times \left(1 - \frac{55}{84}\right)^4 \simeq 0,09$

• Calculons $p(F)$:

où F est l'événement «réaliser l'événement C au moins deux fois»

L'événement contraire de F est : $\overline{F}$: «réaliser C au plus une fois»

$p(F) = 1 - p(\overline{F})$

$p(F) = C_6^0 (p(C))^0 \times (1 \quad p(C))^6 + C_6^1 (p(C)) \times (1 \quad p(C))^5$

Or : $p(C) = 1 - p(C)$

$$\simeq 1 - \frac{C_6^1}{C_9^1} = \frac{16}{21}$$

Donc : $p(\overline{F}) = \left(1 - \frac{16}{21}\right)^6 + 6 \times \frac{16}{21} \times \left(1 - \frac{16}{21}\right)^5$

$$\simeq 0,00368$$

D'où : $p(F) \simeq 0,996$

On tire au hasard simultanément 3 boules de l'urne

1) a) Calculons $p(A)$:

où A est l'événement «Parmi les boules tirées, il y a au moins une boule portant le nombre 1»

On a : $\begin{cases} Card\ A = C_4^3 - 4 \\ Card\Omega = C_6^3 = 20 \end{cases}$

Donc : $p(\bar{A}) = \frac{Card(\bar{A})}{Card\Omega} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$. D'où : $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = \frac{4}{5}$

Remarque : On peut aussi calculer directement $p(A)$ sans passer par $p(\bar{A})$:

$CardA = C_2^1 \times C_4^2 + C_2^2 \times C_4^1 = 16$

$p(A) = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$

b) Montrons que : $p(S) = \frac{1}{5}$

où S : «La somme des nombres portés par les 3 boules tirées est nulle».

Pour que la somme des nombres portés par les boules tirées soit nulle, il faut tirer :

0 1 −1 le nombre de ces cas est : $C_1^1 \times C_2^1 \times C_1^1 = 2$

ou

0 2 −2 le nombre de ces cas est : $C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^1 = 1$

ou

1 1 −2 le nombre de ces cas est : $C_2^2 \times C_1^1 = 1$

Donc : $CardS = 2 + 1 + 1 - 4$

D'où : $p(S) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

2) On répète l'epreuve (E) 5 fois de suite dans les mêmes conditions

Calculons la probabilité de l'événement : G : «L'événement S est réalisé 3 fois exactement»

$p(G) = C_5^3 (p(S))^3 (1 \quad p(S))^2 = C_5^3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2$

$= 10 \times \frac{1}{125} \times \frac{16}{25} = \frac{32}{625}$

Donc : $p(G) = \frac{32}{625} = 0,0512$

Définition 1:

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.

On appelle variable aléatoire, toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$, qui à tout élément de Ω (éventualité) associe un réel. L'ensemble des valeurs prises par X est noté $X(\Omega)$.

- Les variables aléatoires sont généralement notées X, Y, Z,...
- L'événement $(X = a)$ est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe le réel a.
- L'événement $(X > a)$ est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe un réel strictement supérieur à a.

Exemple :

Si $X(\Omega) = \{2;5;6;7\}$, alors :

- $(X > 5) = (X = 6) \cup (X = 7)$
- $(X \leq 5) = (X = 2) \cup (X = 5)$
- $(2 \leq X < 7) = (X = 2) \cup (X = 5) \cup (X = 6)$
- $(X = 2) \cup (X = 5) \cup (X = 6) \cup (X = 7) = \Omega$

Définition 2:

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω

On pose : $X(\Omega) = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$

Définir la loi de probabilité de X consiste à associer à chaque valeur x_i de $X(\Omega)$, la probabilité de l'événement $(X = x_i)$.

On résume généralement la loi de probabilité d'une variable aléatoire X par le tableau :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

(On vérifie que : $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$)

Définition:

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le

tableau :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

• L'espérance mathématique de X est le nombre réel noté $E(X)$ défini e par :

$$E(X) = \sum_{i}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n$$

• La variance de X est le nombre réel positif noté $V(X)$ définie par :

$$V(X) = \sum_{i}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p + ... + (x_n - E(X))^2 p_n$$

ou encore : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ où $E(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + ... + x_n^2 p_n$

• L'écart type de X est le nombre réel positif noté $\sigma(X)$ défini par :

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ (Racine carrée de la variance).

Exercices d'application

Le tableau suivant donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle X :

x_i	2	3	5	7
$p(X=x_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	α	$\frac{1}{5}$

1) Calculer $p(X \leq 3)$.

2) a) Déterminer la valeur de α.

b) Calculer $p(X > 3)$.

3) Calculer $p(3 \leq X \leq 7)$.

4) Calculer l'espérance mathématique de X.

5) Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 10

Soit Y une variable réelle dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

k	-3	1	a	5	6
$p(Y=k)$	0,14	0,23	0,16	0,21	b

On admet que : $E(Y) = 3,06$

1) Déterminer $p(Y=6)$

2) Déterminer la valeur de a.

3) Calculer $p(Y \geq 5)$; $p(Y < 5)$ et $p(-3 < Y \leq a)$

4) Calculer $\sigma(X)$.

Exercice 31

Une urne contient 4 boules blanches numérotees -1;-1;1;1 et trois boules noires numérotées 1;0;1.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le nombre de boules noires parmi les boules tirées.

a) Déterminer les valeurs prises par X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer $E(X)$.

2) Soit Y la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe la somme des nombres portés par ces boules tirées.

a) Déterminer les valeur prises par Y.

b) Déterminer la loi de probabilité de Y.

c) Quelle est la moyenne des sommes possibles?

Exercice 32

Un sac contient 3 jetons rouges et 4 jetons blancs. Tous les jetons indiscernables au toucher.

On tire successivement et sans remise 3 jetons du sac.

Soit X la variable aléatoire égale au rang du premier jeton blanc tire

1) Déterminer $X(\Omega)$.

2) Déterminer la loi de probabilité de X.

3) Calculer $\sigma(X)$.

Exercice 33

Une urne U_1 contient 9 boules : 4 blanches, 3 noires et 2 rouges

1) On tire, au hasard, simultanément 3 boules de l'urne U_1.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de 3 boules, associe le nombre

$2n - 4$ où n est le nombre de boules blanches parmi les 3 boules tirées.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer $E(X)$.

2) On considère une deuxième urne U_2 contenant 10 boules : 7 boules blanches et 3 noires. Toutes ces boules sont indiscernables au toucher

On considère l'expérience suivante :

On tire au hasard une boule de l'urne U_2 on note sa couleur, et on la met dans l'urne U_1, puis on tir, au hasard, une boule de l'urne U_1.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : «La boule tirée dans U_1 est rouge»

E_2 : «La boule tirée dans U_1 est blanche»

Exercice 28

On dispose, d'une façon aléatoire 3 boules numérotées de 1 à 3 dans 4 sacs numérotés de 1 à 4. (Chaque sac peut contenir une à trois boules).

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : «Un seul sac est vide»

B : «Un sac contient toutes les boules»

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de sac vide après cette distribution.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Solutions

Exercice 29

x_i	2	3	5	7
$p(X=x_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	α	$\frac{1}{5}$

1) Calculons $p(X \leq 3)$:

$$p(X \leq 3) = p(X=3) + p(X=2)$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

Donc : $p(X \leq 3) = \frac{5}{8}$

2) a) Déterminons la valeur de α :

On ait que : $\sum_{i=}^{4} p(X = x_i) = 1$

Donc : $\frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \alpha + \frac{1}{5} = 1$

D'où : $\alpha = \frac{7}{40}$

b) Calculons $p(X > 3)$: $p(X > 3) = p(X = 5) + p(X = 7)$

$$= \frac{7}{40} + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

Donc : $p(X > 3) = \frac{3}{8}$

Remarque: $p(X > 3) = 1 - p(X \leq 3)$

$$= 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

3) Calculons $p(3 \leq X < 7)$:

$$p(3 \leq X < 7) = p(X = 3) + p(X = 5) = \frac{17}{40}$$

4) Calculons $E(X)$: $E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p(X = x_i)$

$$= \left(2 \times \frac{3}{8}\right) + \left(3 \times \frac{1}{4}\right) + \left(5 \times \frac{7}{40}\right) + \left(7 \times \frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{151}{40} = 3{,}775$$

Donc : $E(X) = 3{,}775$

5) Calculons $V(X)$ et $\sigma(X)$:

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

- $E(X^2) = \sum$ [illegible]

[illegible] $) + (5^2 \times$ [illegible] $\times 5)$

$= \frac{717}{40}$

Donc : $V(X) = \frac{7}{40}$ [illegible] $\left(\frac{151}{40}\right)^2 \simeq 3{,}67$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \simeq 1{,}92$

Exercice 30

1) Déterminons $p(Y=6)$:

On a : $\sum_{i=1}^{5} p(Y=y_i)=1$

Donc : $0,14+0,23+0,16+0,21+b=1$

D'où : $b=0,26$

2) Déterminons la valeur de a :

On a : $E(Y)=\sum_{i=1}^{5} y_i p(Y=y_i)=3,06$

Donc : $-3\times 0,14+1\times 0,23+a\times 0,16+5\times 0,21+6\times 0,26=3,06$

D'où : $a=4$

3) Calculons $p(Y\geq 5)$; $p(Y<5)$ et $p(-3<Y\leq a)$:

- $p(Y\geq 5)=p(Y=5)+p(Y=6)=0,47$
- $p(Y<5)=p(Y=4)+p(Y=1)+p(Y=-3)$
  $=0,53$
  ••• Ou encore: $p(Y<5)=1-p(Y\geq 5)$
  $=1-0,47=0,53$
- $p(-3<Y\leq a)=p(Y=1)+p(Y=4)=0,39$

4) Calculons $\sigma(X)$:

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{E(Y^2)-(E(Y))^2}$

- $E(Y)=3,06$
- $E(Y^2)=\sum_{i=1}^{5} y_i^2\times p(Y=y_i)$
  $=(9\times 0,14)+0,23+(16\times 0,16)+(25\times 0,21)+(36\times 0,26)$
  $=18,66$

Donc : $\sigma(X)\simeq 3,05$

Exercice 31

1) a) Déterminons $X(\Omega)$:

L'urne contient 3 boules noires et 4 blanches, donc quand on tire simultanément 2 boules On peut obtenir, soit : 1 noire et 1 blanche : $X=1$

ou : 2 noires : $X=2$

ou : 2 blanches : $X=0$

Donc : $X(\Omega)=\{0;1;2\}$

b) Déterminons la loi de probabilité de X :

On a : $X(\Omega)=\{0;1;2\}$ et $Card\Omega = C_7^2 = 21$

$p(X=0)=\frac{C_4^2}{21}=\frac{2}{7}$ (car il y a équiprobabilité)

$p(X=1)=\frac{C_4^1\times C_3^1}{21}=\frac{4}{7}$

$p(X=2)=\frac{C_3^2}{21}=\frac{1}{7}$

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

c) $E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i p(X=x_i)=\frac{6}{7}\simeq 0,86$

2) a) Déterminons $Y(\Omega)$:

$1+0=1$; $1-1=2$; $-1+1=0$; $1+1=2$; $1+0=1$

Donc : $Y(\Omega)=\{-2;-1;0;1;2\}$

b) Déterminons la loi de probabilité de Y :

On a : $Y(\Omega)=\{-2;-1;0,1;2\}$

$p(Y=-2)=\frac{C_2^2}{C_7^2}=\frac{1}{21}$

$p(Y=-1)=\frac{C_2^1\times C_1}{C_7^2}=\frac{2}{21}$

$p(Y=0)=\frac{C_2^1\times C_4^1}{C_7^2}=\frac{8}{21}$

$p(Y=1)=\frac{C_4^1\times C_1^1}{C_7^2}=\frac{4}{21}$

$p(Y=2)=\frac{C_4^2}{C_7^2}=\frac{2}{7}$

y_i	-2	-1	0	1	2
$p(Y=y_i)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{2}{7}$

c) La moyenne de ces sommes est $E(Y)$:

$E(Y)=\sum_{i=1}^{5}y_i p(Y=y_i)=\left(-2\times\frac{1}{21}\right)+\left(-1\times\frac{2}{21}\right)+0+\frac{4}{21}+\left(2\times\frac{2}{7}\right)$

$\frac{4}{7}$

Exercice 32

1) Déterminons $X(\Omega)$:

Quand on tire successivement et sans remise 3 jetons du sac, on peut obtenir :

3Ⓡ
4Ⓑ

• Un jeton blanc au 1er tirage : $X=1$

Un jeton rouge au 1er et un jeton blanc au 2° tirage, donc :
$X=2$

• 2 jetons rouges au 1er et 2° tirage puis un jeton blanc au 3ième tirage :
$X=3$.

Donc : $X(\Omega)=\{1;2;3\}$

2) Déterminons la loi de probabilité de X :

On a : $Card\Omega = A_7^3 = 210$

• $Card(X=1) = A_3^1 \times A_6^2 = 120$ et puisqu'il y a équiprobabilité, alors :

• $p(X=1)=\dfrac{Card(X=1)}{Card\Omega}=\dfrac{120}{210}=\dfrac{4}{7}$

• $p(X=2)=\dfrac{A_3^1\times A_4^1\times A_3^1}{210}=\dfrac{2}{7}$

• $p(X=3)=\dfrac{A_3^2\times A_5^1}{210}=\dfrac{1}{7}$

x_i	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

3) Calculons $\sigma(X)$:

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{E(X^2)-(E(X))^2}$

• $E(X^2)=\sum_{i=1}^{3} x_i^2 p(X=x_i)=\frac{4}{7}+\frac{8}{7}+\frac{9}{7}=3$

• $E(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i\, p(X=x_i)=\frac{4}{7}+\frac{4}{7}+\frac{3}{7}=\frac{11}{7}$

Donc : $\sigma(X)=\dfrac{\sqrt{26}}{7}\simeq 0{,}73$

Exercice 33

1) On tire simultanément 3 boules de l'urne U, donc chaque tirage est une combinaison de 3 éléments parmi 9.

Donc : $Card\Omega = C_9^3 = 84$

a) Déterminons la loi de probabilité de X :

On a : $X = 2n - 4$ où n est le nombre de boules blanches parmi les boules tirées.

Quand on tire 3 boules simultanément, on peut avoir :

1 boule blanche et 2 non blanches. $X = 2 \times 1 - 4 = -2$

2 boules blanches et 1 non blanche. $X = 2 \times 2 - 4 = 0$

3 boules blanches. $X = 2 \times 3 - 4 = 2$

3 boules non blanches. $X = -4$

Donc : $X(\Omega) = \{-4; -2; 0; 2\}$

$$p(X = -4) = \frac{C_3^3}{84} = \frac{5}{42}$$

$$p(X = -2) = \frac{C_4^1 \times C_3^2}{84} = \frac{10}{21}$$

$$p(X = 0) = \frac{C_4^2 \times C_5^1}{84} = \frac{5}{14}$$

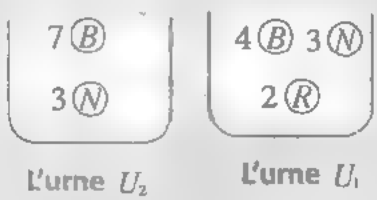
$$p(X = 2) = \frac{C_4^3}{84} = \frac{1}{21}$$

x_i	-4	-2	0	2
$p(X = x_i)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$

b) Calculons $E(X)$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p(X = x_i) = -\frac{4}{3} \simeq -1,33$$

2)



• Calculons $p(E)$:

Après avoir tiré une boule de U_2 et mise dans U_1, cette dernière contient alors 10 boules dont deux sont rouge.

(car U_2 ne contient aucune boule rouge).

Donc : $p(E_1) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

• Calculons $p(E_2)$:

On considère les événements :

B : «La boule tirée de U_2 est blanche»

N : «La boule tirée de U_2 est noire»

On a : $E_2 = (E_2 \cap B) \cup (E_2 \cap N)$

Puisque les événements $(E_2 \cap B)$ et $(E_2 \cap N)$ sont incompatibles, alors :

$$\begin{aligned} p(E_2) &= p(E_2 \cap B) + p(E_2 \cap N) \\ &= p(B) \times p_B(E_2) + p(N) p_N(E_2) \end{aligned}$$

(d'après la loi des probabilités totales).

Donc : $p(E_2) = \left(\frac{7}{10} \times \frac{5}{10}\right) + \left(\frac{3}{10} \times \frac{4}{10}\right) = 0,47$

Exercice 34

1) Calculons $p(A)$ et $p(B)$:

Toute distribution des 3 boules dans les 4 sacs est un arrangement avec répétition de 3 éléments parmi 4, donc : $Card\Omega = 4^3 = 64$

• Pour réaliser l'événement A : «un seul sac est vide», il y a 4 façons de choisir le sac vide : $C_4^1 = 4$; puis on doit placer une boule dans chacun des 3 sac restant, il y a 3! façon de faire le placement,

Donc : $CardA = C_4^1 \times 3! = 24$

D'où : $p(A) = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$

• Pour réaliser l'événement B : «un sac contient toutes les boules», il y a $C_4^1 = 4$ façons de choisir le sac qui contenir toutes les boules, il y a 1 seule façon de placer les 3 boules dans le sac choisi, donc : $CardA = C_4^1 = 4$

D'où : $p(B) = \frac{4}{64} = \frac{1}{16} = 0,0625$

2) Déterminons la loi de probabilité de X :

• Les valeurs prises par X sont : 1; 2; 3.

Donc : $X(\Omega) = \{1;2;3\}$

• $p(X = 1) = p(A) = \frac{3}{8}$

• $p(X = 3) = p(B) = \frac{1}{16}$

Calculons $p(X = 2)$:

• 1ère méthode :

$$p(X=2)=1-(p(X=1)+p(X=3))=\frac{9}{16}$$

• 2ième méthode :

Pour réaliser l'événement $(X=2)$, on choisit 2 sacs vides parmi 4, il y a : C_4^2-6 façons de faire ce choix; on distribue après les 3 boules dans les 2 sacs restant, de façon que chacun contient au moins une boule, il y a (2^3-2) façons de faire cette distribution.

Donc : $Card(X=2)=C_4^2\times(2^3-2)=36$

D'où : $p(X=2)=\frac{36}{64}=\frac{9}{16}$.

VI

Définition:

• Soit X une variable aléatoire associée à une expérience aléatoire sur un espace probabilisé fini (Ω,p); tel que $X(\Omega)=\{x;x_2;x_3;\ldots;x_n\}$

La fonction: $\mathbb{R}\to[0;1]$

$$F: x\mapsto F(x)=P(X<x)$$

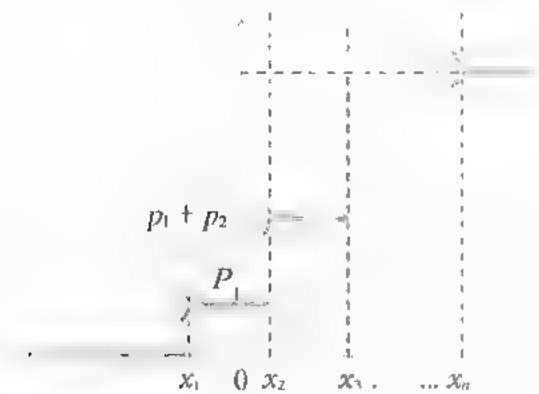
est appelée fonction de répartition de la variable aléatoire X

Représentation graphique d'une fonction de répartition

- $x\in]-\infty;x_1]\Rightarrow F(x)=0$
- $x\in]x_1;x_2]\Rightarrow F(x)=p(X=x_1)$
- $x\in]x_2;x_3]\to F(x)=p(X<x_3)-p(X=x_1)+(X=x_2)$

$\vdots$ $\vdots$

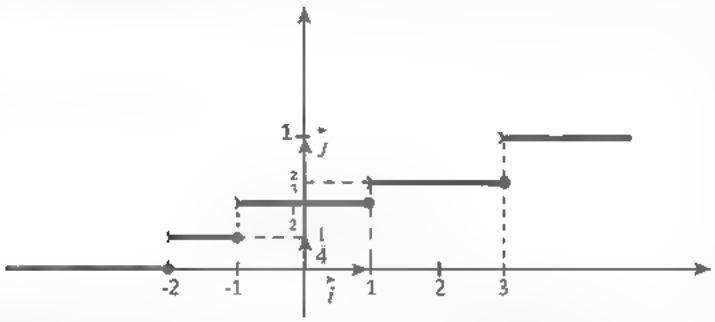
$x\in]x_n;+\infty[\Rightarrow F(x)=p(X\le x_n)=1$



Exercices d'application

Exercice 34

La figure suivante est la représentation graphique de la fonction de répartition d'une variable aléatoire X



1) Déterminer $p(X < 2)$; $p(X \geqslant 0)$ et $p(1 \leq X < 3))$

2) Déterminer la loi de probabilité de X

3) Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 36

Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. (chaque boule porte un seul numéro différent des autres portés par les autres boules).

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire, au hasard, simultanément deux boules de l'urne.

1) Soit X la variable aléatoire qui à chaque éventualité $\{a;b\}$, associe le nombre: $(-1)^{a+b}$ où a et b sont le numéros portés par les deux boules tirées.

a) Déterminer la loi de probabilité de X

b) Déterminer et représenter la fonction de répartition de X

2) Soit Y la variable aléatoire qui à chaque éventualité $\{a;b\}$, associe le nombre $(-1)^a + (-1)^b$

a) Déterminer la loi de probabilité de Y

b) Déterminer et représenter la fonction de répartition de Y

c) Calculer $P^{(X=1)}_{(Y\neq 0)}$

Solutions

Exercice 35

1) Déterminons $p(X < 2)$; $p(X \geqslant 0)$ et $p(1 \leq X < 3)$

Soit F la fonction de repartions de la variation aléatoire X

On a:

- $p(X<2)=F(2)=\frac{2}{3}$
- $p(X\geqslant 0)=1-p(X<0)$

$$=1-F(0)$$
$$=1-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}$$

* Calculons $p(1\leq X<3)$

On a: $(X<3)=(X<1)\cup(1\leq X<3)$

Puisque les événements $(X<1)$ et $(1\leq X<3)$ sont incompatibles, alors:

$p(X<3)=p(X<1)+p(1\leq X<3)$

Donc: $p(1\leq X<3)=p(X<3)-p(X<1)$

$$=F(3)-F(1)$$
$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{6}$$

Info:

Si $a<b$, alors: $(X<b)=(X<a)\cup(a\leq X<b)$

Puisque les événements $(X<a)$ et $(a\leq X<b)$ sont incompatibles, alors

$p(X<b)=p(X<a)+p(a\leq X<b)$

Donc: $p(a\leq X<b)-p(X<b)-p(X<a)$

D'où: $p(a\leq X<b)=F(b)-F(a)$

2) Déterminons la loi de probabilité de X

D'après la représentation graphique de la fonction F, on peut remarquer que:

$X(\Omega)=\{-2;-1;1;3\}$

- $p(X=-2)=p(X<-1)=F(-1)=\frac{1}{4}$
- $p(X=-1)=p(-1\leq X<1)$

$$=F(1)-F(-1)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{4}$$

• $p(X=1)=p(1\leq X<3)$

$=F(3)-F(1)$

$=\frac{1}{6}$

• $p(X=3)=1-p(X<3)$

$=1-F(3)$

$=\frac{1}{3}$

On a donc le tableau suivant:

x_i	-2	-1	1	3
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

3) Calculons $E(X)$

$E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i p(X=x_i)$

$=\left(-2\times\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{-1}{4}\right)+\frac{1}{6}+1$

$=\frac{5}{12}$

Donc $E(X)=\frac{5}{12}\simeq 0,42$

Exercice 4

1) On tire simultanément deux boules de l'urne, donc chaque tirage est une combinaison de 2 éléments parmi 4, d'où $Card\Omega=C_4^2=6$

a) Déterminons la loi de probabilité de X

* Déterminons $X(\Omega)$

En considérant les nombres portés par les boules, la somme $a+b$ peut-être paire ou impaire.

-Si $a+b$ est pair, alors $X=(-1)^{a+b}=1$

-Si $a+b$ est impair, alors $X=(-1)^{a+b}=-1$

Donc $X(\Omega)=\{-1;1\}$

* Calculons $p(X=-1)$

Pour réaliser l'événement $(X=-1)$, il faut que $a+b$ soit impair c'est à dire que les nombres a et b ne sont pas de même parité.

Donc: $Card(X=-1)=C_2^1\times C_2^1=4$

D'où: $p(X=-1)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

* Calculons $p(X=1)$

Méthode 1:

Pour réaliser l'événement $(X=1)$, il faut que $a+b$ soit pair, c'est à dire que les nombres a et b soient de même parité: $Card(X=1)=C_2^2+C_2^2-2$

Donc $p(X=1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Méthode 2:

$(X=1)$ est l'événement contraire de l'événement $(X=-1)$, donc:

$$p(X=1)=1-p(X=-1)$$
$$=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

On a alors le tableau suivant:

x_i	-1	1
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

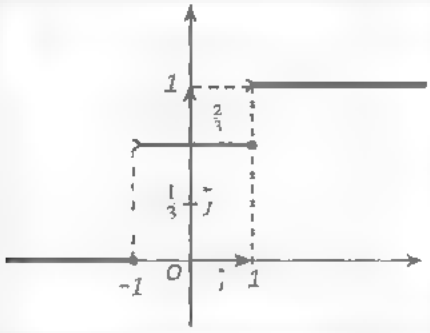
b) Déterminons la fonction de répartition de X;

$\mathbb{R}\to[0;1]$ $F: x\mapsto F(x)=p(X<x)$

- Si $x\in]-\infty;-1]$, alors $F(x)=0$ - Si $x\in]-1;1]$, alors $F(x)=\frac{2}{3}$

- Si $x\in]1;+\infty[$, alors $F(x)=1$

Représentation graphique de F



2) a) Déterminons la loi de probabilité de Y

Pour tout nombres a et b de $\{1;2;3;4\}$,

On a: $(-1)^a\in\{-1;1\}$

- Si a et b sont pairs, alors: $Y=(-1)^a+(-1)^b=2$

Si a et b sont impairs, alors : $Y=-2$

Si a et b ne sont pas de même parité , alors: $Y=0$

Donc: $Y(\Omega)=\{-2;0;2\}$

$p(y=-2)=\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$ • $p(Y=0)=\frac{C_2^1\times C_2^1}{C_4^2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$p(Y=2)=\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$

On obtient ainsi le tableau de la loi de probabilité de y :

y_i	-2	0	2
$p(Y=y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

Si $x\in]-\infty;-2]; F(x)$

b) * Déterminons la fonction de répartition de Y

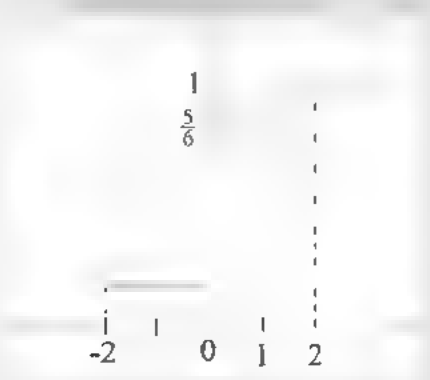
$F:\begin{matrix}\mathbb{R}\to[0;1]\\ x\mapsto F(x)=p(y<x)\end{matrix}$

Si $x\in]-\infty;-2]; F(x)=0$

Si $x\in]-2;0]$, alors : $F(x)=\frac{1}{6}$ - Si $x\in]0;2]$; alors : $F(x)=\frac{5}{6}$

Si $x\in]2;+\infty[$; alors: $F(x)=1$

* Représentation graphique de F :



c) Calculons $P_{(Y\neq 0)}^{(X=1)}$

On a: $(Y\neq 0)=(Y=-2)\cup(Y=2)$,

donc si l'événement $(Y\neq 0)$ est réalisé, alors es nombres a et b sont de même parité, et dans ce cas, $a+b$ est pair ; donc $(-1)^{a+b}=1$ et par conséquent l'événement $(X=1)$ est réalisé donc: $P_{(Y\neq 0)}^{(X=1)}=1$

VII Loi binomiale

Définition:

On considère une expérience aléatoire à deux issues: succès S et échec $\bar{S}$ de probabilités respectives p et $1-p$

On répète n fois de suite cette expérience dans les mêmes conditions et de façons indépendantes.

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès obtenus au terme des n épreuves.

On dit que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p. (On note: $X \circ \mathcal{B}(n;p)$).

Propriétés:

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors:

- L'ensemble des valeurs prises par X est: $X(\Omega) = \{0;1;...;n\}$
- La loi de probabilité de X est donnée par: $p(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ pour tout $k \in \{0;1;...;n\}$
- L'espérance mathématique de X est: $E(X) = np$
- La variance de X est: $V(X) = np(1-p) = E(X)(1-p)$
- L'écart-type de X est: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}$

Exercices d'application

Exercice 37 (Lancer d'un dé)

On dispose d'un dé cubique non pipé (équilibré) dont les faces sont numérotées : 1; 1; 1; 2; 3; 4.

On lance le dé 3 fois de suite. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions d'un nombre pair.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 38 (Tirage de boules)

Un sac contient 3 boules noires, 2 boules rouges et 2 boules vertes.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard successivement et avec remise 20 boules du sac.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions d'une boule rouge.

1) Justifier que X suite un loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2) Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge au moins une fois?

3) Calculer $p(17 < X \leq 19)$.

4) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

Dans un jeu de lancer de fléchettes, Karim atteint la cible 3 fois sur 4.

Karim a procédé à 5 lancers successifs d'une fléchette.

Les lancers sont 2 à 2 indépendants.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois que Karim atteint la cible.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Quelle est la probabilité que Karim atteigne la cible au moins une fois?

3) Calculer la probabil té que Karim atteigne la cible deux fois exactement.

4) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$

Exercice 40

Une urne contient 3 boules rouges, 2 bou e blanches et une boule jaune. les boules sont indiscernables au toucher.

1) On tire au hasard successivement et sans rem se toutes les boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées avant l'apparition pour la première fo s d'une boule blanche.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'écart-type $\sigma(X)$.

2) On tire maintenant au hasard simultanément 3 boules de l'urne. On répète cette épreuve n fois de suite ($n > 3$) dans les mêmes conditions (on remet les 3 boules tirées dans l'urne avant de procéder à un autre tirage).

a. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules de couleurs 2 à 2 distinctes,

$(n-1)$ fois exactement?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules de même couleur au moins une fois. On notera p_n cette probabilité.

c. Calculer la probabilité d'obtenir seulement 2 boules de même couleur 3 fois exactement.

d. Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n > 0,99$.

Solutions

Exercice 37

1) Déterminons la loi de probabilité de X.

L'expérience dans cet exercice est une répétition d'une même épreuve «Lancer du dé» 3 fois de suite dans les mêmes conditions les épreuves sont 2 à 2 independantes et le résultat de chaque épreuve est soit S «obtenir un nombre pair» soit $\bar{S}$ «obtenir un nombre impair». Les nombres portés par les faces du dé sont : 1; 1; 1; 2; 3; 4, donc les nombres pairs qu'on peut obtenir sont 2 et 4, d'où $p(S) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

La variable aléatoire X égale au nombre d'apparitions d'un nombre pair, suit la loi binomiale de paramètres $n-3$ et $p = \frac{1}{3}$.

Donc $X(\Omega) = \{0;1;2;3\}$.

et $\forall k \in \{0;1;2;3\}$; $p(X=k) = C_3^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{3-k}$.

- Pour $k = 0$: $p(X=0) = C_3^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.
- Pour $k = 1$: $p(X=1) = C_3 \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.
- Pour $k = 2$: $p(X=2) = C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}$.
- Pour $k = 3$: $p(X=3) = C_3^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}$.

k	0	1	2	3
$p(X=k)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

2) Calculons $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Puisque $X \circ B\left(3;\frac{1}{3}\right)$ (X suit la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{3}$)

alors : • $E(X) = np = 3 \times \frac{1}{3} = 1$

• $V(X) = np(1-p) = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

• $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \simeq 0,816$

1) Justifions que X suite une loi binomiale.

R	R	V	V
N	N	N	

l'expérience dans cet exercice est un répétition 20 fois de suite d'une même épreuve «tirer une boule, noter sa couleur puis la remettre dans le sac» dans les mêmes conditions, les épreuves sont 2 à 2 indépendantes, le résultat de chaque épreuve est soit S «obtenir une boule rouge», soit $\overline{S}$ «Ne pas obtenir de boule rouge», la probabilité du succès est $p = P(S) = \frac{2}{7}$.

La variable aléatoire X égale au nombre d'apparitions d'une boule rouge (c à-d nombre de succès) suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{2}{7}$.

2) Calculons la probabilité de l'événement A «obtenir une boule rouge au moins une fois».

On a : $A = (X \geq 1)$

Donc : $p(A) = p(X \geq 1)$

$= 1 - p(X = 0)$; (car : $(\overline{X \geq 1}) = (X = 0)$)

$= 1 - C_{20}^{0}\left(\frac{2}{7}\right)^{0}\left(\frac{5}{7}\right)^{20}$

$= 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^{20} \simeq 0,999$

Remarque : $p(X \geq 1) = \sum_{k=1}^{20} p(X = k)$.

3) Calculons $p(17 < X \leq 19)$

On a : $(17 < X \leq 19) = (X = 18) \cup (X = 19)$

les événements $(X = 18)$ et $(X = 19)$ sont incompatibles.

Donc $p(17 < X \leq 19) = p(X = 18) + p(X = 19)$

$$= C_{20}^{18}\left(\frac{2}{7}\right)^{18} \times \left(\frac{5}{7}\right)^{2} + C_{20}^{19}\left(\frac{2}{7}\right)^{19} \times \left(\frac{5}{7}\right)$$

$$\simeq 1{,}6 \times 10^{-8}$$

4) Calculons $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Puisque X suit la loi binomiale de paramètres $n - 20$ et $p = \frac{2}{7}$, alors :

- $E(X) = np = 20 \times \frac{2}{7} = \frac{40}{7}$
- $V(X) = np(1-p) = \frac{40}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{200}{49}$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{10\sqrt{2}}{7}$

1) Déterminons le loi de probabilité de X.

L'expérience dans cet exercice est une répétition d'une même épreuve «Karim lance la flèche» 5 fois de suite dans les les même conditions, les épreuves sont 2 à 2 indépendantes, le résultat de chaque épreuve est soit le succès S «Karim atteint a cible» de probabilité $p - p(S) - \frac{3}{4}$, soit $\overline{S}$ «Karim rate la cible».

La variable aléatoire X égale au nombre de fois que Karim atteint la cible suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{3}{4}$.

Donc : $X(\Omega) = \{0;1;2;3;4;5\}$ et $\forall k \in X(\Omega)$; $p(X = k) = C_5^k\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{5-k}$

3)Calculons $p(A)$ où A est l'événement : «Karim atteint la c ble au moins une fois».

On a : $A = (X \geq 1)$.

Donc : $p(A) = P(X \geq 1)$

$$= 1 - P(X = 0)$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{3}{4}\right)^5$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5$$

$$= \frac{1023}{1024} \simeq 0{,}999$$

3) Calculons $p(B)$ où B est l'événement : «Karim atteint la cible deux fois

exactement».

On a : $B = (X = 2)$.

Donc : $p(B) = P(X = 2)$

$$= C_5^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$= \frac{45}{512}$$

4) Calculons $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Comme X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{3}{4}$,

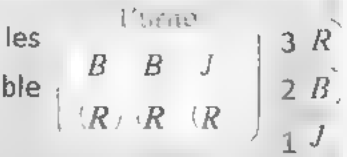
alors : • $E(X) = n \times p = 5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$.

• $V(X) = np(1-p) = \frac{15}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{15}{16}$.

• $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{15}}{4} \sim 0{,}968$.

Exercice 40

1) On tire au hasard successivement et sans remise les 6 boules de l'urne, donc l'univers Ω est l'ensemble des permutations de 6 éléments.



Donc : $Card\Omega = 6! = 720$.

$A_n^n = n!$

X est la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées avant l'apparition pour la première fois d'une boule blanche. Puisque l'urne contient 3 boules rouges, et qu'il est possible que la première boule tirée soit blanche, alors $X(\Omega) = \{0;1;2;3\}$.

Calculons $p(X = k)$ pour $k \in \{0;1;2;3\}$.

$(X = k)$ est l'événement : «obtenir une boule blanche pour la 1ère fois au $k^{ième}$ tirage.

Pour $k = 0$:

Réaliser l'événement $(X = 0)$ c'est :

- Tirer une boule blanche au premier tirage et les 5 autres après : Ⓑ.. (Le nombre de cas est : $A_2^1 \times 5!$ qui peut s'écrire aussi $A_2^1 \times A_5^5$ ou $C_2^1 \times A_5^5$ ou $C_2^1 \times 5!$).

ou

- Tirer la boule jaune au 1er tirage, puis une boule blanche au 2ième tirage, puis les 4 boules restantes aux 4 derniers tirages $(JB....)$ (Le nombre de cas est : $A_1 \times A_3^1 \times 4!$ s'écrit aussi : $C_1^1 \times C_3^1 \times A_4^4$

Donc : $Card(X=0) = (A_2^1 \times 5!) + (A_1^1 \times A_2^1 \times 4!) = 288$

D'où, d'après l'hypothèse de l'équiprobabilité, (car le tirage est au hasard et les boules sont indiscernables au toucher)

$$p(X=0) = \frac{Card(X=0)}{Card\Omega} = \frac{288}{720} = \frac{2}{5}$$

Pour $k=1$.

Réaliser l'événement $(X=1)$, c'est :

- Tirer une boule rouge au 1er tirage, puis une blanche au 2ième tirage, puis les 4 boules restantes aux 4 derniers tirages $(\text{Ⓡ}\text{Ⓑ}....)$ (Le nombre de cas est : $A_3 \times A_2 \times 4!$ s'écrit aussi : $C_3^1 \times C_2^1 \times A_4^4$).

ou

- Tirer une boule rouge et la boule jaune aux deux premiers tirages puis tirer une boule blanche au 3ième tirage, puis les 3 boules restantes aux 3 derniers tirages : $(\text{Ⓡ}\text{Ⓙ}\text{Ⓑ}...$ ou $\text{Ⓙ}\text{Ⓡ}\text{Ⓑ}...)$ (Le nombre de cas est : $2 \times (A_3^1 \times A_1^1) \times A_2^2 \times 3!$

(Coefficient de l'ordre des 2 couleurs rouge et jaune)

Donc : $Card(X=1) = (A_3^1 \times A_2^1 \times 4!) + 2 \times (A_3^1 \times A_1^1) \times A_2^2 \times 3! = 216$

D'où : $p(X=1) = \frac{Card(X=1)}{Card\Omega} = \frac{216}{720} = \frac{3}{10}$

Pour $k=2$:

Réaliser l'événement $(X=2)$ c'est :

- Tirer 2 boules rouges puis une boule blanche : $(\text{Ⓡ}\text{Ⓡ}\text{Ⓑ}..)$ (Le nombre de cas est : $A_3^2 \times A_2^1 \times 3!$)

ou

- Tirer 2 boules rouges et la boule jaune aux 3 premiers tirages, puis tirer une boule blanche, puis les 2 autres boules : $(\text{Ⓙ}\text{Ⓡ}\text{Ⓡ}\text{Ⓑ}..$ ou $\text{Ⓡ}\text{Ⓙ}\text{Ⓡ}\text{Ⓑ}.$ ou $\text{Ⓡ}\text{Ⓡ}\text{Ⓙ}\text{Ⓑ}..)$ (Le nombre de cas est : $3 \times (A_1^1 \times A_3^2) \times A_3^2 \times 2!$)

Donc : $Card(X=2) = (A_3^2 \times A_3^1 \times 3!) + 3 \times (A_1^1 \times A_3^2) \times A_2^2 \times 2! = 144$

D'où : $p(X=2) = \frac{Card(X=2)}{Card\Omega} = \frac{144}{720} = \frac{1}{5}$

Pour $k=3$:

Réaliser l'événement $(X=3)$ c'est :

-Tirer les 3 boules rouges aux 3 premiers tirages, puis une boule blanche au 4ième tirage puis les 2 autres boules : ⓇⓇⓇⒷ.. (Le nombre de cas est : $A_3^3 \times A_2^1 \times 2!$)

ou

- Tirer les 3 boules rouges et la boule jaune aux 4 premiers tirages, puis les 2 boules blanches au 5ième et 6ième tirage : (ⓇⓇⓇⒿⒷⒷ ou ⓇⓇⒿⓇⒷⒷ ou ⓇⒿⓇⓇⒷⒷ ou ⒿⓇⓇⓇⒷⒷ) (Le nombre de cas est : $4 \times (A_3^3 \times A_1^1) \times 2!$

Donc : $Card(X=3) = A_3^3 \times A_2^1 \times 2! + 4 \times (A_3^3 \times A_1^1) \times 2! = 72$

D'où : $p(X=3) = \dfrac{Card(X=3)}{Card\Omega} = \dfrac{72}{720} = \dfrac{1}{10}$

On résume la loi de probabilité de X dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$p(X=k)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

b. Calculons $\sigma(X)$

On a : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ et $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

On a : $E(X) = \sum_{k=0}^{3} kp(X=k) = \left(0 \times \frac{2}{5}\right) + \left(1 \times \frac{3}{10}\right) + \left(2 \times \frac{1}{5}\right) + \left(3 \times \frac{1}{10}\right) = 1$

$E(X^2) = \sum_{k=1}^{3} k^2 p(X=k) = \left(0^2 \times \frac{2}{5}\right) + \left(1^2 \times \frac{3}{10}\right) + \left(2^2 \times \frac{1}{5}\right) + \left(3^2 \times \frac{1}{10}\right) = 2$

Donc : $V(X) = 2 - 1^2 = 1$

D'où : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1$

Dans cette question, l'expérience est une répétition n fois de suite d'une même épreuve : «tirer au hasard simultanément 3 boules de l'urne, puis les remettre dans l'urne» dans les mêmes conditions, les épreuves sont 2 à 2 indépendantes.

a. On considère l'événement : A «obtenir 3 boules de couleurs 2 à 2 distinctes en un seul tirage».

On a : $p(A) = \dfrac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{C_6^3} = \dfrac{3}{10}$

Donc, d'après la propriété des épreuves répétées, la probabilité que l'événement A se réalise $(n-1)$ fois exactement au terme des n épreuves est : $C_n^{n-1}(p(A))^{n-1}\times(1-p(A))$

$$= n\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}\times\frac{7}{10}$$

$$= \frac{7n\times 3^{n-1}}{10^n}$$

b. On considère l'événement B «obtenir 3 boules de même couleur en un tirage». Réaliser l'événement B, c'est tirer 3 boules rouges simultanément»

donc $p(B)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}$.

Soit H l'événement «obtenir 3 boules de même couleur au moins une fois au terme des n épreuves».

On a : $p(H)=1-p(\overline{H})$

$$= 1-(1-p(B))^n = 1-\left(1-\frac{1}{20}\right)^n = 1-\left(\frac{19}{20}\right)^n$$

Donc : $p_n=1-\left(\frac{19}{20}\right)^n$

c. On considère l'événement C «obtenir 2 boules exactement de même couleur parmi les 3 boules tirées».

Réaliser l'événement C, c'est :

- Tirer 2 boules rouges et une boule non rouge (Le nombre de cas est $C_3^2\times C_3^1$) ou

- Tirer 2 boules blanches et un boule non blanche (Le nombre de cas est $C_2^2\times C_4^1$).

Donc : $CardC=C_3^2\times C_3^1+C_2^2\times C_4^1=13$

D'où : $p(C)=\frac{CardC}{Card\Omega}=\frac{13}{20}$

Soit K l'événement «réaliser l'événement C trois fois exactement».

D'après la propriété des épreuves répétées on a :

$$p(K)=C_n^3(p(C))^3(1-p(C))^{n-3}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\times 13^3\times 7^{n-3}}{6\times 20^n}$$

d. Déterminons la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n>0,99$.

Soit n un entier naturel tel que $n > 3$

On a : $p_n > 0,99 \Leftrightarrow 1-\left(\frac{19}{20}\right)^n > 0,99$

$\Leftrightarrow \left(\frac{19}{20}\right)^n < 0,01$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{19}{20}\right)^n < \ln(0,01)$; (car la fonction ln est strictement croissante)

$\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{19}{20}\right) < \ln(0,01)$

$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{19}{20}\right)}$; (car $\ln\left(\frac{19}{20}\right) < 0$)

Or : $\frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{19}{20}\right)} \simeq 89,78$

Donc, la plus petite valeur de n telle que $p_n > 0,99$ est 90.

Exercices de synthèse

Un sac contient 3 boules blanches, 2 boules noires et une boule verte.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

Soit D un dé équilibré dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.

1) On lance le dé D une fois.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants:

A: «Obtenir un nombre pair» B: «Obtenir le n°3 ou le n° 5»

2) On considère l'expérience suivantes:

On lance une fois le dé; s'il donne une nombre pair, on tire , au hasard , successivement et avec remise deux boules du sac, s'il donne le numéro 3 ou 5, on tire successivement et sans remise deux boules du sac ; et s'il donne le n°1, alors on tire, au hasard, simultanément trois boules du sac.

On considère les événements suivants:

C: «Obtenir exactement deux boules de même couleur»

D: «Obtenir au moins une boule blanche»

E: «Obtenir 3 boules de couleur différentes deux à deux»

a) Calculer $p_B(D)$ b) Calculer $p(E)$ et $p(C)$

Exercice 42

- Une urne U_1 contient 2 jetons numérotées 1, et 4 jetons numérotés 2. Tous les jetons sont indiscernables au toucher.

- Une autre urne U_2 contient 3 boules rouges et 4 boules vertes. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire, au hasard, un jeton de l'urne U_1

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants:

A: «Le jeton tiré porte le n° 1»

B: «Le jeton tiré porte le n° 2»

2) On considère l'expérience suivante:

On tire un jeton de l'urne U_1 et on note son numéro:

- Si ce nombre est 1, on tire une seule boule de l'urne U_2

- Si ce nombre est 2, on tire simultanément deux boules de U_2

Soit E_n l'événement : «obtenir n boules rouges exactement»

a) Montrer que $p(E_1)=\frac{11}{21}$ et $p(E_2)=\frac{2}{21}$

b) Calculer la probabilité que le jeton tiré de U_1 porte le n°1 sachant qu'on a obtenu une seule rouge de U_2 .

Un sac contient 3 boules rouges, deux boules blanches et une boule jaune. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1) On tire successivement et sans remise toutes les boules de l'urne.

Soit X la variable aléatoire égale au nombres de boules rouges tirées avant l'apparition pour la 1ère fois d'une boule blanche.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer $\sigma(X)$

2) On tire maintenant , au hasard, simultanément 3 boules de l'urne. On répète cette épreuve n fois de suite

$(n > 3)$ en remettant à chaque fois les 3 boules tirées dans l'urne avant d'effectuer un nouveau tirage.

a) Que le est la probabilité d'obtient 3 boules de couleurs différentes deux à

deux $n-1$ fois exactement?

(En exprimera cette probabilité en fonction de n).

b) Calculer la probabi ité p_n d'obtenir 3 boules de même couleur au moins une fois.

c) Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux boules de même couleur 3 fois exactement.

d) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n tel que $p_n > 0,999$.

On considère deux urnes U_1 et U_2 ,

- L'urne U contient 3 boules noires portant le numéro 1 et deux boules blanches portant le numéro 2.

- L'urne U_2 contient 4 boules noires numérotées 1;1;2;2.

En considère l'épreuve (E) «on tire une boule de U_1 et une boule de U_2 en même temps»

1) Calculer la probabilité de chacun des événements:

A : «Obtenir deux boules portant des numéros différents»

B : «Obtenir deux boules de couleur différentes»

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des nombres portés par les deux boules tirées.

a) Déterminer la loi de probabilité de X

b) Calculer $E(X)$

3) On répète l'épreuve (E) cinq fois de suite en remettant chaque boules dans son urne avant d'effectuer un nouveau tirage.

Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois exactement deux boules de couleur différentes?

Exercice 45 Proba et suite

Jn gardian de but est cho si après plusieurs testes, entre autres, les pénaltys.

Après une série de pénaltys, du gardian Ahmed , on a constaté que:

- Si Ahmed retien un pénalty, la probabilité qu'il retienne le pénalty suivant est 0,8.

- Si Ahmed ne retien pas un pénalty, la probabilité qu'il retienne le pénalty suivant est 0,6.

- La probabilité qu'il retienne le 1er pénalty est 0,7.

Soit A_n l'événement: «Ahmed retien le nème pénalty»

1) a) Donner les probabilités suivantes: $p(A_1)$; $p_{A_n}(A_{n+1})$ et $p_{\bar{A}_n}(A_{n+1})$

b) Calculer $p(A_{n+1} \cap A_n)$ et $p(A_{n+1} \cap \bar{A}_n)$ en fonction de $p(A_n)$

c) En déduire que:

$p(A_{n+1}) = 0,2p(A_n) + 0,6$

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $p_n = (A_n)$ et $u_n = p_n - 0,75$

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est géométrique

b) En déduire u_n et p_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 46

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

On considère n sacs $S_1; S_2; ...; S_n$ tels que:

le sac S_1 contient 2 boules noires et une boule blanche ; chacun des autres sacs contient une boule blanche et une boule noire.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On considère l'expérience suivante:

On tire un boule de S_1 , on la met dans S_2 , puis on tire une boule de S_2 et la met dans S_3, et ainsi de suite jusqu'à S_n

On désigne par S_k l'événement : «La boule tirée de E_k est blanche»

Pour tout K entier naturel tel que: $1 \leq k \leq n$ on pose $p_k = p(E_k)$

1) a) Calculer: p_1 et p_2

b) Montrer: $p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$ pour tout $k \in \{1;2;...;n\}$

2) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les suites définis par:

$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ et $v_n = u_n - \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique

b) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) Dans cette question, on suppose que $n = 10$

Déterminer les valeurs de k pour lequelles on a: $0,4999 \leq P_n \leq 0,5$

Un sac contient une boule blanche et une boule noire.

On procède à une succession de tirage de la façon suivante:

On tire, au hasard, une boule du sac , on la remet dans le sac et on ajoute une boule blanche dans le sac avant d'effectuer un nouveau tirage, et ainsi de suite....

Soit P_n la probabilité d'obtenir une boule blanche au nième tirage.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1) Montrer que: $P_n = \frac{n}{n+1}$

2) Montrer que la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

3) a) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que: $1 - P_n \leq \frac{1}{20}$

b) Donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 48

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules. Toutes les boules sont indiscernable au toucher.

On tire , au hasard, successivement et avec remise n boules de l'urne $(n \geq 2)$

On considère les événements ;

E «Les boules tirées ne sont pas de même couleur»

F «Obtenir au plus une boules blanche»

1) Montrer que: $P(E) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$

$P(F) = \frac{1+n}{2^n}$ et $p(E \cap F) = \frac{n}{2^n}$

2) Montrer que les événements E et F sont indépendants si et seulement si $2^{n-1} = n+1$

3) On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par:

$(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$; $u_n = 2^{n-1} - (n+1)$

a) Calculer u_2 ; u_3 et u_4

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

4) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles les événements E et F sont indépendants.

Un sac contient 60 boules blanches et 40 boules noires. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On considère l'expérience suivantes:

On tire successivement et avec remise, une après l'autre, les boules du sac jusqu'à ce qu'on obtient une boule blanche et le tirage s'arrête.

Partie 1:

Dans cette partie, on fait au plus 4 tirages.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une première boule blanche.

On considère que $X = 0$ si, après 4 tirages , on n'obtient pas de boules blanches.

1) Calculer $p(X = 0)$

2) Calculer $p(X = k)$ pour tout $k \in \{1;2;4\}$

Partie 2:

Dans cette partie, on fait au plus n tirages (où $n \in \mathbb{N}^*$)

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une première boule blanche.

On considère que $Y = 0$ si, après n tirages, on n'obtient pas de boules blanches.

1) Calculer $p(Y = k)$ pour tout $k \in \{1;2;3;...;n\}$.

2) On considère le polynôme

$P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$; $n \in \mathbb{R}$

Montrer que $E(Y) = \frac{3}{5} P\left(\frac{2}{5}\right)$

3) Montrer que: $E(Y) - \frac{5}{3} - \left(n + \frac{5}{3}\right) \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$

(On calculera d'abord $P(x)$ en fonction de x et n)

On considère deux urnes U_1 et U_2, contenant chacune n boules numérotées de 1 à n. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire, au hasard, simultanément une boules de U et une boule de U_2.

Soit X la variable aléatoire égale au plus grand des nombres portes par les boules tirées.

1) Calculer $p(X \leq k)$ pour tout $k \in \{1;2;....;n\}$

2) Montrer que: $(\forall \in k\{1;2;...,n\})$; $p(X = k) = \frac{2k-1}{n^2}$

Exercice 51

On considère $n-1$ urnes $U_1;U_2;..\ U_{n-1}$ où $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$

L'urne U_k contient k boules noires et $n-k$ boules blanches où $k \in \{1;2;....;n-1\}$

On admet que la probabilité de choisir l'urne U_k est $P_k = \frac{2k}{n(n-1)}$

1) Vérifier que $\sum_{k=1}^{n-1} P_k = 1$

2) On choisit , au hasard, l'une des urnes et on en tire successivement et sans remise toutes les boules qu'elle contient sauf deux.

a) Calculer la probabilité que les deux boules restantes dans l'urne soient noires.

b) Calculer la probabilité que l'urne choisie soit U_k sachant que les deux boules restantes sont noires.

3) On considère maintenant l'expérience suivante:

On tire une boule de l'urne U_1

Si la boule est blanche , on la remet dans U_1 , puis on tire une boule dans l'urne U_2.

- Si la boule tirée de U_1 est noire, on la remet dans U_1 et on vide l'urne U_1

dans U_2, puis on tire une boule dans U_2 ;

On continue ce procédé en passant de l'urne U_k à l'urne U_{k+1}.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants:

A: «tirer une boule blanche de U_n sachant que toute urne U_k est vidée dans U_{k+1} pour tout».

$k \in \{1;2;...;(n-2)\}$

B: «toute urne U_k est vidée dans l'urne U_{k+1} pour tout $k \in \{1;2;3;...;(n-2)\}$»

Solutions

Exercice

1) Calculons $p(A)$ et $p(B)$

On a: $A = \{2;4;6\}$ et $B = \{3;5\}$

Puisque le dé n'est pas pipé (équilibré), alors, $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

et $p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

2) a) Calculons $P_B(D)$

Pour réaliser l'événement D sachant que le dé a donné le numéro 3 ou 5 (un nombre impair), on tire successivement et sans remise une boule blanche parmi 3 et une boule non blanche parmi 3 (en tenant compte de l'ordre) le nombre de ces choix est: $2 \times (A_3^1 \times A_3^1) = 18$

Ou en tire successivement et sans remise 2 boules blanches parmi 3 ; le nombre de ces choix est ; $A_3^2 = 6$

Donc : $P_B(D) = \frac{2(A_3^1 \times A_3^1) + A_3^2}{A_6^2} = \frac{4}{5} = 0,8$

b) Calculons $p(E)$

Pour réliser l'événement E «obtenir 3 boules de couleur 2 a 2 distinctes», il faut que le dé donne le numéro 1 et qu'on tire simultanément 3 boules de couleur différentes 2 à 2.

Soit F l'événement : «Le dé donne le n°1»

$p(E) = p(E \cap F) = p(F) \times p_F(E)$

Donc $p(E) = \frac{1}{6} \times \frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{C_6^3} = \frac{1}{20}$

Calculons $p(C)$

$p(C) = p(C \cap A) + p(C \cap B) + p(C \cap F)$

- Si le dé donne un nombre pair, alors on tire successivement et avec remise deux bou es du sac ; dans ce cas, la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur

est: $P_A(C) = \frac{3^2 + 2^2 + 1^2}{6^2} = \frac{7}{18}$

- Si le dé donne 3 ou 5, alors on tire successivement et sans remise deux boules du sac, dans ce cas , la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur est $P_B(C) = \frac{A_3^2 + A_2^2}{A_6^2} = \frac{4}{15}$

- Si le dé donne le numéro 1, alors on tire simultanément 3 boules du sac, dans ce cas, la probabilité d'obtenir deux boule exactement de même cou eur,

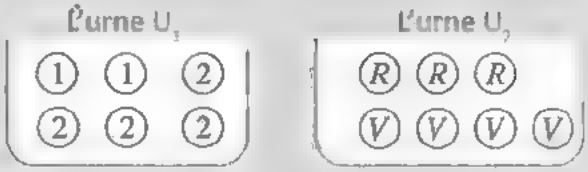
est: $P_F(C) = \frac{C_3^2 \times C_3^1 + C_2^2 \times C_4^1}{C_6^3} = \frac{13}{20}$

Donc, d'après la loi des probabilités totales,

$$P(C) = P(A) \times P_A(C) + P_B(C) + P(F) \times P_F(C)$$
$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{7}{18}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{4}{15}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{13}{20}\right)$$
$$= \frac{47}{120}$$

Exercice 42

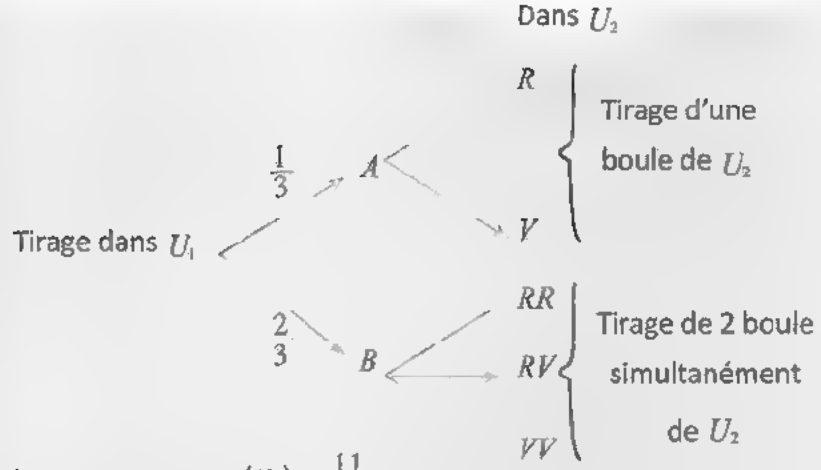
1) Calculons $p(A)$ et $p(B)$



$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(B) = p(\overline{A}) = 1 - p(A) = \frac{2}{3}$

2) Schématisation de l'expérience par un arbre de probabilité



a) Montrons que $p(E_1)=\frac{11}{21}$

Pour réaliser l'événement E_1 , il faut :

- Tirer un jeton portant le numéro 1 (événement A), puis tirer une boule rouge de U_2.

ou

- Tirer un jeton portant le numéro 2 de l'urne U_1 (événement B), puis tirer simultanément de l'urne U_2 une boule rouge et une boule verte.

• Si on tire une boule de l'urne U_2 , la probabilité d'obtenir une boule rouge est $\frac{3}{7}$. On note C cet événement: $P(C)=\frac{3}{7}$

• Si on tire simultanément 2 boules de U_2, la probabilité d'obtenir une seule boule rouge parmi les deux boules tirées est: $\frac{C_3^1\times C_4^1}{C_7^2}=\frac{4}{7}$. On note D cet événement: $P(D)=\frac{4}{7}$ *

Donc: $p(E_1)=p(A\cap C)+p(B\cap D)$ et puis A et C sont lié à deux épreuves indépendantes ainsi que B et

D, alors $p(E_1)=p(A)\times p(C)+p(B)\times p(D)$

$$=\left(\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}\right)=\frac{11}{21}.$$

Donc: $p(E_1)=\frac{11}{21}$

* Montrons que: $p(E_2)=\frac{2}{21}$

Pour réaliser l'événement E_2 «obtenir exactement 2 boules rouges», il faut tirer un jeton n°2 de l'urne U_1, puis tirer simultanément deux boules rouges

de l'urne U_2 ; donc:

$p(E_2) = p(B) \times \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{2}{21}$

b) Calculons $p_{E_1}(A)$

$P_{E_1}(A) = \frac{P(A \cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{P(A) \times P_A(E_1)}{P(E_1)}$. Or: $p(A) = \frac{1}{3}$; $p(E_1) = \frac{11}{21}$

$p_A(E_1) = p(C) = \frac{3}{7}$

Donc: $P_{E_1}(A) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{7}}{\frac{11}{21}} = \frac{3}{11}$

1) On tire successivement et sans remise toutes les boules du sac, donc chaque tirage est une permutation de 6 éléments , donc $Card\Omega = 6! = 720$ (où Ω est l'univers des éventualités)

3 (R) 2 (B) 1 (J)

a) Déterminons la loi de probabilité de X

Puisque le nombre de boules rouges dans le sac est 3, alors le nombre maximal de boules rouges que l'on peut tirer avant l'application d'une première boule blanche est 3 et comme la 1ère boule tirée peut être blanche , alors: $X(\Omega) = \{0;1;2;3\}$

• Calculons $p(X = k)$ pour tout $k \in \{0;1;2;3\}$

• Pour réaliser l'événement $(X = 0)$, il faut:

-Tirer une boule blanche parmi 2 du 1ier tirage puis les 5 boules restantes, (l'ordre est important) donc: le nombre de ces choix $A_2^1 \times 5! = 240$.

ou

-Tire la boule jaune au 1er tirage, une boule blanche au 2ième tirage puis les 4 boules restantes donc le nombre ces choix est: $A_1^1 \times A_2^1 \times 4! = 48$

Donc: $Card(X = 0) = A_2^1 \times 5! + (A_1^1 \times A_2^1 \times 4!) = 288$

Et puisqu'il y a équiprobabilité , alors:

$$p(X = 0) = \frac{Card(X = 0)}{Card\Omega} = \frac{288}{720} = \frac{2}{5} = 0,4$$

• Pour réaliser l'événement $(X=1)$, il faut:

- Tirer une boule rouge au 1er tirage et une boule blanche au 2ème tirage puis les 4 boules restantes, le nombre de ces choix est: $A_3^1 \times A_2^1 \times 4! = 144$

ou

Tirer une boule rouge et une boule jaune au deux premiers tirages, puis tirer une boule blanche au 3ième tirage et les 3 autres boules restantes après ; le nombre de ces choix est: $2(A_3^1 \times A_1^1) \times A_2^1 \times 3! = 72$

D'où: $p(X=1) = \frac{216}{720} = \frac{3}{10} = 0,3$

• Pour réaliser l'événement $(X=2)$, il faut avoir: $(J;R;R;B;....,..)$ ou $(R;J;R;B;..)$ ou $(R;R;J;B;....)$ ou

$(R;R;B;...)$

Donc: $Card(X=2) = (A_3^2 \times A_1^1) \times 3 \times A_2^1 \times 2! + (A_3^2 \times A_2^1 \times 3!)$

D'où: $p(X=2) = \frac{144}{720} = \frac{1}{5} = 0,2$

• Pour réaliser l'événement $(X=3)$, il faut:

- Tirer les 3 boules rouges suivie d'une blanche puis les autres restante ; le nombre de ces choix est:

$A_3^3 \times A_2^1 \times 2! = 24$

ou

- Tirer la boule jaune et 3 boules rouges puis les deux blanches au 5ième et 6ième tirages le nombre de ces choix est: $4 \times (A_1 \times A_3^3) \times A_2^2 - 48$

Donc: $Card(X=3) = 72$

D'où $p(X=3) = \frac{72}{720} = \frac{1}{10} = 0,1$

On résume la loi de probabilité de x dans le tableau suivant:

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	0,4	0,3	0,2	0,1

b) Calculons $\sigma(X)$

$\sigma(X) = \sqrt{v(X)}$ où $v(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

* $E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i\, p(X=x_i) = 1$

* $E(X^2)=\sum_{i=1}^{4} x_i^2 p(X=x_i)=2$

Donc $\sigma(X)=\sqrt{E(X^2)-(E(X))^2}$ - 1

2) On considère l'épreuve «tirer simultanément 3 boules puis les remettre dans le sac»

On répète cette épreuve n fois de suite dans les mêmes conditions, les épreuves sont indépendants.

a) Calculons $p(A)$

où A est l'événement «obtenir 3 boules de cou eur différentes 2 à 2 en un seul tirage»

On a: $p(A)=\frac{C_3^1\times C_2^1\times C_1^1}{C_6^3}=\frac{3}{10}$

Donc, d'après la propriété des épreuves répétées, la probabilité de réaliser l'événement A , $n-1$ fois exactement est:

$$C_n^{n-1}\times(p(A))^{n-1}\times(1-p(A))=\frac{7n\times 3^{n-1}}{10^n}$$

b) Calculons P_n

Soit B l'événement «obtenir 3 boules de même couleur en un seul tirage»

$P(B)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}$

Donc, d'après la propriété des épreuves répétées, la probabilité que l'événement B ne soit réalisé aucune fois est: $C_n^n(P(B))^n\times(1-P(B))^n=\left(\frac{19}{20}\right)^n$

Donc: $P_n=1-\left(\frac{19}{20}\right)^n$

c) Calculons $p(C)$

où C est l'événement : «obtenir deux boules exactement de même couleur en un seul tirage»

Pour réaliser l'événement C , il faut:

- Tirer deux boules rouges (parmi 3) et une boule non rouge (parmi 3) ; le nombre de ces choix est:

$C_3^2\times C_3^1=9$

Ou

- Tires les deux boules blanches et une boule non blanche ; le nombre de ces

choix est: $C_2^2 \times C_4^1 = 4$

Donc: $CardC = 13$

D'où: $p(C) = \frac{13}{C_6^3} = \frac{13}{20}$

Donc , d'après la propriété des épreuves répétées, la probabilité de réaliser l'événement C 3 fois exactement est:

$$C_n^3(p(C)^3) \times (1-p(C))^{n-3} = \frac{n(n-1) \times 13^3 \times 7^{n-3}}{6 \times 20^n}$$

d) Déterminons la plus petit valeur de n telle que $P_n > 0,99$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 3$

$$P_n > 0,999 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^n > 0,999$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{19}{20}\right)n < 0,01 \quad ;$$

$$\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{19}{20}\right) < \ln(0,01)$$

(car la fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$)

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{19}{20}\right)} \text{ ; (car } \ln\left(\frac{19}{20}\right) < 0 \text{ car } 0 < \frac{19}{20} < 1)$$

or: $\frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{19}{20}\right)} \simeq 89,78$

Donc. 90 est la plus petite valeur de n pour laquelle $P_n > 0,999$

1) • Calculons $p(A)$

On considère les événements suivants:

E_1 «Tirer une boule numéroté 1 de U_1 »

E_2 : «Tirer une boule numéroté 2 de U »

F_1 : «Tirer une boule numéroté 1 de U_2 »

F_2 : «Tirer une boule numéroté 2 de U_2 »

A : «Tirer deux boules portant des numéros différents»

On a: $A = (E_1 \cap F_2) \cup (E_2 \cap F_1)$

Puisque les événements $(E_1 \cap F_2)$ et $(E_2 \cap F_1)$ sont incompatibles, alors $p(A) = p(E_1 \cap F_2) + p(E_2 \cap F_1)$

et puisque E_1 et F_2 sont indépendants a nsi que E_2 et F_1, alors

$$p(A) = p(E_1) \times p(F_2) + p(E_2) \times p(F_1)$$
$$= \left(\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{2}{5} \times \frac{2}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

Donc $p(A) = \frac{1}{2}$

• Calculons $p(B)$

Réaliser l'événement B , c'est tirer une boule blanche de U_1 et une boule noire de U_2 (car l'urne U_2 ne contient que les boules noires).

Donc ; $p(B) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{4} = \frac{2}{5}$

2) a) Déterminons la loi de probabilité de X

La variable aléatoire X associe à chaque tirage, la somme des nombres portés par les deux boules tirées ; donc $X(\Omega) = \{2;3;4\}$

• $(X = 2) = E_1 \cap F_1$

Donc $p(X = 2) = p(E_1) \times p(F_1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

• $(X = 3) = (E_1 \cap F_2) \cup (E_2 \cap F) = A$

D'où $p(X = 3) = p(A) = 0,5$

• $(X = 4) = E_2 \cap F_2$

Donc $p(X = 4) = p(E_2 \cap F_2) = \frac{1}{5} = 0,2$

On résume la loi de probabilité de X dans le tableau suivant:

x_i	2	3	4
$p(X = x_i)$	0,3	0,5	0,2

b) Calculons $E(X)$

$E(X) = \sum x_i p(X = x_i) = 2,9$

3) Soit H l'événement:

«Obtenir 3 fois exactement deux boules de couleurs différentes»

Réaliser l'événement H , c'est réaliser l'événement B trois fois exactement quand on répète l'épreuve (E) 5 fois de suite dans les mêmes conditions, et puisque ces épreuves sont 2 à 2 indépendants, alors, d'après la propriété des éprouves répétées, $p(H) = C_5^3 (p(B))^3 \times (1-p(B))^2$

D'où $p(H) = \frac{144}{625} \simeq 0,23$

Exercice 45 (Proba et suite)

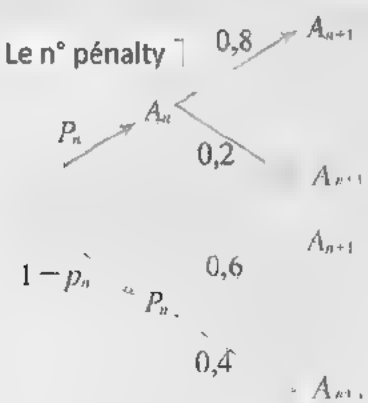
1) D'après les données de l'exercice, on a:

$p(A_1) = 0,7$

$p_{A_n}(A_{n+1}) = 0,8$

$p_{\overline{A}_n}(A_{n+1}) = 0,6$

L'arbre pondéré suivant résume les données de l'exercice:



b) • Calculons $p(A_{n+1} \cap A_n)$ et $p(A_{n+1} \cap \overline{A}_n)$

* $p(A_{n+1} \cap A_n) = p(A_n) \times p_{A_n}(A_{n+1}) = 0,8p_n$

$= 0,6 - 0,6p_n$

$p(A_{n+1} \cap A_n) = p(A_n) \times p_{A_n}(A_{n+1})$

$= (1-p_n) \times 0,6$

c) Déduisons $p(A_{n+1})$ en fonction de p_n

$A_{n+1} = (A_{n+1} \cap A_n) \cup (A_{n+1} \cap \overline{A}_n)$

(Car A_n et $\overline{A}_n$ forment une partition de l'univers)

Donc: $p(A_{n+1}) = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap \overline{A}_n)$

$= 0,8p_n + 0,6 - 0,6p_n$

D'où: $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6$

2) Montrons que $(u_n)_{n\geq 1}$ est géométrique soit $n \in \mathbb{N}^*$

$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,75$

$= 0,2p_n + 0,6 - 0,75$

$= 0,2p_n - 0,15$

$= 0,2\left(p_n - \frac{0,15}{0,2}\right)$

$= 0,2(p_n - 0,75)$

$= 0,2\,u_n$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_{n+1} = 0,2u_n$

D'où $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $q = 0,2$ et de premier terme

$u_1 = p_1 - 0,75 = 0,7 - 0,75 = 0,05$

b) Déduisons u_n et p_n en fonction de n

Puisque $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $q = 0,2$ et de premier terme $u_1 = -0,05$, donc:

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n = -0,05 \times (0,2)^{n-1}$

Or $u_n = p_n - 0,75$, donc $p_n = u_n + 0,75$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $p_n = -0,05 \times (0,2)^{n-1} + 0,75$

c) Déterminons la limite de la suite $(P_n)_{n\geq}$

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $p_n = -0,05 \times (0,2)^{n-1} + 0,75$

Puisque $-1 < 0,2 < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(0,2)^{n-1} = 0$

Donc: $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0,75$

Interprétation: $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0,75 = \frac{3}{4}$, cela veut dire qu'après un très grand nombre de pénalty , Ahmed va retenir 3 pénalty sur 4, soit 75% des penalty ce qui représente un grand exploit pour Ahmed.

Exercice 46 (Proba et suite)

1) a) Calculons p_1 et p_2

• E_1 est l'événement «La boule tirée de S_1 est blanche»

Puisque S_1 contient 3 boules dont une seule est blanche, alors $p(E_1) = \frac{1}{3}$

D'où $p_1 = \frac{1}{3}$

• Calculons p_2

$E_2 = (E_2 \cap E_1) \cup (E_2 \cap \overline{E}_1)$

Donc: $p(E_2) = p(E_2 \cap E_1) + p(E_2 \cap \overline{E_1})$

$- p(E_1) \times p_{E_1}^{(E_2)} + p(\overline{E_1}) \times p_{\overline{E_1}}^{(E_2)}$

$= \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$

D'où: $P_2 = \frac{4}{9}$

b) Montrons que $P_{k+1} = \frac{1}{3}P_k + \frac{1}{3}$

Soit $k \in \{1;2;3;....;n\}$

On a: $E_{k+1} = (E_{k+1} \cap E_k) \cup (E_{k+1} \cap \overline{E}_k)$

Donc: $p(E_{k+1}) = p(E_k \cap E_{k+1}) + p(\overline{E}_k \cap E_{k+1})$

$= p(E_k) \times p_{E_k}(E_{k+1}) + p(\overline{E}_k) \times p_{\overline{E}_k}(E_{k+1})$

$= p_k \times \frac{2}{3} + (1 - p_k) \times \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$

Donc: $(\forall k \in \{1;2;...;n\})$; $p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$

2) a) Montrons que $(v_n)_{n\geq}$ est une suite géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{6}$

$= \frac{1}{3}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{3}v_n$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$

D'où $(v_n)_{n\geq 1}$ est une su te géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme

$v_1 = u_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$

b) Montrons que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $v_n = v_1 \times q^{n-1}$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $v_n = -\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}$; (car $u_n = v_n + \frac{1}{2}$)

• Puisque $-1 < \frac{1}{3} < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

Donc $\lim u_n = \frac{1}{2}$

La suite (u_n) converge donc vers $\frac{1}{2}$

3) Dans cette question $n = 10$

Déterminons les valeurs de k pour lesquelles $0,4999 < p_k \leq 0,5$

Puisque: $p_1 = \frac{1}{3}$ et $p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + 13$

Don: $p_k = u_k$ et par suite ;

$p_k = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{1}{2}$

• $0,4999 \leq p_k \leq 0,5 \Leftrightarrow 0,4999 \leq -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{1}{2} \leq 0,5$

$\Leftrightarrow 0 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^k \leq 2 \times 10^{-4}$

$\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)^k\right) \leq \ln(2 \times 10^{-4})$

$\Leftrightarrow k \ln\left(\frac{1}{3}\right) < \ln(2 \times 10^{-4})$

$\Leftrightarrow k \geqslant -\frac{\ln(2 \times 10^{-4})}{\ln(3)}$

Or, $1 \leq k \leq 10$ et $-\frac{\ln(2 \times 10^{-4})}{\ln(3)} \simeq 7,753$

Donc $k \in \{8;9;10\}$

Conclusion:

$0,4999 \leq p_k \leq 0,5 \Leftrightarrow k \in \{8;9;10\}$

1) Montrons que: $p_n = \frac{n}{n+1}$

Puisque le sac contient au départ une boule blanche et une boule noire, et puisqu'on ajoute une boule blanche après chaque tirage, alors, après $(n-1)$ tirages, le nombre de boules blanches dans le sac est $(n-1)+1=n$ et le nombre total de boules dans le sac est $n+1$

Donc, d'après l'hypothèse de l'équiprobabilité, $p_n = \frac{n}{n+1}$

2) Montrons que la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ est croissante soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a: $p_{n+1} - p_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $p_{n+1} > p_n$

La suite $(p_n)_{n\geq 1}$ est donc strictement croissante

3) a) Déterminons le plus petit entier naturel n tel que: $1 - p_n \leq \frac{1}{20}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$1 - p_n \leq \frac{1}{20} \Leftrightarrow 1 - \frac{n}{n+1} \leq \frac{1}{20}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{20}$$
$$\Leftrightarrow n+1 \geqslant 20$$
$$\Leftrightarrow n \geqslant 19$$

Donc 19 est la plus petite valeur de n tel que $1 - p_n \leq \frac{1}{20}$

b) Interprétons ce résultat

P_n est la probabilité d'obtenir une boule blanche au nième tirage, donc $1 - p_n$ est la probabilité d'obtenir une boule noire au nième tirage

Le résultat de la question 3) a) veut dire que la probabilité d'obtenir une boule noire est inférieur ou égale à $\frac{1}{20}$ à partir du 19ième tirage.

EXERCICE 6

1) Montrons que $p(E) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$

On tire successivement et avec remise n boules de l'urne qui contient 10 boules, donc chaque tirage est un arrangement avec un arrangement avec

répétition de n éléments parmi 10, d'où ; $Card\Omega = 10^n$ (où Ω est l'univers associé à cette expérience aléatoire).

L'événement E est l'événement contraire de l'événement A «toutes les boules tirées sont de même couleur».

On considère les événements:

N : «Obtenir n boules noires»

B : «Obtenir n boules blanches»

On a: $A = N \cup B$

Donc: $p(A) = p(N) + p(B)$ (car N et B sont incompatibles)

Or:

$p(N) = \frac{5^n}{10^n} = \frac{1}{2^n} = p(B)$ et $p(E) = 1 - p(A)$

Alors: $p(E) = 1 - 2 \times \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$

• Montrons que $p(F) = \frac{1+n}{2^n}$

Soit B_1 l'événement «obtenir une seule boule blanche parmi les n boules tirée»

On a: $F = N \cup B_1$, et puisque les événements N et B_1 sont incompatibles,

alors: $p(F) = p(N) + p(B_1)$

$$= \frac{1}{2^n} + \frac{C_n^1 \times 5^1 \times 5^{n-1}}{10^n}$$

$$= \frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^n}$$

Donc $p(F) = \frac{1+n}{2^n}$

• Montrons que $p(E \cap F) = \frac{n}{2^n}$

Remarque: $E \cap F = B_1$

Donc: $p(E \cap F) = p(B_1) = \frac{n}{2^n}$

2) Montrons que: (E et F indépendants) $\Leftrightarrow (2^{n-1} = n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

(E et F sont indépendants) $\Leftrightarrow p(E \cap F) \times p(E) \times p(F)$ (*)

$$\Leftrightarrow \frac{n}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \times \left(\frac{1+n}{2^n}\right)$$

$$(*) \qquad \Leftrightarrow n = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \times (1-n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{n}{1-n} = \frac{1}{1+n}$$

$$\Leftrightarrow 2^{n-1} = 1+n$$

3) a) Calculons u_2 ; u_3 et u_4

$(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$; $u_n = 2^{n-1} - (n+1)$

Donc: $u_2 = 2 - 3 = -1$

$u_3 = 0$

$u_4 = 3$

b) Montrons que $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

$u_{n+1} - u_n = (2^n - (n+2)) - (2^{n-1} - (n+1)) = 2^{n-1} - 1$

$$n \geqslant 2 \Rightarrow n-1 \geqslant 1$$
$$\Rightarrow 2^{n-1} \geqslant 2$$
$$\Rightarrow 2^{n-1} - 1 \geqslant 1$$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$; $u_{n+1} > u_n$

La suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante.

4) Déterminons n pour que E et F soient indépendants

Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

(E et F sont indépendants) $\Leftrightarrow 2^{n-1} = n+1$

$$\Leftrightarrow u_n = 0$$

D'après la question 3) on a: $u_2 \neq 0$, $u_3 = 0$ et $u_4 \neq 0$ et puisque la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante, alors: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $n \geqslant 4 \Rightarrow u_n \neq 0$

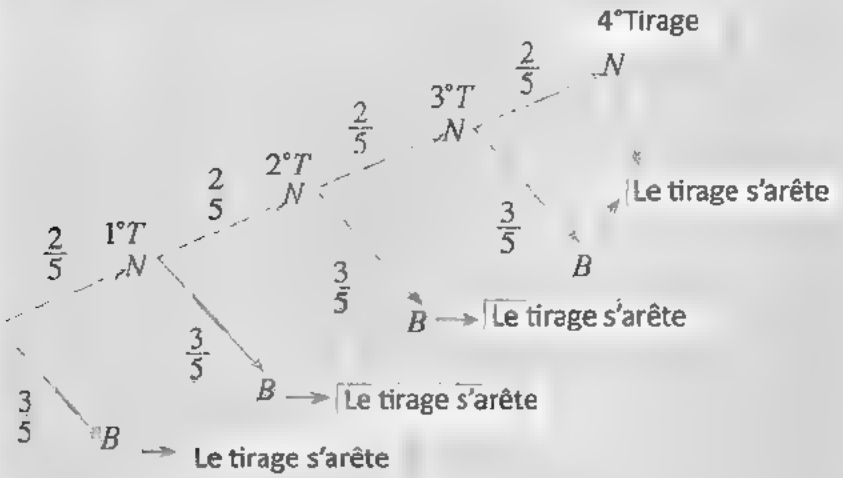
Donc: $u_n = 0 \Leftrightarrow n = 3$

D'où: E et F sont indépendants si et seulement si $n = 3$

Exercice 49

Partie 1:

Arbre pondéré associé à l'expérience relative à la partie 1:



1) Calculons $p(X=0)$

L'événement $(X=0)$ est l'événement «obtenir 4 boule noires»

Donc: $p(X=0)=\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{16}{625}=0,0256$

2) * Calculons $p(X=1)$

L'événement $(X=1)$ est l'événement:

«obtenir une boule blanche au 1er tirage»

Donc: $p(X=1)=\frac{3}{5}$

* Calculons $p(X=2)$

Réaliser l'événement $(X=2)$ c'est tirer une boule noire au 1er tirage et une boule blanche au 2° tirage

Donc $p(X=2)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}=0,24$

* Calculons $p(X=3)$

$p(X=3)=\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{3}{5}=\frac{12}{125}=0,096$

* $p(X=4)=\left(\frac{2}{5}\right)^3\times\frac{3}{5}=\frac{24}{625}=0,0384$

Partie 2: Dans cette partie, on fait au plus n tirages (où $n\in\mathbb{N}^*$)

1) Calculons $p(Y=k)$ pour tout $k\in\{1;2;...;n\}$

Réaliser l'événement $(Y=k)$, c'est tirer que des boules noires au $(k-1)$ premiers tirages et une boule blanche au $k^{ième}$ tirage , donc:

$p(Y=k)=\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}\times\frac{3}{5}=\frac{3\times 2^{k-1}}{5^k}$ pour tout $k\in\{1,2;3;....;n\}$

2) $P(X)=1+2x+3x^2+....+nx^{n-1}$; $x\in\mathbb{R}$

Montrons que $E(Y)=\frac{3}{5}P\left(\frac{2}{5}\right)$

$$\begin{aligned}E(Y)&=\sum_{k=1}^{n}k\times p(Y=k)\\&=\sum_{k=1}^{n}k\times\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}\times\frac{3}{5}\\&=\frac{3}{5}\left(1+2\left(\frac{2}{5}\right)+3\left(\frac{2}{5}\right)^2+..+n\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right)\\&=\frac{3}{5}\times P\left(\frac{2}{5}\right)\end{aligned}$$

D'où: $E(Y)=\frac{3}{5}\times P\left(\frac{2}{5}\right)$

Remarque: $p(Y=0)=\left(\frac{2}{5}\right)^n$, mais le calcul de $p(Y=0)$ n'est pas nécessaire pour calculer $E(Y)$

(car: $0\times p(Y=0)=0$).

3) Montrons que: $E(Y)=\frac{5}{3}-\left(n+\frac{5}{3}\right)\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$

Calculons $P(x)$ en fonction de x et n

On remarque que la fonction polynomiale P est la dérivée de la fonction $f:x\mapsto 1+x+x^2+...+x^n$

Or: $(\forall x\in\mathbb{R}-\{1\})$; $1+x+x^2+....+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Donc: $P(x)=f'(x)=\frac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$

D'où: $(\forall x\in\mathbb{R}-\{1\})$; $P(x)=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$

D'après la question 2) , $E(Y)=\frac{3}{5}\times P\left(\frac{2}{5}\right)$

Or: $P\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{n\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}-(n+1)\times\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}{\left(\frac{3}{5}\right)^2}$

Donc: $E(Y)=\frac{3}{5}\left[1+n\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}-(n+1)\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n}\right]$

$$=\frac{5}{3}\left[1+n\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}-(n+1)\left(\frac{2}{5}\right)^{n}\right]$$

$$-\frac{5}{3}\left[1+\left(-n-1+\frac{2}{5}n\right)\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n}\right]$$

$$=\frac{5}{3}\left[1+\left(-1-\frac{3}{5}n\right)\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n}\right]$$

$$=\frac{5}{3}\left[1-\frac{3}{5}\left(n+\frac{5}{3}\right)\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n}\right]$$

D'où: $E(Y)=\frac{5}{3}-\left(n+\frac{5}{3}\right)\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n}$

1) Calculons $p(X\leq k)$ pour tout $k\in\{1;2;....;n\}$

Soit $k\in\{1;2;...;n\}$

Pour réaliser l'événement $(X\leq k)$, il faut que chacune des deux boules tirées portent un numéro inférieur ou égal à k ; et puisque dans chacune des urnes , il y a k boules qui portent un numéro inférieur ou égal à k alors, $Card(X=k)=C_k^1\times C_k^1=k^2$

Or $Card\Omega=C_n^1\times C_n^1=n^2$ et il y a équiprobabilité (car le tirage est au hasard , et les boules sont indiscernables au toucher).

Donc: $p(X\leq k)=\frac{k^2}{n^2}$

D'où: $(\forall k\in\{1;2;3;...,n\})$; $p(X\leq k)=\frac{k^2}{n^2}$

2) Montrons que: $p(X=k)=\frac{2k-1}{n^2}$

Soit $k\in\{1;2;...;n\}$,

On a: $p(X\leq k)=\frac{k^2}{n^2}$

- Si $k\geqslant 2$; alors: $p(X=k)=p(X\leq k)-p(X\leq k-1)$

Donc $p(X=k)=\frac{k^2}{n^2}-\frac{(k-1)^2}{n^2}=\frac{2k-1}{n^2}$

- Si $k=1$, alors $p(X=k)=p(X=1)=\frac{1^2}{n^2}=\frac{1}{n^2}$

On remarque qu'il s'écrit aussi sons la forme $\frac{2k-1}{n^2}$ (car $\frac{2\times 1-1}{n^2}=\frac{1}{n^2}$)

Donc: $(\forall k\in\{1;2;...;n\})$; $p(X=k)=\frac{2k-1}{n^2}$

Exercice 51

1) Vérifions que: $\sum_{k=1}^{n-1}P_k=1$

Soit $n\in\mathbb{N}$, tel que $n\geqslant 3$

On a: $p_k=\frac{2k}{n(n-1)}$ pour tout $k\in\{1;2;.....,n\}$

$$\sum_{k=1}^{n-1}P_k=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k}{n(n-1)}$$
$$=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}k$$
$$=\frac{2}{n(n-1)}\times\frac{(n-1)n}{2}$$
$$=1$$

Donc: $\sum_{k=1}^{n-1}P_k=1$

2) On tire successivement et sans remise $n-2$ boules de l'urne choisie, donc chaque tirage est un arrangement sans remise de $(n-2)$ élément parmi n , d'où $Card\Omega=A_n^{n-2}$

On considère les événements suivants:

U_k «Choisir l'urne U_k»

N «Les deux boules restantes dans l'urne sont noires»

a) Calculons $p(N)$

Les événements U_1 ; $U_2;....;U_{n-1}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la loi des probabilités totales,

$$p(N)=\sum_{k=1}^{n-1}p(U_k)\times P_{U_k}(N)$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}P_k\times P_{U_k}(N)$$

On a: $P_k=\frac{2k}{n(n-1)}$

• Calculons $P_{U_k}(N)$

L'urne U_k contient n boules donc k exactement sont noires ; donc pour que

les deux boules restantes après tirage de

$n-2$ boules soient noires , il faut que parmi les $n-2$ boules tirées, il y a exactement $k-2$ boules noire (les autres boules sont blanches leur nombre est $n-k$)

Donc: $p_{(i)}(N)=\dfrac{C_{n-2}^{k-2}\times A_k^{k-2}\times(n-k)!}{A_n^{n-2}}$

Or: $C_{n-2}^{k-2}=\dfrac{(n-2)!}{(k-2)!\times(n-k)}$

- $A_k^{k-2}=\dfrac{k!}{2!}=\dfrac{k!}{2}$
- $A_n^{n-2}=\dfrac{n!}{2}$

D'où: $p_{(i)}(N)=\dfrac{\dfrac{(n-2)!}{(k-2)!}\times k!}{\dfrac{n!}{2}}=\dfrac{k(k-1)}{n(n-1)}$

Donc: $p(N)=\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{2k}{n(n-1)}\times\dfrac{k(k-1)}{n(n-1)}$

$$=\frac{2}{n^2(n-1)^2}\sum_{k=1}^{n-1}(k^3-k^2)$$

$$=\frac{2}{n^2(n-1)^2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}k^3-\sum_{k=1}^{n-1}k^2\right)$$

Et puisque:

$*\sum_{k=1}^{n-1}k^3=\dfrac{n^2(n-1)^2}{4}$ $\quad *\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

Donc:

$$\sum_{k=1}^{n-1}k^3-\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{n^2(n-1)^2}{4}-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$=\frac{n(n-1)}{12}[3n^2-3n-4n+2]$$

$$=\frac{n(n-1)}{12}(3n^2-7n+2)$$

$$=\frac{n(n-1)}{12}(n-2)(3n-1)$$

D'où: $p(N)=\dfrac{2}{n^2(n-1)^2}\times\dfrac{n(n-1)}{12}\times(n-2)(3n-1)$

Conclusion: $p(N)=\dfrac{(n-2)(3n-1)}{6n(n-1)}$

b) Calculons $p_N(U_k)$

$$p_N(U_k)=\frac{p(N\cap U_k)}{p(N)}=\frac{p(U_k)\times p_{U_k}(N)}{p(N)}$$

$$=\frac{\frac{2k}{n(n-1)}\times\frac{k(k-1)}{n(n-1)}}{\frac{(n-2)(3n-1)}{6n(n-1)}}=\frac{12k^2(k-1)}{n(n-1)(n-2)(3n-1)}$$

Donc: $p_N(U_k)=\frac{12k^2(k-1)}{n(n-1)(n-2)(3n-1)}$

3) Calculons $p(A)$

Puisque toute une U_k est vidée dans l'urne U_{k+1} pour tout $k\in\{1;2;....;(n-2)\}$, alors l'urne U_{n-1} contient dans ce cas $\underbrace{n+n+.....+n}_{(n-1)fois}=n(n-1)$ boules parmi elles il y a : $1+2+3+..+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$ boules noires et autant de boule blanches; donc : $p(A)=\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n(n-1)}=\frac{1}{2}$

Calculons $p(B)$

Pour réaliser l'événement B, il faut tirer une boule noire de chacune des urnes $U_1;U_2;..;$ et U_{n-2} ; après avoir vidé toute urne U_k dans U_{k+1}

Dans ces conditions, l'urne U_k contient $\underbrace{n+n+....+n}_{kfois}=nk$ boules

dont $1+2+.....+k=\frac{k(k+1)}{2}$ sont noires

Donc la probabilité de tirer une boule noire de U_k (dans ce cas) est:

$$\frac{\frac{k(k+1)}{2}}{kn}=\frac{k(k+1)}{2kn}=\frac{k+1}{2n}$$

Donc: $p(B)=\prod_{k=1}^{n-2}\frac{k(k+1)}{2kn}=\prod_{k=1}^{n-2}\frac{k+1}{2n}$

$$=\left(\frac{1}{2n}\right)^{n-2}\times\prod_{k=1}^{n-2}(k+1)=\left(\frac{1}{2n}\right)^{n-2}\times(2\times3\times4\times...\times(n-1))$$

$$=\left(\frac{1}{2n}\right)^{n-2}\times(n-1)!$$

D'où: $p(B)=\frac{(n-1)!}{(2n)^{n-2}}$; $n\geq3$

Sommaire

Chapitre 01	**Fonctions exponentielles**	4
	I/ Fonction exponentielle népérienne	4
	Exercices d'application	4
	II/ Exponentielle de $a(a > 0 \text{ et } a \neq 1)$	12
	Exercices d'application	13
	III/ Limites usuelles	17
	Exercices d'application	17
	IV/ Dérivation - Courbe de la fonction exp	29
	Exercices d'application	30
	Exercices de synthèse	43
Chapitre 02	**Calcul intégral**	104
	I/ Intégrale d'une fonction sur intervalle	104
	II/ Relation de Chasles - Linéarité de l'intégrale	104
	Exercices d'application	105
	III/ Intégral et ordre	116
	IV/ Valeur moyenne	116
	Exercices d'application	117
	V/ Quelques techniques du calcul d'une intégrale	128
	Exercices d'application	129
	VI/ Calcul d'aires et de volumes	145
	VII/ Méthodes et techniques	146
	VIII/ Limite d'une suite	146
	Exercices d'application	148
	Exercices de synthèse	150
Chapitre 03	**Équations différentielles**	262
	I/ Équation différentielle $y' = ay + b$	262
	II/ Equation du type: $y'' + ay' + by = 0$	262
	Exercices d'application	263
Chapitre 04	**Structures algébriques**	289
	I/ Lois de composition interne	290
	Exercices d'application	290
	II/Homomorphisme	303
	Exercices d'application	304
	III/ Groupes - Anneaux - Corps	310
	Exercices d'application	314

Sommaire

Chapitre 04	IV/Espace vectoriel réel	357
	Exercices d'application	360
	Exercices de synthèse	368
Chapitre 05	**Arithmétique dans $\mathbb{Z}$**	393
	I/ Divisibilité dans $\mathbb{Z}$	393
	II/ Congruence modulo n	293
	III/ Ensemble	394
	Exercices d'application	394
	IV/ Le plus grand commun diviseur $(PGCD)$- Le plus petit commun multiple $(PPMC)$	406
	Exercices d'application	407
	V/ Nombres premiers entre eux - Théorème de Bezout Théorème de Gauss	414
	Exercices d'application	415
	VI/ Équation $ax + by = c$ dans $\mathbb{Z}^2$	426
	Exercices d'application	426
	VII/ Nombres premiers	433
	Exercices d'application	435
	VIII/ Systèmes de numération	456
	Exercices d'application	457
	Exercices de synthèse	465
Chapitre 06	**Calcul de probabilités**	520
	I/ Dénombrement (Analyse combinatoire)	520
	Exercices d'application	521
	II/ Stabilité de la fréquence d'un événement - Probabilité d'un événement	525
	Exercices d'application	526
	III/ Probabilité conditionnelle - Indépendance de deux événements	545
	Exercices d'application	546
	IV/ Indépendance de deux épreuves - Épreuves répétées	559
	Exercices d'application	560
	V/ Variables aléatoires - Espérance mathématique - Variance et écart-type	571
	Exercices d'application	572
	VI/ Fonction de répartition d'une variable aléatoire	580
	Exercices d'application	581
	VII/ Loi binomiale	586
	Exercices d'application	586
	Exercices de synthèse	595

Imprimerie Najah Al Jadida (CTP) - Casablanca 2020

Tous droits réservés

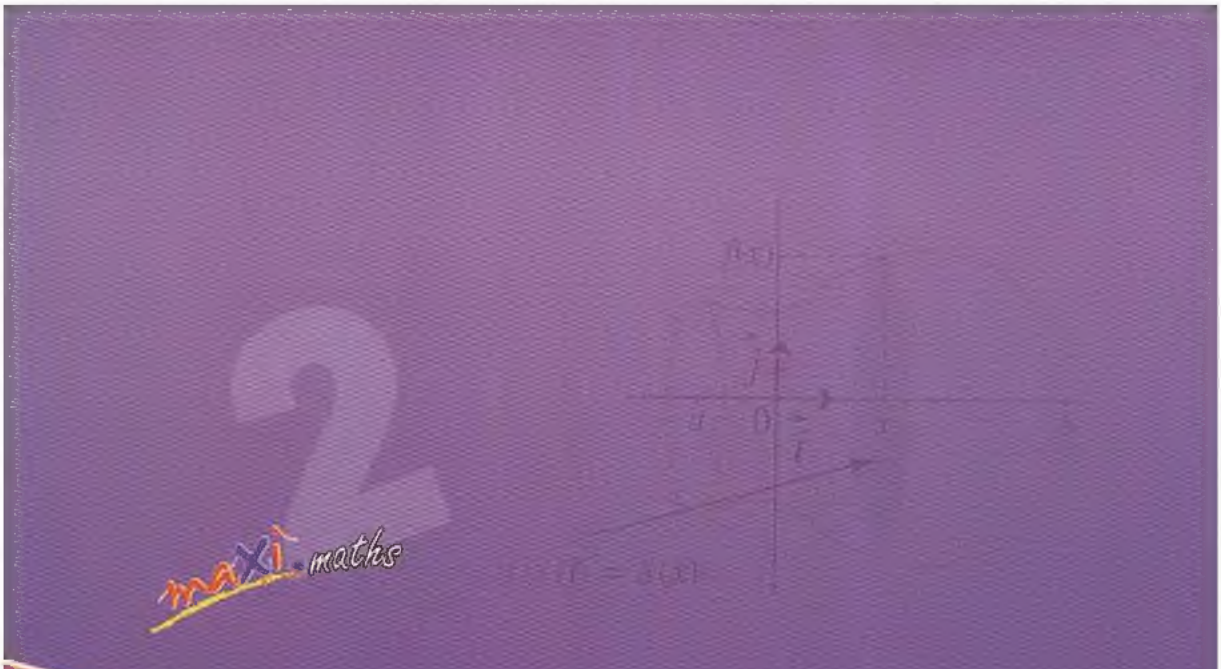
EDITIONS Plus
إديسيون بلوس

Maxi.Maths - SC MATH 2BAC TOME (2) - Exercices résolus

Édition 2020

Dépôt légal: 2020MO3628

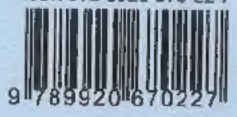
ISBN: 978-9920-670-22-7



مكتبة السلام الجديدة

31/34 Place My Youssef - Habouss - Casablanca
Tel.: 05-22-30-40-16 / 05-22-30-37-11
Fax: 05-22-44-10-47
lib.essalam@gmail.com
lib.essalam@hotmail.fr - E-mail: lib.essalam@menara.ma
www.librairieessalam.com

Dépôt Légal 2020MO3628
ISBN 978-9920-670-22-7



Prix de vente public:
120,00 DH